

## 小テスト

**問題 1.1.** 次で定義される数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するかどうかを答え、収束する場合には極限値を求めよ：

1.  $a_n = 1.$

2.  $a_n = n.$

3.  $a_n = (-1)^n.$

4.  $a_n = \frac{1}{n}.$

5.  $a_n = \frac{[10^n \sqrt{2}]}{10^n}.$

6.  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is even,} \\ \frac{1}{n} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$

7.  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is a power of 2,} \\ \frac{1}{n} & \text{otherwise.} \end{cases}$

8.  $a_n = \begin{cases} -\frac{1000}{n} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \frac{1}{n} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$

ここで、 $x \in \mathbb{R}$  に対し  $[x]$  で  $x$  の整数部分を表す。

**問題 1.2.** 正の整数  $n$  が与えられた時、関数  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \in \mathbb{R}$  に対し

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } |x| \geq 1/n, \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。この時、次の問いに答えよ。

1. 関数  $f_n$  がいたるところ微分可能であることを示せ。
2. 関数  $f_n$  のグラフを描け。
3. 数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するための  $x \in \mathbb{R}$  に対する条件を求めよ。  
また、収束する時の極限値を求めよ。

**問題 1.3.** 正の整数  $n$  が与えられた時、関数  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \in \mathbb{R}$  に対し

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -1/n, \\ -2n^3x^3 - 3n^2x^2 & \text{if } -1/n \leq x < 0, \\ -2n^3x^3 + 3n^2x^2 & \text{if } 0 \leq x < 1/n, \\ 1 & \text{if } x \geq 1/n \end{cases}$$

で定義する。この時、次の問いに答えよ。

1. 関数  $f_n$  がいたるところ微分可能であることを示せ。
2. 関数  $f_n$  のグラフを描け。
3. 数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するための  $x \in \mathbb{R}$  に対する条件を求めよ。  
また、収束する時の極限值を求めよ。

## 数学演習 A

**問題 1.4.** 問題 1.1 における収束・発散を  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を使って議論せよ。

**問題 1.5.** 問題 1.2 で与えられた関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束することを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を使って示せ。また、極限として与えられる関数  $f_{\infty}$  は微分できないことを示せ。従って、微分可能な関数の列が収束するとしても、その極限が再び微分可能な関数になるとは限らない。

**問題 1.6.** 問題 1.3 で与えられた関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束することを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を使って示せ。また、極限として与えられる関数  $f_{\infty}$  は連続ではないことを示せ。従って、連続な関数の列が収束するとしても、その極限が再び連続になるとは限らない。

## 小テスト

**問題 2.1.** 次で定義される数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するかどうかを答え、収束する場合には極限值を求めよ：

1.  $a_n = \sqrt[n]{n}$

2.  $a_n = \frac{2^n}{n!}$

3.  $a_n = \frac{n^n}{n!}$

4.  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

**問題 2.2.** 閉区間  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  で定義された関数で、最大値を持たないものを与えよ.

**問題 2.3.** 半开区間  $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$  で定義された連続関数で、最大値を持たないものを与えよ.

## 数学演習 A

**問題 2.4.** 次の関数の 0 における Taylor 級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

を求めよ. ただし、 $n$  は自然数とする.

1.  $f(x) = (1+x)^3$

2.  $f(x) = (1+x)^4$

3.  $f(x) = (1+x)^n$

4.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

5.  $f(x) = \frac{1}{1+x}$

6.  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

7.  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$

$$8. f(x) = \frac{1}{(1+x)^n}$$

$$9. f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$10. f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

$$11. f(x) = \sqrt[n]{1+x}$$

$$12. f(x) = (1+x)^{\sqrt{2}}$$

$$13. f(x) = e^x$$

$$14. f(x) = \sin x$$

$$15. f(x) = \cos x$$

$$16. f(x) = \tan x$$

$$17. f(x) = \log(1+x)$$

**問題 2.5.** 問題 2.4 で求めた Taylor 級数のそれぞれの収束半径を求めよ.

**注意 2.1.** Taylor 展開できる関数のことを解析関数と呼ぶが、実は問題 2.4 に現れる関数は全て解析関数であることが知られている.

**問題 2.6.** 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を、 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対し

$$f(x) = e^{-1/x^2}$$

で定義し、0 に連続に拡張する. この時、 $f$  は滑らかな関数になることを示し、 $f$  の原点における Taylor 級数を求めよ.

**注意 2.2.** Taylor の定理は、Taylor 級数を  $n$  次で打ち切った級数

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

と  $f(x)$  との差が、 $x$  を 0 に近づけて行く時に  $x^{n+1}$  と同程度かそれよりも速く 0 に近づく事を主張しているが、 $x$  を止めて  $n$  を大きくしても近似の精度が上がるとは限らない. 例えば  $|x| < 1$  でのみ意味のある式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

に  $x = 2$  を代入することを考えてみよ. また問題 2.6 から、滑らかな関数の Taylor 級数が収束してもそれがもとの関数と一致するとは限らないことが分かる. 従って、一般に Taylor 級数において  $n$  を止めて  $x$  を小さくすることには意味があるが、 $x$  を止めて  $n$  を大きくしても意味があるとは限らない.

**発展問題 2.7.** 無限級数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  が  $\log 2$  に収束することを示せ.

## 小テスト

問題 3.1. 次の等式が  $x$  に関する恒等式になるような実数  $a_0, \dots, a_5, b_0, \dots, b_5$  を求めよ:

$$1 + x - 2x^2 - 2x^3 + x^4 + x^5 = \sum_{k=0}^5 a_k (x-1)^k = \sum_{k=0}^5 b_k (x+1)^k.$$

問題 3.2. 次の関数を  $x = 0$  で Taylor 展開せよ. ただし、 $a$  は実数とする.

1.  $(1+x)^a$
2.  $e^x$
3.  $\sin x$
4.  $\cos x$

## 数学演習 A

問題 3.3. 指数関数と三角関数の Taylor 展開を使って、Euler の公式

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

を示せ.

問題 3.4. Euler の公式と指数法則を使って、三角関数に関する次の公式を示せ:

$$1. \sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$2. \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

$$3. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$4. \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$5. \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

問題 3.5. 逆三角関数  $\arcsin x$  と  $\arccos x$  の導関数を求めよ.

問題 3.6. 逆三角関数  $\arcsin x$  と  $\arccos x$  を対数関数を用いて表せ.

**定義 3.1.** 双曲線関数を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定める.

**問題 3.7.** 双曲線関数に関する次の公式を示せ:

1.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2.  $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
3.  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
4.  $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
5.  $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

**問題 3.8.** 双曲線関数  $\sinh x$  と  $\cosh x$  のグラフを描け.

**問題 3.9.**  $\sinh^2 x$  と  $\cosh^2 x$  を  $\cosh 2x$  を用いて表せ.

**問題 3.10.** 双曲線関数  $\sinh x$  と  $\cosh x$  の原点における Taylor 展開を求めよ.

**問題 3.11.** 双曲線関数  $\sinh x$  と  $\cosh x$  の逆関数の導関数を求めよ.

**問題 3.12.** 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は、和の内部に絶対値をつけたもの

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束するとき**絶対収束する**と言われるが、絶対収束する級数は収束することを示せ.

**問題 3.13.** Taylor 展開は収束半径の内側で絶対収束し、項別微分や項別積分が自由に出来ることが知られているが、 $|x| < 1$ における分数関数の Taylor 展開

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

を項別積分することにより、対数関数  $\log(1-x)$  の Taylor 展開を求めよ.

**発展問題 3.14.** 絶対収束級数は和の順序を取り替えても値が変わらないが、条件収束級数は和の順序交換によって任意の値に収束させられることを示せ.

## 小テスト

問題 4.1. 関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定義するとき、次の問いに答えよ：

1. 定義

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

に従って  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  と  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  を求めよ.

2.  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおいて  $f(x, y)$  を  $r$  と  $\theta$  の式で表せ.

3.  $f$  が原点で不連続であることを示せ.

## 数学演習 A

問題 4.2.  $\mathbb{R}^2$  上の  $(n+1)$  点  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  が与えられたとき、差分商 (divided difference) を

$$[y_i] = y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$[y_i, \dots, y_{i+k}] = \frac{[y_{i+1}, \dots, y_{i+k}] - [y_i, \dots, y_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-1, k = 1, \dots, n-i$$

で定義し、

$$N(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + \dots + [y_0, \dots, y_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

とおくと、

$$N(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

となることを示せ. この多項式  $N(x)$  を与えられた  $(n+1)$  点を通る Newton の補間多項式 (Newton polynomial) と呼ぶ.

問題 4.3. 問題 4.2 の状況で

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

とおくと、

$$L(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

となることを示せ. この多項式  $L(x)$  を与えられた  $n + 1$  点を通る **Lagrange の補間多項式 (Lagrange polynomial)** と呼ぶ.

問題 4.4. 問題 4.2 および問題 4.3 の状況で、

$$N(x) = L(x)$$

となることを示せ.

問題 4.5. 関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $n + 1$  点  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  に対し、

$$f[x_0, \dots, x_n] = [f(x_0), \dots, f(x_n)]$$

を  $f$  の **差分商 (divided difference)** と呼ぶ. ここで、もし  $f$  が  $n$  階微分可能ならば、任意の  $\xi \in \mathbb{R}$  に対し

$$\lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (\xi, \dots, \xi)} f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

が成り立つことを示せ. 従って、 $f$  の  $x_0, \dots, x_n$  における **補間多項式 (interpolation polynomial)** を

$$N(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

で定義すると、

$$\lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (\xi, \dots, \xi)} N(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n$$

となる.

**注意 4.1.** 閉区間  $[a, b]$  と滑らかな関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき、 $[a, b]$  の  $n$  等分点を  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  とおいて  $f$  の補間多項式  $N(x)$  を考えても、 $N(x)$  は  $n \rightarrow \infty$  の極限で  $f$  に収束するとは限らない. これを **Runge 現象 (Runge's phenomenon)** と呼ぶ.



## 小テスト

問題 5.1. 次の関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、偏導関数

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

$$f_{xx}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0, 0),$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0),$$

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0),$$

$$f_{yy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0, 0)$$

を求めよ:

1.  $f(x, y) = (x + y)^2$

2.  $f(x, y) = x^2 \sin y$

3.  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

## 数学演習 A

問題 5.2. 非負整数  $n$  に対し、 $n$  次の Chebyshev 多項式  $T_n(x)$  が

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

で定義される。これに関して次の問いに答えよ:

1.  $T_n(1) = 1$  かつ  $T_n(-1) = (-1)^n$  であることを示せ.

2. 非負整数  $n$  に対して

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

が成り立つことを示せ。従って、 $T_n(x)$  は  $x$  に関する  $n$  次の多項式になる。

3. 非負整数  $m$  と  $n$  に対して

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi & m = n = 0, \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

4.  $x$  に関する  $n$  次多項式  $f(x)$  で最高次の係数が 1 であるようなものに対し、ある  $x \in [-1, 1]$  で

$$|f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

となるようなものが必ず存在し、しかも、もし

$$|f(x)| > \frac{1}{2^{n-1}}$$

となるような  $x \in [-1, 1]$  が存在しなければ、実は

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

であることを示せ.

**宿題 5.3.**  $(x, y)$  を  $\mathbb{R}^2$  の直交座標、 $(r, \theta)$  を

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

で定義される  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  の極座標とすると、次の問いに答えよ:

1. 関数  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、連鎖律を用いて  $\frac{\partial f}{\partial x}$  と  $\frac{\partial f}{\partial y}$  を  $\frac{\partial f}{\partial r}$  と  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$  で表せ.

2. さらに連鎖律を用いて、

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を  $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ 、 $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$  および  $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$  を用いて表せ.

3. 関数  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  が

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定義される時、 $\Delta f$  を直交座標と極座標の 2 通りの方法を用いて計算せよ.

## 数学演習 A

問題 6.1. Legendre 多項式  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  を Rodrigues の公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

で定義するとき、次の問いに答えよ:

1.  $P_n(1) = 1$  かつ  $P_n(-1) = (-1)^n$  であることを示せ.
2.  $(x^2 - 1)^n$  の二項展開を使って

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{(2^n) k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}$$

を示せ. 特に、 $P_n(x)$  は  $x$  に関する  $n$  次の多項式であり、初項の係数は

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

で与えられる.

3. 任意の実係数  $n$  次多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

に対して  $n + 1$  個の実数  $\{c_k\}_{k=0}^n$  が唯一つ存在して、

$$f(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + \cdots + c_0 P_0(x)$$

となることを示せ.

4. 部分積分を繰り返すことによって、 $m \neq n$  の時

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

となることを示せ.

5.  $(n - 1)$  次以下の任意の多項式  $f(x)$  に対して

$$\int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx = 0$$

となることを示せ.

6. 初項を比較することによって

$$P'_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

を示せ.

7. 部分積分によって

$$\int_{-1}^1 P'_{n+1}(x)P_n(x)dx = 2$$

を示せ. 従って、

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 = \frac{2}{2n+1}$$

である.

8.  $x$  に関する  $n$  次の多項式  $f(x)$  を  $n+1$  個の実数  $\{c_k\}_{k=0}^n$  を用いて

$$f(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + \cdots + c_0 P_0(x)$$

と表したとき、

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

であることを示せ.

9.  $n = 0, 1, \dots$  と  $k = 0, 1, \dots, n+1$  に対し実数  $a_{n,k}$  を

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k(x)$$

で定義したとき、

$$\frac{2}{2k+2} a_{n,k} = \frac{2}{2n+2} a_{k,n}$$

が成り立つことを示せ (ヒント :

$$\int_{-1}^1 (xP_n(x))P_k(x)dx = \int_{-1}^1 P_n(x)(xP_k(x))dx$$

を使え).

10.  $|k-n| > 1$  の時

$$a_{n,k} = 0$$

となることを示せ.

## 小テスト

**問題 7.1.**  $f(x, y) = xy$  で定義される関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を単位円周

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

に制限したもの

$$f|_{S^1}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

の極値を次の3通りの方法で求めよ：

1.  $S^1$  上の点は  $x \in [-1, 1]$  を用いて  $(x, \sqrt{1-x^2})$  または  $(x, -\sqrt{1-x^2})$  と表される。従って、 $f(x, \sqrt{1-x^2})$  と  $f(x, -\sqrt{1-x^2})$  の  $-1 \leq x \leq 1$  における最大値、最小値が求める極値である。
2.  $S^1$  上の点は  $\theta \in [0, 2\pi)$  を用いて  $(\cos \theta, \sin \theta)$  と表される。従って、 $f(\cos \theta, \sin \theta)$  の  $0 \leq \theta < 2\pi$  における最大値、最小値が求める極値である。
3. Lagrange の未定乗数  $\lambda$  を導入して

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

とおき、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

を解いて  $x$  と  $y$  を  $\lambda$  で表し、これを

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

に代入して  $\lambda$  を求めると、この時の  $f$  の値が  $f|_{S^1}$  の極値である。

## 数学演習 A

**問題 7.2.** 拘束条件

$$x^2 + y^4 = 1$$

の下で関数

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

の極値を求めよ。

問題 7.3. 定数  $a, b, c \in \mathbb{R}$  に対し 2 変数関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$$

で定義する時、以下の問いに答えよ：

1.  $f$  の Hesse 行列

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

を求めよ.

2.  $f$  は Hesse 行列を用いて

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \text{Hess}(f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ.

3. 直交行列

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\text{Hess}(f) = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$$

と表されると仮定すると、変数変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda X^2 + \mu Y^2)$$

となることを示せ.

4.  $\lambda$  と  $\mu$  がともに正の時、 $f(x, y)$  は  $x = y = 0$  で極小値を持つことを示せ.
5.  $\lambda$  と  $\mu$  がともに正の時、 $\det \text{Hess}(f) > 0$  かつ  $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$  となることを示せ.
6.  $\lambda$  と  $\mu$  がともに負の時、 $f(x, y)$  は  $x = y = 0$  で極大値を持つことを示せ.
7.  $\lambda$  と  $\mu$  がともに負の時、 $\det \text{Hess}(f) > 0$  かつ  $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$  となることを示せ.
8.  $\lambda\mu < 0$  の時、 $f(x, y)$  は  $x = y = 0$  で極値を持たないことを示せ.
9.  $\lambda\mu < 0$  の時、 $\det \text{Hess}(f) < 0$  となることを示せ.

2008年6月17日

## 小テスト

問題 8.1. 次の関数のグラフを描け：

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2$

2.  $f(x, y) = x^2 - y^2$

3.  $f(x, y) = -x^2 - y^2$

問題 8.2. 半開区間上の連続関数

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

で、最大値も最小値も持たないものの例を与えよ.

## 小テスト

### 問題 9.1. 関数

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$$

を  $\mathbb{R}$  まで連続に拡張したものを

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

とおくとき、次の問いに答えよ：

1.  $f(0)$  を求めよ.
2.  $f$  のグラフを描け.
3.  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  および  $f'''(0)$  を求めよ.
4.  $f$  の原点における Taylor 展開を求めよ.

### 問題 9.2. 半開区間 $[0, 1)$ 上の関数

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sin \frac{1}{1-x}$$

のグラフを描け.



## 期末試験予想問題

問題 10.1. 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$a_n = \frac{1}{n}$$

で定めるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

となることを  $\epsilon$ - $\delta$  論法で示したい. この問題に対する次の答えが正しいか間違っているかを答え、もし間違っている場合は間違いを指摘してどうすれば正しい答えになるかを述べよ:

任意の正数  $\epsilon$  に対して、 $\epsilon^{-1}$  より大きな自然数を1つ選んで  $N$  とおくと、 $N$  より大きな任意の自然数  $n$  に対して

$$|a_n - 0| < \epsilon$$

が成り立つ. 従って数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は0に収束する.

問題 10.2. 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$a_n = (-1)^n$$

で定めるとき、この数列が収束しないことを  $\epsilon$ - $\delta$  論法で示したい. この問題に対する次の答えが正しいか間違っているかを答え、もし間違っている場合は間違いを指摘してどうすれば正しい答えになるかを述べよ:

任意の実数  $\alpha$  と任意の正数  $\epsilon$  に対して、どんな自然数  $N$  を取っても、 $N$  より大きな任意の自然数  $n$  に対して

$$|a_n - \alpha| > \epsilon$$

が成り立つ. 従って数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束しない.

問題 10.3. 閉区間上の連続関数の列で、各点収束するが、極限が連続関数にならないようなものを与えよ.

問題 10.4. 非負の実軸  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  上定義された連続関数で、最大値も最小値も持たないようなものを与えよ.

問題 10.5. 1.  $y = \arcsin x$  とおく時、 $dy/dx$  を  $x$  の式で表せ.

2. 関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

の原点における Taylor 展開を求めよ.

3. 関数

$$g(x) = \arcsin x$$

の原点における Taylor 展開を求めよ.

**問題 10.6.** 指数関数と三角関数の関係に関する Euler の公式を示せ. ただし、三角関数や指数関数が Taylor 展開できることは仮定してよい.

**問題 10.7.** Euler の公式を使い、 $\log \sqrt{-1}$  を求めよ. ただし、これはただ1つには定まらない.

**問題 10.8.** 複素数  $z$  と  $w$  に対し

$$z^w = e^{w \log z}$$

と定義する. これは  $\log z$  に任意性があるのでただ1つには定まらないが、 $\log \sqrt{-1}$  をどう定義しても

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

は実数になることを示せ.

**問題 10.9.**  $\mathbb{R}^2$  上の3点  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  を通る2次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

はただ1つに決まることを示せ. また、この3点を通る3次関数は無数にあることを、例を具体的に構成することによって示せ.

**問題 10.10.** 5次の Chebyshev 多項式  $T_5(x)$  を求めよ. ただし、 $n$  次の Chebyshev 多項式は

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

で定義される.

**問題 10.11.** 連鎖律を用いて、

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta$$

で定義される極座標を用いて表示せよ.

**問題 10.12.** 拘束条件

$$x^4 + y^6 = 1$$

の下で関数

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

の極値を求めよ.

**問題 10.13.** 2変数関数

$$f(x, y) = x^2 \sin y$$

の1階偏導関数、2階偏導関数および極値を求めよ.

2008年7月8日

## 小テスト

問題 11.1. 関数

$$f(x) = \sqrt{2 + 3x}$$

について、次の問いに答えよ：

1.  $f(x)$  を  $x = 0$  の周りで Taylor 展開せよ.
2. 上で求めた Taylor 級数の収束半径を求めよ.

## 小テスト

問題 12.1.  $(x, y)$  を  $\mathbb{R}^2$  の直交座標とし、

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta$$

で定義される  $(r, \theta)$  を  $\mathbb{R}^2$  の極座標とする. 関数  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、次の問いに答えよ.

1. 連鎖律を用いて

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

を極座標で表せ.

2. ある自然数  $n$  が存在して、任意の実数  $\alpha$  に対して

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$$

が成り立つとき、

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n f(x, y)$$

となることを示せ.

3.  $f$  が多項式のとき、ある自然数  $n$  に対して

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n f(x, y)$$

となるための必要十分条件を求めよ.

## 小テスト

**問題 13.1.** 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を、円周率  $\pi$  を用いて

$$a_n = \frac{[10^n \pi]}{10^n}$$

で定めるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$$

となることを  $\epsilon$ - $\delta$  論法で示したい。この問題に対する次の答えが正しいか間違っているかを答え、もし間違っている場合は間違いを指摘してどうすれば正しい答えになるかを述べよ：

任意の正数  $\epsilon$  に対して、 $-\log_{10} \epsilon$  より大きな自然数を1つ選んで  $N$  とおくと、 $N$  より大きな任意の自然数  $n$  に対して

$$|a_n - \pi| > \epsilon$$

が成り立つ。従って数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\pi$  に収束する。

**問題 13.2.** 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$a_n = n$$

で定めるとき、この数列が収束しないことを  $\epsilon$ - $\delta$  論法で示したい。この問題に対する次の答えが正しいか間違っているかを答え、もし間違っている場合は間違いを指摘してどうすれば正しい答えになるかを述べよ：

任意の実数  $\alpha$  に対して  $\epsilon = 1$  ととれば、任意の自然数  $N$  に対して、

$$n = \max\{N, [\alpha] + 2\}$$

と取ると、 $n > N$  かつ

$$|a_n - \alpha| > \epsilon$$

が成り立つ。従って数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束しない。

**問題 13.3.** 閉区間上の微分可能関数の列で、各点収束するが、極限が微分可能にならないようなものを与えよ。

**問題 13.4.** 非負の実軸  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  上定義された連続関数で、最大値も最小値も持たないようなものを与えよ。

**問題 13.5.** ばねに働く力は、ばねの変位が小さいときには変位に比例するという Hooke の法則を、滑らかな関数は1次式で近似できるという原理に基づいて説明せよ。

問題 13.6. 1.  $y = \arctan x$  とおく時、 $dy/dx$  を  $x$  の式で表せ.

2. 関数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

の原点における Taylor 展開を求めよ.

3. 関数

$$g(x) = \arctan x$$

の原点における Taylor 展開を求めよ.

問題 13.7. 指数関数と三角関数の関係に関する Euler の公式を示せ. ただし、三角関数や指数関数が Taylor 展開できることは仮定してよい.

問題 13.8.  $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$  は実数になることを示せ.

問題 13.9.  $\mathbb{R}^2$  上の 3 点  $(-2, 3)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  を通る 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

はただ 1 つに決まることを示せ. また、この 3 点を通る 3 次関数は無数にあることを示せ.

問題 13.10. 6 次の Chebyshev 多項式  $T_6(x)$  を求めよ. ただし、 $n$  次の Chebyshev 多項式は

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

で定義される.

問題 13.11. 連鎖律を用いて、

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

で定義される極座標を用いて表示せよ.

問題 13.12. 拘束条件

$$x^4 + y^4 = 1$$

の下で関数

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

の極値を求めよ.

問題 13.13. 2 変数関数

$$f(x, y) = x^2 + \sin y$$

の 1 階偏導関数、2 階偏導関数および極値を求めよ.

## 期末試験

問題 14.1. 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$a_n = \frac{1}{n}$$

で定めるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

となることを  $\epsilon$ - $\delta$  論法で示したい. この問題に対する次の答えが正しいか間違っているかを答え、もし間違っている場合は間違いを指摘してどうすれば正しい答えになるかを述べよ:

任意の正数  $\epsilon$  に対して、 $\epsilon^{-1}$  より大きな自然数を1つ選んで  $N$  とおくと、 $N$  より大きな任意の自然数  $n$  に対して

$$|a_n - 0| < \epsilon$$

が成り立つ. 従って数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は0に収束する.

問題 14.2. 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$a_n = (-1)^n$$

で定めるとき、この数列が収束しないことを  $\epsilon$ - $\delta$  論法で示したい. この問題に対する次の答えが正しいか間違っているかを答え、もし間違っている場合は間違いを指摘してどうすれば正しい答えになるかを述べよ:

任意の実数  $\alpha$  に対して  $\epsilon = 1$  とおくと、どんな自然数  $N$  を取っても、 $N$  より大きな自然数  $n$  で

$$|a_n - \alpha| > \epsilon$$

となるものが存在する. 従って数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束しない.

問題 14.3. 閉区間上の連続関数の列で、各点収束するが、極限が連続関数にならないようなものを与えよ.

問題 14.4. 半開区間  $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$  上定義された連続関数で、最大値も最小値も持たないようなものを与えよ.

問題 14.5. 次の関数の原点における Taylor 展開を求めよ:

1.  $f(x) = (1+x)^5$ .
2.  $f(x) = \sinh x$ .
3.  $f(x) = \arcsin x$ .

問題 14.6. 指数関数と三角関数の関係に関する Euler の公式を示せ. ただし、三角関数や指数関数が Taylor 展開できることは仮定してよい.

**問題 14.7.** Euler の公式を使い、 $\log \sqrt{-1}$  を求めよ。ただし、これはただ1つには定まらない。

**問題 14.8.** 複素数  $z$  と  $w$  に対し

$$z^w = e^{w \log z}$$

と定義する。これは  $\log z$  に任意性があるのでただ1つには定まらないが、 $\log \sqrt{-1}$  をどう定義しても

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

は実数になることを示せ。

**問題 14.9.**  $\mathbb{R}^2$  上の3点  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  を通る2次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

はただ1つに決まることを示せ。また、この3点を通る3次関数は無数にあることを示せ。

**問題 14.10.** 3次の Chebyshev 多項式  $T_3(x)$  を求めよ。ただし、 $n$  次の Chebyshev 多項式は

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

で定義される。

**問題 14.11.** 連鎖律を用いて、

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta$$

で定義される極座標を用いて表示せよ。

**問題 14.12.** 拘束条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で関数

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

の極値を求めよ。

**問題 14.13.** 2変数関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x^2y$$

の1階偏導関数、2階偏導関数および極値を求めよ。