ホモロジー的ミラー対称性

植田一石

1 はじめに

ミラー対称性は超弦理論に由来する数学的な現象で、ある空間のシンプレクティック幾何学と別の空間の複素幾何学の間に不思議な関係がある事を指す。当初は Calabi-Yau 多様体のみを対象としていたが、その適用範囲は徐々に拡大されて、今では全ての複素多様体やシンプレクティック多様体に対して何らかの意味でミラーが存在するのでは無いかと思わせる勢いである。

ミラー対称性に関わる様々な現象に概念的な理解を与える事を目指して、1994 年に Kontsevich によって提出された予想がホモロジー的ミラー対称性であり、ミラーをなす多様体の対において、連接層の導来圏と Lagarnge 多様体のなす深谷圏の導来圏が同値である事を主張する。この予想は A_∞ 圏を空間と見てその幾何学を研究するという全く新しい視点を提供し、我々の空間概念を根底から覆す可能性を秘めている。提唱されてから 20 年以上の時を経て、ホモロジー的ミラー対称性は、複素幾何学とシンプレクティック幾何学を結びつけるのみならず、完全可積分系や結び目理論、幾何学的 Langlands 対応、クラスター代数などの幅広い数学と関わる巨大な分野に成長した。ここでは、ミラー対称性の歴史を簡潔に振り返った後、ホモロジー的ミラー対称性のいくつかの側面について概説したい。[1]

2 ミラー対称性

ミラー対称性の源流は、弦理論 [2] のトロイダルコンパクト化 [3] の研究の過程で発見された、弦が点粒子とは全く異なる仕方でこの世界を見ているという認識にまで遡ることができる [KY84, SS86]。半径 $2\pi R$ の円周 $T \cong \mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ 上を運動する自由粒子に対する、時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) = E\,\Psi(x) \tag{2.1}$$

の解は、運動量 $m \in \mathbb{Z}$ を用いて $\Psi(x) = \exp\left(\sqrt{-1}mx/R\right)$ と書かれ、その時のエネルギーは $E = m^2/R^2$ で与えられる。一方、T の上の古典的な弦の運動を記述するために、エネルギーとして汎関数

$$\operatorname{Map}(S^1, T) \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \int_{S^1} \left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2 \frac{d\theta}{2\pi} \tag{2.2}$$

を考えると、与えられた巻き数 $w \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(T)$ に於いてエネルギーを最小にする配位は $\gamma(\theta) = Rw\theta$ であり、その時のエネルギーは R^2w^2 で与えられる。T 上を運動する量子論的な弦は運動量と巻き数の両方を持ち、そのエネルギーは

$$E = \frac{m^2}{R^2} + R^2w^2 \tag{2.3}$$

で与えられる。ここで、半径 R を $1/R$ に置き換えると同時に運動量と巻き数を入れ替えると、弦のエネルギーは不変に保たれる事が分かる。この議論は、本質的に非相対論的である事や、弦の状態を記述するには運動量と巻き数以外にも、弦の振動モードを指定する無限個の自然数が必要である事などから不正確であるが、より精密に調べて

[1] この原稿は、東京大学大学院数理科学研究科における 2015 年度冬学期の講義録を加筆・修正したものである。

[2] 弦理論の教科書としては例えば [GSW87, Pol98b] がある。

[3] 弦理論におけるトロイダルコンパクト化とは、T を k 次元の実トーラスとし、M を $n-k$ 次元の多様体とした時に、直積 $T \times M$ 上で弦理論を考えることを指し、[AMRT10] で扱われているような数学におけるトロイダルコンパクト化と直接の関係はない。ここで n は自然数であり、通常は弦理論の臨界次元 (10 または 26) に取る。

も、半径 R の円周上の弦理論と半径 $1/R$ 上の円周上の弦理論は区別できないことが知られている。これは T 双対性と呼ばれ、次の 2 点が重要である：

- 点粒子の理論には無い弦理論特有の現象である.
- 古典論には無い量子論的な現象である.

さらに、T 双対変換 $R \mapsto 1/R$ の固定点 $R = 1$ ではゲージ対称性の拡大 (enhancement) と呼ばれる現象が起こるが、これは無限次元 Lie 環の頂点作用素代数を用いた実現にとって本質的である [4]。

より一般に、n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ と同型な離散部分群 $N \subset \mathbb{R}^n$ で割って得られるトーラスを $T := \mathbb{R}^n/N$ とおくと、T 上を運動する弦は、T の指標群 $M := \operatorname{Hom}(T, S^1) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ に値を取る運動量に加えて、$N \cong \pi_1(\mathbb{T})$ に値を取る巻き数を持ち、弦の力学は運動量と巻き数を入れ替えると同時にトーラス $T = \mathbb{R}^n/N$ と双対トーラス $\check{T} = (\mathbb{R}^n)^\vee/M$ を入れ替える操作によって不変である。言い換えると、弦理論にとってはトーラス T と双対トーラス $\check{T}$ は見分けがつかない。

超弦理論は 10 次元にのみ存在し、I 型超弦理論、IIA 型超弦理論、IIB 型超弦理論、$SO(32)$ 混成弦理論、$E_8 \times E_8$ 混成弦理論の 5 つに分類される。そのうちの 1 つである $E_8 \times E_8$ 混成弦理論を、実 4 次元の時空 $\mathbb{R}^4$ と複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体 M の直積 $\mathbb{R}^4 \times M$ の上で考えたものが、素粒子論の標準模型に近い模型を与えることが分かって、3 次元 Calabi-Yau 多様体上の弦理論の研究が盛んになった [5]。超弦理論の数学的に厳密な構成は未だ知られていないが、混成弦理論を 3 次元の Calabi-Yau 多様体上で考えたものは 2 次元の $(0,2)$ 超共形場理論を与え、II 型の超弦理論を 3 次元の Calabi-Yau 多様体上で考えたものは 2 次元の $(2,2)$ 超共形場理論を与えると期待されている。2 次元の $(2,2)$ 超共形場理論には、超共形代数に含まれる左向き (left-moving、数学の文献では左向きと右向きをそれぞれ正則及び反正則と呼ぶことが多い) $U(1)$ カレントに付随するスカラー場の符号を逆にする操作がある。そこで、任意の Calabi-Yau 多様体 M に対し、M 上の II 型超弦理論から定まる超共形場理論にこの操作を行って得られる超共形場理論が再び適当な Calabi-Yau 多様体 W から来るか、という事が自然に問題になった。この問いに対する答えが肯定的な時、W を M のミラー多様体 (mirror manifold) と呼ぶ。

超弦理論の数学的に厳密な定義が未だ知られていないので、ミラー対称性を数学的に定式化するには、超共形場理論よりも粗い対象で、任意の Calabi-Yau 多様体に対して数学的に厳密に定まるものを考える必要がある。そのような粗い情報の典型例は Hodge 数であり、これを用いて位相的ミラー対称性 (topological mirror symmetry) と呼ばれる予想が次のように定式化される：

予想 2.1. 任意の 3 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対し、ある 3 次元 Calabi-Yau 多様体 W が存在して、任意の $0 \le p, q \le 3$ に対して、M と W の Hodge 数の間に

$$h^{p,q}(M) = h^{p,3-q}(W) \tag{2.4}$$

という関係が成立する。

特に $h^{1,1}(M) = h^{1,2}(W)$ となるが、左辺は M の Kähler 類の変形の自由度の次元であり、右辺は W の複素構造の変形の自由度の次元であることに注意せよ。任意の Calabi-Yau 多様体は Kähler 類を定数倍する自由度を持つので、$h^{1,1}(M)$ は常に 1 以上であるが、変形を持たない Calabi-Yau 多様体が存在するので、$h^{1,2}(W)$ は 0 になり得る。従って、予想 2.1 はこのままでは成立しない。また、Calabi-Yau 多様体が単連結ならば、その Euler 数は $\chi = 2(h^{1,1} - h^{1,2})$ で与えられるので、ミラー対称性は Euler 数の符号を反転させる。

Calabi-Yau 多様体の例として直ちに思い付くのは、重み付き射影空間の超曲面の特異点解消である。素朴に考えると、こうして得られる Calabi-Yau 多様体は同次多項式の個数から来る大きな $h^{1,2}$ と、重み付き射影空間の Picard 群から来る小さな $h^{1,1}$ を持っていそうに思われるので、弦の理論家が 4 次元の重み付き射影空間内の超曲面として得られる 6000 個の 3 次元 Calabi-Yau 多様体に対してその Hodge 数をプロットしてみると、その中に位相的ミラー

[4] 弦理論のトロイダルコンパクト化と T 双対性に関する入門的な記述は、例えば [Pol98a, Chapter 8] を見よ。

[5] ここで 3 次元 Calabi-Yau 多様体とは、Ricci 曲率が零の 3 次元 Kähler 多様体を指す。これは、ホロノミー群が $SU(3)$ に含まれる実 6 次元の Riemann 多様体と言っても同じ事である。Calabi 予想の Yau による解決によって、自明な標準束を持つコンパクト Kähler 多様体は定数倍を除いて一意的な Ricci 平坦計量を持つ事に注意せよ。ホロノミー群は共変的に定数であるスピノルを通して時空の超対称性の大きさに関係する。$\mathbb{R}^4 \times M$ 上の $E_8 \times E_8$ 混成弦理論が素粒子論の標準模型に近い模型を与えるためには、ホロノミー群がぴったり $SU(3)$ と一致する必要があるが、この論説ではそれは仮定しない。

対 (すなわち、(2.4) を満たす Calabi-Yau 多様体の対 (M, W)) が数多く見つかった事は、代数幾何学者に驚きを持って迎えられた [6]。また、彼らが Hodge 数の計算に用いた Calabi-Yau/Landau-Ginzburg 対応や Vafa の公式は当時は数学的に正当化されておらず、それを理解するための努力はその後の発展の原動力となった [7]。位相的ミラー対称性に関して最も有名な結果は Batyrev ら [Bat94, BD96, BB96] によるものであり、Gorenstein トーリック Fano 多様体上のネフな直線束の完全交叉として得られる Calabi–Yau 多様体に対して予想 2.1 が成り立つ事を示した。

位相的ミラー対称性は一般型曲面の地誌学 [Per87] の Calabi–Yau 多様体における類似物であり、現在でも研究の続く深い問題だが、ミラー対称性に関わる予想の中では最も弱い。ミラー対称性が数学者に大きく注目されるきっかけになったのは、[CdlOGP91] において与えられた、$\mathbb{P}^4$ の 5 次超曲面の上の有理曲線の数え上げがそのミラー多様体の周期と関係するという驚異的な予言である。

与えられた代数多様体の上の与えられた次数の有理曲線の本数を数えることは、数え上げ幾何学 (enumerative geometry) と呼ばれる分野に属する古典的な問題である。$\mathbb{P}^3$ の滑らかな 3 次曲面が 27 本の直線を持つという事実は有名であるが、$\mathbb{P}^4$ の 5 次超曲面に関しては、Clemens [Cle87] による次の予想がある：

予想 2.2. 任意の正の自然数 d に対し、$\mathbb{P}^4$ の一般の 5 次超曲面の上の d 次の滑らかな有理曲線は高々有限個しか存在しない。

予想 2.2 は広く興味を持たれているが、現時点では成否は不明である。また、Lang の予想と両立しない事が知られている [Voi03]。予想 2.2 が正しいと仮定して、次数 d の滑らかな有理曲線の個数を n_d とおく。$n_1 = 2875$ は古典的であり、$n_2 = 609250$ は [Kat86] によって計算されていたが、1991 年の時点では n_3 以降の数は未知であった。[CdlOGP91] は n_d の母関数をミラー多様体の周期で表す公式を予想し、そこから導かれる n_d を $d \leq 10$ に対して具体的に計算した。これらの予言のうち、$n_3 = 317206375$ は [ES95] において、$n_4 = 242467530000$ は [Kon95a] において証明された。

一方、曲線の素朴な数え上げではなく、安定写像 (stable map) のモジュライ空間上の仮想基本類 (virtual fundamental class) における積分として、Gromov-Witten 不変量 (Gromov-Witten invariant) の概念が多くの人々の努力によって定式化された [8]。これによって未解決の予想 2.2 に伴う困難は回避され、古典的ミラー対称性 (classical mirror symmetry) を次のように定式化する事ができる：

予想 2.3. 任意の Calabi-Yau 多様体 X に対してある Calabi-Yau 多様体の退化する族 $\mathcal{Y} \to B$ が存在して、X の Gromov-Witten 不変量の母関数が $\mathcal{Y}$ の周期で具体的に記述される。

より正確には、古典的ミラー対称性は X の Gromov-Witten 不変量から決まる $H^2(X; \mathbb{C})$ 上の Hodge 構造の変形と、$\mathcal{Y}$ の定める B 上の Hodge 構造の変形の間の同型として定式化される。また、X の Gromov-Witten 不変量から決まる Frobenius 多様体と、$\mathcal{Y}$ の Hodge 構造の変形から決まる Frobenius 多様体の間の同型として定式化される事もある。この予想は、トーリック Fano 多様体の中のネフな直線束の完全交差として与えられる Calabi-Yau 多様体に対しては Givental [Giv96, Giv98] や Lian–Liu–Yau [LLY97] によって証明されたが、その証明はトーラス作用に関する同変コホモロジーの局所化に基いており、このような関係が存在する根源的な理由は謎のまま残された。

ミラー対称性の概念的な理解を目指して、Kontsevich [Kon95b] によって 1994 年の国際数学者会議で提案されたのが、次のホモロジー的ミラー対称性 (homological mirror symmetry) である：

予想 2.4. 任意の Calabi–Yau 多様体 X に対してある Calabi–Yau 多様体 Y が存在して，X の深谷圏の導来圏と Y の連接層の導来圏の間に強化三角圏 (enhanced triangulated category) の同値が存在する；

$$D^b \mathfrak{Fuk}\, X \cong D^b \operatorname{coh} Y. \tag{2.5}$$

(2.5) の左辺に現れる圏の対象は X の Lagrange 部分多様体で，射は Floer コホモロジーであるのに対し、右辺に現れる圏の対象は M 上の連接層であり，射は層のコホモロジーである。予想 2.4 は一見すると何の関係も無いこれ

[6] [CLS90, Fig. 1] にある印象的な図を見よ。
[7] Calabi–Yau/Landau–Ginzburg 対応に関する数学的な研究としては、例えば [Orl09, CR10, CR11, CIR14] やその参考文献を見よ。特に [Orl09] はホモロジー的ミラー対称性と関係が深い。また、Vafa の公式は 3 次元の McKay 対応 [Rei, Rei02] や弦理論的 Hodge 数 [Bat98]、軌道体量子コホモロジー [CR02, AGV08]、モチーフ積分 [DL99, Cra04] などの理論を生んだ。
[8] 例えば [CK99] の 7 章とその参考文献を見よ。

らの 2 つの圏の間に深い繋がりがある事を主張している点で驚異的であり、ミラー対称性に関わる様々な予想の中で最も強いものの一つと考えられている。最も簡単な楕円曲線の場合には、(2.5) は ϑ 関数の双線型関係式と密接に関連することが [Kon95b] で指摘され、それを踏まえて、強化三角圏の同値よりも弱い次数圏 (graded category) の同値が [PZ98] で証明された。次数圏の構造のみでは決まらない高次の Massey 積の比較については [Pol00] で議論されている。また、より一般の Abel 多様体に対しては，[KS01] や [Fuk02c] において部分的な結果が得られた。一方、これらとは全く違う画期的な手法によって、$\mathbb{P}^3$ の K3 超曲面に対する予想 2.4 が [Sei15] によって証明され、[She15, She15] によって一般次元の射影空間の Calabi–Yau 超曲面に拡張された。これらの結果は、特別な場合として楕円曲線に対する予想 2.4 の完全な解決を含んでいる。また、2 つの楕円曲線の直積として与えられるような Abel 曲面に対しては、それぞれの楕円曲線の場合に帰着する事で予想 2.4 が証明されている [AS10b] [9]。

Seidel の手法は、超曲面に対するホモロジー的ミラー予想を、入れ物の射影空間に対するホモロジー的ミラー予想に帰着していると理解することができる。入れ物としては射影空間だけではなく、より一般のトーリック Fano 多様体を考えることもできる。Calabi–Yau 多様体の場合と異なり、トーリック Fano 多様体のミラーは多様体ではなく Laurent 多項式であり、この場合のホモロジー的ミラー対称性の主張は次のようになる:

予想 2.5 ([Kon98, Sei01a])**.** 任意のトーリック Fano 多様体 M に対して、ある Laurent 多項式 W が存在して，M の連接層の導来圏は、W が定める Lefschetz ファイブレーションの深谷–Seidel 圏の導来圏と、強化三角圏として同値になる;

$$D^b \operatorname{coh} M \cong D^b \mathcal{F}(W). \tag{2.6}$$

予想 2.5 はトーリック Fano スタックや、Fano とは限らないトーリックスタックに対しても一般化することができる。Lefschetz ファイブレーションは Morse 関数のシンプレクティック幾何学における類似物である。Lefschetz ファイブレーションに対して，消滅サイクルを基底とする自由 Abel 群に交点数で 2 次形式を導入したものは Milnor 格子と呼ばれ，特異点論における重要な研究対象である。与えられた Lefschetz ファイブレーションに対してその Milnor 格子を具体的に記述するのは難しい問題である．Seidel は Kontsevich [Kon98] のアイデアに基づいて、Lefschetz ファイブレーションに対して，対象が消滅サイクルであり，射が Lagrange 交叉 Floer 複体で与えられるような A_∞ 圏を定義した [Sei01b]．これが深谷–Seidel 圏 (Fukaya–Seidel category) であり，その Grothendieck 群が Milnor 格子と同型になるという意味で，Milnor 格子の圏化 (categorification) を与えている．予想 2.5 は深谷–Seidel 圏に関する極めて非自明な主張であり，$\mathbb{P}^2$ と $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対しては [Sei01a] において、トーリック del Pezzo 曲面に対しては [Ued06] において、そして重み付き射影平面および一般の del Pezzo 曲面に対しては [AKO08, AKO06] において証明された。また、[UY13] ではダイマー模型 (dimer model) と呼ばれる組合せ論的な対象を用いることによって、トーリック del Pezzo 曲面をトーラスの任意の有限部分群で割って得られるようなトーリック Fano スタックに対して，予想 2.5 が証明された。このダイマー模型の理論を用いると、任意の 2 次元のトーリック Fano スタック X に対して、ある Lefschetz ファイブレーション W が存在して、導来圏の同値 (2.6) が成り立つことを示す事もできる [FU10] [10]。ダイマー模型は 2 次元に特有の対象であるが、その類似は高次元にも存在すると期待されている [FU14, FLS]。また、[NU12] では [Sei15] の手法と [She11] の結果を組み合わせて $\mathbb{P}^4$ の 5 次超曲面に対するホモロジー的ミラー対称性が証明されているが、その過程で一般次元の射影空間に対する予想 2.5 の証明も得られている。一方、予想 2.5 そのものではないが、それと密接に関連する結果が、[Abo06, Abo09] や [FLTZ11a, FLTZ11b] において得られている。

Kontsevich がホモロジー的ミラー対称性を提唱した翌年に、Polchinski は弦理論に含まれる D ブレーンと呼ばれる対象が Ramond-Ramond 荷を持つ BPS 状態であることを示した [Pol95]。これは超弦理論の第 2 革命 (the second superstring revolution) を代表する成果の 1 つであり、ブレーンと呼ばれる拡がった対象 (extended object) の研究を加速した。その流れで T 双対性とミラー対称性の関係が見直され、Strominger–Yau–Zaslow [SYZ96] によって次のような予想が提出された：

予想 2.6.

[9] この証明では縫合 Floer ホモロジー (quilted Floer homology) の理論を本質的に使うが、この理論に関しては [WW10] やその参考文献を見よ。

[10] ダイマー模型から構成した Lefschetz ファイブレーションが Laurent 多項式で表されるかどうかは現時点では不明なので、[FU10] の主張は予想 2.5 よりも弱い。

1. 任意の Calabi-Yau 多様体は特殊 Lagrange トーラスファイブレーションを持つ。

2. この特殊 Lagrange トーラスファイブレーションにおいて、各ファイバーを双対トーラスに置き換えることでミラー多様体が得られる。

3. ホモロジー的ミラー対称性は、この特殊 Lagrange トーラスファイブレーションのファイバーに沿ったある種の Fourier 変換によって実現される。

予想 2.6 は一般に SYZ 予想と呼ばれており、その正確な定式化と証明は Calabi–Yau 多様体の幾何学における中心的な問題の 1 つである。特殊 Lagrange 部分多様体は、正則体積形式の虚部の制限が消えるような Lagrange 部分多様体を指す。特殊 Lagrange 部分多様体は校正部分多様体 (calibrated submanifold) であり、従って Riemann 幾何の意味での極小部分多様体 (minimal submanifold) になる。この事から、特殊 Lagrange 部分多様体であるという条件は、単に Lagrange 部分多様体である事よりもずっと強い条件であることが分かる。Liouville–Arnold の定理により、Lagrange トーラスファイブレーションと完全可積分系はほぼ同値な概念であることに注意せよ。予想 2.6.1 は、任意の Calabi–Yau 多様体が完全可積分系の構造を持ち、しかもその保存量の等位面 (level set) は極小部分多様体である事を主張する。また、複素 2 次元においては、Calabi–Yau 多様体は超 Kähler 多様体であり、特殊 Lagrange 部分多様体と正則部分多様体は超 Kähler 回転によって結び付いている。この意味で、SYZ 予想は楕円 K3 曲面の理論の高次元化であり、Calabi–Yau 多様体に対するある種の構造定理を目指していると考える事ができる。また、予想 2.6.3 に現れる Fourier 変換は SYZ 変換とも呼ばれ、族の Floer コホモロジーと密接に関係する [11]。

ミラー対称性に関わる予想の強さは

$$\text{位相的ミラー予想} \Leftarrow \text{古典的ミラー予想} \Leftarrow \text{ホモロジー的ミラー予想} \Leftrightarrow \text{SYZ 予想}$$

であると考えられている。古典的ミラー対称性 (Frobenius 多様体の同型、もしくは Hodge 構造の (拡大) 変形空間の同型) から位相的ミラー対称性 (Hodge 数の対応) は直ちに従う。ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性が従うというのは、Kontsevich のそもそものプログラムであり、様々な重要な進歩があるが、現時点ではまだ未解決である [12]。ホモロジー的ミラー対称性があれば、点層のミラーとして Lagrange トーラスが得られ、それらがファイブレーションをなすであろうと期待するのは自然である。ファイバーとして単なる Lagrange 部分多様体ではなく特殊 Lagrange 部分多様体を取れるであろうという予想は、小林–Hitchin 対応 (Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理) のシンプレクティック幾何学における類似であり、Lagrange 部分多様体の安定性に関わる難問である。一方、予想 2.6.3 の主張から見て取れるように、SYZ 予想はホモロジー的ミラー予想を含んでいる。

ミラー対称性はまず Calabi–Yau 多様体に対して定式化され、後にトーリック Fano 多様体に拡張された。さらに、トーリックとは限らない Fano 多様体に対するミラー対称性も、トーリック退化や表現論などに関わる様々な文脈で議論されている [Giv97, EHX97, Rie08, GS15, Tel]。Fano 多様体に対するミラー対称性は、反正準因子との組 (いわゆる対数的 Calabi–Yau 多様体) の文脈で理解するのが正しいと思われる [Aur07, Aur09, GHK15]。一方、一般型の多様体に対してもホモロジー的ミラー対称性が成り立つべきであるというアイデアは、[HV00, HIV] を経て、Katzarkov らによって追求された [Kat07, KKOY09, GKR]。それを受けて、[Sei11] において種数 2 の曲線に対するホモロジー的ミラー対称性が証明され、[Efi12] において直ちに一般の種数に拡張された。また、コンパクトでない曲線に対しては、種数 0 の時に [AAE$^+$13] によって証明され、[Boc16] によって一般の種数に拡張された。後者の証明ではダイマー模型を本質的に使う。

[GP90] に於ける最初のミラー多様体の構成からも見て取れる様に、Calabi–Yau 多様体に対するミラー対称性は、Landau–Ginzburg 模型に対するミラー対称性と分かち難く結び付いてきた。Landau–Ginzburg 模型は超伝導の Ginzburg–Landau 理論 [13] に由来するが、ミラー対称性の文脈では、Kähler 多様体とその上の正則関数の組から

[11] 族の Floer コホモロジーに関しては、例えば [Fuk02b, Tu15, Aboa, Abob] などを見よ。

[12] ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性を導出するには、1. 強化三角圏から Frobenius 多様体ないしは [KM94] の意味のコホモロジー的場の理論 (cohomological field theory) を構成する、2. 1 によって深谷圏の導来圏から Gromow–Witten 不変量を得る、3. 1 を連接層の導来圏に適用して [CdlOGP92] らによる計算を再現する、の 3 つが必要である。このうち 1 に関しては、[Cos07, KKP08, KS09] などの仕事がある。深谷圏から Gromov–Witten 不変量を計算することに関しては、深谷圏の Hochschild コホモロジーと量子コホモロジーの環同型が [Kon95b, Sei02] などで予想され、[FOOO09, FOOO, Seib, GPS] などで研究されている。また、3 は斎藤恭司による原始形式の理論と密接に関連する [ST08]。

[13] 超伝導の Ginzburg–Landau 理論は 2 次相転移の Landau 理論を超伝導の記述に適用して得られる超伝導の現象論であり、Yang–Mills–Higgs 理論に於いてゲージ群を $U(1)$ に取ったものになっている。因みに、Yang–Mills 理論における BPS 方程式である Hermite Yang–Mills 方程式 (Hermitian Yang–Mills equation) の Yang–Mills–Higgs 理論における対応物が渦方程式 (vortex equation) である。

決まる作用汎関数によって指定され、$(2,2)$ の超対称性を持つ 2 次元の場の量子論を指す [14][15]。[GP90] の一般化である [Bat94, BD96, BB96] においてはトーリック幾何が前面に出て、Landau–Ginzburg 模型は表立っては登場しないが、入れ物のトーリック Fano 多様体のミラー対称性との関係を通して、Landau–Ginzburg 模型は再び顔を出す [16]。一方、[GP90] のもう 1 つの一般化である [BH93] においては、Landau–Ginzburg 模型が中心的な役割を果たす。これは歴史的にはトーリック幾何に基づくミラー多様体の構成に比べてあまり注目を集めて来なかったが、Gromov–Witten 理論の Landau–Ginzburg 模型における類似物 [17] の発展を受けて、近年活発に研究されている [18]。この場合の Landau–Ginzburg 模型は可逆多項式 (invertible polynomial) [19] で与えられ、ホモロジー的ミラー対称性の主張はおおよそ次のようになる：

予想 2.7. 任意の可逆多項式 f に対して、その転置を $\check{f}$ で表すと、次の強化三角圏の同値が存在する；

$$D^b \mathfrak{Fuk}\, f \cong \mathrm{hmf}(\check{f}). \tag{2.7}$$

(2.7) の左辺は f を摂動して得られる Lefschetz ファイブレーションの深谷–Seidel 圏の導来圏であり、右辺は適当な次数付けの下での $\check{f}$ の行列因子化 (matrix factorization) の圏である。行列因子化は完全交叉の上の Cohen–Macaulay 加群の研究において [Eis80] で導入された概念であり、Cohen–Macaulay 加群の安定圏 (stable category) の研究において有効に用いられた [20]。行列因子化のホモトピー圏は有界導来圏 (bounded derived category) の完全導来圏 (perfect derived category) による Verdier 商と同値になる [Buc87]。Landau–Ginzburg 模型における B 型ブレーンが行列因子化によって与えられるというアイデアは Kontsevich による [21]。単純特異点に対しては、予想 2.7 の左辺は [Sei01a, Proposition 3.4]、右辺は [KST07] によって対応する Dynkin 箙の表現の導来圏と同値である事が知られており、そこから予想 2.7 が従う。より一般に、A 型や D 型の多項式の Sebastian–Thom 和として得られる任意の可逆多項式に対しても予想 2.7 が成り立つ事が [FU11, FU13] で証明された。また、予想 2.7 に於いて、f として可逆多項式の代わりに尖点特異点 (cusp singularity) の定義多項式 $x^p + y^q + z^r + xyz$ を取ると、そのミラーは転置多項式ではなく $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点にそれぞれ位数が p, q および r の固定部分群を持つ滑らかな有理軌道体 $\mathbb{P}^1_{a,b,c}$ で与えられる事が [Tak10] で予想され、[Kea15] で証明された。ここで (p,q,r) は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ を満たす正の自然数の組である。これは [Ros10, TS15] や [Sei11] と関連が深い。また、ここでシンプレクティック幾何側と複素幾何側を入れ替えたものは [CHL] で研究されている。

特異点に対するミラー対称性としては、定義多項式が定める Lefschetz ファイブーレションの深谷–Seidel 圏ではなく、特異点を変形して得られる Liouville 領域の巻かれた深谷圏 (wrapped Fukaya category) を考える流儀もある。単純特異点に対しては [CU13, EL]、尖点特異点に対しては [Kea]、3 次元の通常 2 重点については [CPU] を見よ。

ミラー対称性に関する教科書として最も有名なものは [CK99] である。また、2000 年と 2002 年にクレイ数学研究所が主催したミラー対称性に関する春の学校の記録 [HKK⁺03, ABC⁺09] も参考になろう。ミラー対称性に関する論説としては [Hos99]、連接層の導来圏に関する論説としては [Kaw06a]、Lagrange 交叉 Floer 理論に関する論説としては [Ono06, Fuk11] がある。ホモロジー的ミラー対称性に関するレビューとしては [Fuk01, Fuk02a] や [Bal08]、[Por] がある。ミラー対称性とトロピカル幾何学の関係については、[Gro11]、SYZ 予想に関しては [Gro13] とその参考文献を見よ。また、[KS06] や [GS11] と関連して、ミラー対称性とクラスター代数の間に深い関係があることが明らかになりつつある [KS, GS15, GHKK, STWZ].

3 導来圏

ホモロジー的ミラー対称性は、強化三角圏を空間と考えて、その幾何学を研究するという斬新な見方を提供する。つまり、強化三角圏が幾何学的実体なのであって、それをある多様体の連接層の導来圏として実現するか、別の多

[14] 作用汎関数の具体的な表式については例えば [HKK⁺03, 13 章] を見よ。
[15] Landau-Ginzburg 模型は特異点論を中心とする代数幾何学と密接に関係することが 1980 年代の終わりに認識された [Mar90, VW89]。
[16] 例えば [Wit93] や [Giv95] を見よ。また、予想 2.5 に現れる Laurent 多項式も、代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ と組になって Landau–Ginzburg 模型を与える
[17] [FJR13, PV] やそれらの参考文献を見よ
[18] トーリック幾何に基づくミラー多様体の構成と、可逆多項式に基づくミラー多様体の構成の関係は興味深い問題である。これらを統一的に理解するための試みとしては、[Bor13] や [Cla] などがある。
[19] 可逆多項式は Delsarte 多項式 [Del95, Shi86] と実質的に同一の概念である。
[20] 行列因子化について書かれた教科書としては、例えば [Yos90] がある。
[21] 例えば [KL03] を見よ。

様体の深谷圏の導来圏として実現するか、あるいは Landau–Ginzburg 模型を用いて実現するかは、多様体に座標をどう入れるかのようなもので、本質的ではないというのである。

Abel 圏 (Abelian category) の導来圏 (derived category) は、複体のホモトピー圏を擬同型 (quasi-isomorphism) で局所化することによって得られる [22]。Abel 圏が十分な入射的対象を持つ (have enough injectives) ならば、その導来圏は入射的対象 (injective object) からなる複体のホモトピー圏と同値になる。導来圏はしばしば [Ver96][23] で導入された三角圏 (triangulated category) の言葉で記述されるが、写像錐の関手性の欠如 [24] や、導来圏が三角圏としては同値であるが Quillen の高次 K 群が同型でない Abel 圏の例がある事、それに三角圏としての構造だけでは生成元から導来圏が復元できない事などの様々な理由で、導来圏を定式化するための枠組みとしては不満足なものであると考えられて来た。コホモロジーを取ると情報が落ちるので、複体のまま取り扱うのが導来圏の哲学である。三角圏においては、対象は複体に格上げするものの、射はコホモロジーを取る (すなわち、複体の間の射として鎖写像のみを考え、ホモトピー同値な射は同一視する) 事が様々な不都合の原因である。これを解決する枠組みとしては微分次数圏や A_∞ 圏、安定 ∞ 圏などがあり、標数 0 の体上では同値な理論を与えることが知られている [25]。

これらの 3 つの理論のうちで、導入に際して最も予備知識が少なくて済むのが微分次数圏 (differential graded category) である。これは通常の圏の公理において、射の空間を単なる線形空間から線形空間の複体に格上げし、射の合成に Leibniz 則を課したものである。

微分次数圏の典型例は、次のように定義される複体の圏である。$\mathscr{A}$ を加法圏とする。$\mathscr{A}$ の複体とは、$\mathscr{A}$ の対象の列 $X := (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ と射 $d_X^i \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}\left(X^i, X^{i+1}\right)$ の列 $d_X := (d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ の組 $X^\bullet := (X, d_X)$ で、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $d_X^{i+1} \circ d_X^i = 0$ を満たすものを指す。複体 $X^\bullet$ と $Y^\bullet$ に対し、次数付きベクトル空間 $\hom(X,Y) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \hom^i\left(X^\bullet, Y^\bullet\right)$ を $\hom^i\left(X^\bullet, Y^\bullet\right) := \prod_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}\left(X^j, Y^{i+j}\right)$ で定義する。写像 $d = \left(d^i \colon \hom^i\left(X^\bullet, Y^\bullet\right) \to \hom^{i+1}\left(X^\bullet, Y^\bullet\right)\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ を、$\phi = \left(\phi^j \colon X^j \to Y^{j+i}\right)_{j\in\mathbb{Z}} \in \hom^i\left(X^\bullet, Y^\bullet\right)$ に対して

$$d^i\phi := \left(\left(d^i\phi\right)^j := d_Y^{j+i} \circ \phi^j - (-1)^i \phi^{j+1} \circ d_X^j \colon X^j \to Y^{j+i+1}\right)_{j\in\mathbb{Z}} \in \hom^{i+1}\left(X^\bullet, Y^\bullet\right) \tag{3.1}$$

で定義すると、これが微分になる (すなわち、$d^{i+1} \circ d^i = 0$ を満たす) ことが容易に分かる。射の合成は、$\phi \in \hom^i\left(X^\bullet, Y^\bullet\right)$ と $\psi \in \hom^j\left(Y^\bullet, Z^\bullet\right)$ に対し

$$\psi \circ \phi := \left(\psi^{k+i} \circ \phi^k \colon X^k \to Z^{i+k}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \hom^{i+j}\left(X^\bullet, Z^\bullet\right) \tag{3.2}$$

で定義される。射の微分と合成が Leibniz 則

$$d(\psi \circ \phi) = (d\psi) \circ \phi + (-1)^j \psi \circ (d\phi) \tag{3.3}$$

を満たすことは容易に分かる。

微分次数圏 $\mathscr{D}$ が与えられた時、対象を変えずに射の空間の 0 次のコホモロジーを取ることによって加法圏を作ることができるが、これを $\mathscr{D}$ のコホモロジー圏 (cohomology category) と呼び、$H^0(\mathscr{D})$ で表す。

任意の射が写像錐 (mapping cone) を持つ微分次数圏を前三角 (pretriangulated) と言う。捻れ複体 (twisted complex) を用いることによって、任意の微分次数圏は前三角微分次数圏に充満部分圏として埋め込むことができる [BK90]。前三角微分次数圏のホモトピー圏は自然に三角圏の構造を持つ。与えられた三角圏 $\mathscr{T}$ に対し、ホモトピー圏が $\mathscr{T}$ と三角圏として同値になるような微分次数圏 (もしくは A_∞ 圏、もしくは安定 ∞ 圏) を $\mathscr{T}$ の強化 (enhancement) と呼ぶ。導来圏を強化三角圏として扱うことで、前述の 3 つの困難は全て解消する (例えば [Kel06, Toë11] を見よ)。

A_∞ 圏 (A_∞-category) は、射の合成が整合的なホモトピーを除いて結合的である (associative up to coherent homotopy) ような微分次数圏の一般化である [26]。ホモトピーを除いて結合的であることと、整合的なホモトピーを除いて結合的であることの差が、微分次数圏からそのホモトピー圏に移った時に失われる情報である。A_∞ 圏では、

[22] 圏の局所化は環の局所化の自然な一般化である。唯一つの対象を持つ加法圏は、環と同値な概念であることに注意せよ。このことを指して、圏は複数の対象を持つ環 (rings with several objects) であるとも言う [Mit72]。この哲学に沿って、局所化だけでなく、加群や Hochschild コホモロジーなど、環に対する概念の多くが圏に対しても拡張される。

[23] これは Verdier による 1967 年の学位論文であるが、若干の編集を経て死後の 1996 年に出版された。

[24] 三角圏が関手的な写像錐を持てば、半単純 Abel 圏の充満部分圏になる [Ver96, Proposition 1.2.13]。

[25] 微分次数圏は A_∞ 圏の特別な場合である。また、与えられた A_∞ 圏と同値な微分次数圏は A_∞ 圏における米田の補題を用いて構成することができる [KS09, Section 6]。微分次数圏と安定 ∞ 圏の理論の同値性については [Coh] を見よ。

[26] A_∞ 圏に関する入門的な文献としては、例えば [Kel01, Kel02] がある。

射の高次の合成を考えることにより、この情報を回復する。A_∞ 圏は、射の微分と合成に加えて、一般には無限個の高次の合成を持ち、射の合成は結合律を満たさないが、コホモロジーのレベルでは結合律を満たしており、しかも結合律からのずれが射の高次の合成を用いて具体的に記述されている。微分次数圏に対する前三角性[27]や捻れ複体などの概念は A_∞ 圏に自然に拡張され、これらを用いて A_∞ 圏の導来圏が定義される。

微分次数圏のなす圏 dgcat は再び微分次数圏となり、A_∞ 圏のなす圏 A_∞-cat は再び A_∞ 圏となる。高次の合成が全て零であるような A_∞ 圏と微分次数圏は同一の概念であるので、dgcat は A_∞-cat の部分圏であるが、2 つの微分次数圏の間の A_∞-cat における射は dgcat における射よりもずっと多いので、埋め込み dgcat $\to$ A_∞-cat は充満 (full) ではない。

dgcat における射で dgcat における微分が消えるものを微分次数関手 (differential graded functor)、A_∞-cat における射で A_∞-cat における微分で消えるものを A_∞ 関手 (A_∞-functor) と呼ぶ。また、ホモトピー圏に同値を誘導する微分次数関手や A_∞ 関手を擬同値 (quasi-equivalence) と呼ぶ。H^0 (dgcat) では擬同値に逆関手が存在するとは限らないが、H^0 (A_∞-cat) では任意の擬同値に逆関手が存在する。この事実は、微分次数圏と比べた時の A_∞ 圏の利点の 1 つである。

微分が零であるような A_∞ 圏を極小モデル (minimal model) と言う[28]。任意の A_∞ 圏に対し、A_∞-cat においてそれと擬同値な微分次数圏と極小モデルが存在する。微分次数圏の範囲では、たとえ任意の対象の間の射の空間のコホモロジーが有限次元であっても、擬同値な微分次数圏で任意の対象の間の射の空間が有限次元になるようなものが存在するとは限らない。A_∞ 圏においては、極小モデルを取ることによって、擬同値な A_∞ 圏で射の空間が有限次元になるものを構成できる。この事実も、微分次数圏と比べた時の A_∞ 圏の利点の 1 つである。高次の合成はこのために支払わなければならない代償であり、$\hom(X, Y)$ の有限次元性を、無限個の高次の合成によって購っている。

擬同値の逆関手や極小モデルはホモロジー的摂動論 (homological perturbation theory) を用いて構成される。ホモロジー的摂動論に関しては例えば [Hue] やその参考文献を見よ。

微分次数圏と極小モデルは A_∞ 圏における両極端であるが、これらが同時に満たされる時、すなわち、微分と高次の合成の両方が零である時、A_∞ 圏は単に次数付き圏 (graded category) になる。次数付き圏に擬同値な A_∞ 圏は形式的 (formal) と言われる。

特異点論において有限決定性 (finite determinacy) と呼ばれる概念があり、正則関数の孤立臨界点の同型類は、十分高いジェットで決まることを指す [Mat68, Tou68]。これと同様に、十分高い次数の合成までで A_∞ 圏の擬同値類が決まってしまう時、その A_∞ 圏は有限決定性を持つ (finitely determined) と言う。有限決定性の鍵は Hochschild コホモロジー[29]の有限次元性である。

A_∞ 構造の概念は [Sta63] により導入され、ループ空間の特徴付けに用いられた。それによると、CW 複体 X が脱ループ化 (deloop) できる[30]ための必要十分条件は、X が A_∞ 空間であることである。A_∞ 空間は、[May72] において導入されたオペラッド (operad) の概念を用いると、Stasheff 結合多面体 (Stasheff associahedra) からなる位相的オペラッド (topological operad) の上の代数 (algebra) として定義することができる。この位相的オペラッドの最高次の鎖を取ることによって、標準微分次数 A_∞ オペラッド (the standard differential graded A_∞-operad) が得られる。標準微分次数 A_∞ オペラッド上の代数が A_∞ 代数である。標準微分次数 A_∞ オペラッドは結合的オペラッド (associative operad) の自由分解 (free resolution) としても理解することができる [Mar96]。

オペラッドに関しては、結合代数の Hochschild 複体が小円盤オペラッド (little disk operad) 上の代数になるという Deligne 予想 (Deligne conjecture) が重要である。Deligne 予想の証明については [Tam] を、一般化については [Lur, Section 5.3] とその参考文献を見よ。これは [Kon03] で証明され、Poisson 多様体の変形量子化に応用された Kontsevich 形式性 (Kontsevich formality) と密接に関係する [KS00, DTT09]。

有限決定性と Kontsevich 形式性は種数 2 の曲線に対するホモロジー的ミラー対称性の証明において有効に用いられた [Sei11]。

A_∞ 圏はホモトピー論的なアイデアに基づく微分次数圏の柔軟かつ洗練された一般化であるが、安定 ∞ 圏 (stable

[27]前三角 A_∞ 圏に関しては例えば [BLM08] やその参考文献を見よ。
[28]A_∞ 圏の極小モデルは、Sullivan の de Rham ホモトピー理論における微分次数環の極小モデルとは異なる概念である。
[29]これは特異点論における Jacobi 環 (Milnor 環とも呼ばれる) と対応する。
[30]すなわち、ある Y が存在して基点付きループ空間 ΩY とホモトピー同値になる

∞-category) はホモトピー論的を更に前面に出した導来圏の定式化を与える [31]。∞ 圏 (∞-category) は $(1,\infty)$ 圏 ($(1,\infty)$-category) とも呼ばれ、高次の射が全て可逆であるような高次の圏 (higher category) を指す。∞ 圏には位相圏 (topological category)、単体強化圏 (simplicially enriched category)、Segal 圏 (Segal category)、準圏 (quasicateogry) などの様々なモデルが知られている。∞ 圏のホモトピー圏を取ることによって、高次の情報を取り除いた通常の意味の圏を得ることができる。圏の局所化は ∞ 圏が現れる典型的な状況であり、複体のホモトピー圏を擬同型で局所化して得られる導来圏はこれに該当する。

圏 $\mathscr{C}$ とその上の弱同値 (weak equivalence) と呼ばれる射の集まり $\mathscr{W}$ が与えられた時 [32]、$\mathscr{C}$ の $\mathscr{W}$ による局所化 (localization) $\mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ は、$\mathscr{W}$ の元を同型に移すような $\mathscr{C}$ からの関手が一意的に経由するような圏として定義される。Dwyer–Kan [DK80] の単体的局所化 (simplicial localization) は組 $(\mathscr{C},\mathscr{W})$ から単体強化圏 $L(\mathscr{C},\mathscr{W})$ を与える手法であり、この単体強化圏のホモトピー圏として通常の局所化を得ることができる ; $\mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}] \cong \operatorname{Ho} L(\mathscr{C},\mathscr{W})$。局所化された圏 $\mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ は $\mathscr{C}$ と同じ対象を持つが、$\mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ における射を具体的に記述するのは一般に困難である。弱同値 $\mathscr{W}$ が分数算 (calculs of fraction) を持てば状況は少しだけ改善されるが、本質的な進歩は模圏 (model category) によってもたらされる。これはホモトピー論における構成の抽象化として Quillen によって導入された概念であり、ホモロジー代数のある意味での非線形化である。模圏は弱同値 $\mathscr{W}$ に加えてファイブレーション (fibration)、余ファイブレーション (cofibration)、及び関手的因子化 (functorial factorization) と呼ばれる余分の構造を持ち、さらにこれらの構造には、局所化された圏における射の具体的な記述を可能にするような強い公理が課される [33]。

これらの公理には完備性 (completeness) と余完備性 (cocompleteness)、すなわち任意の極限 (limit) 及び余極限 (colimit) の存在が含まれており、特に空図式 (empty diagram) に対する余極限および極限として、始対象 (initial object) および終対象 (terminal object) が定義される。始対象から終対象には一意的な射があるが、これが同型の時に圏は点付き (pointed) と呼ばれる。点付きでない圏 $\mathscr{C}$ に対しては、終対象 $*$ の下圏 [34]$\mathscr{C}_* := \mathscr{C}_{*/}$ を考えることによって、標準的に点付き圏を構成することができる [35]。

点付き ∞ 圏 $\mathscr{C}$ の三角 (triangle) とは、

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\
* \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

の形の図式を指す。(3.4) が引き戻し図式である時、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を完全三角 (exact triangle) と呼び、f を g の核 (kernel) と呼ぶ。これと双対に、(3.4) が押し出し図式である時、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を余完全三角 (coexact triangle) と呼び、g を f の余核 (cokernel) と呼ぶ。任意の射が核と余核を持ち、しかも完全三角と余完全三角が一致するような点付き ∞ 圏が安定 ∞ 圏 (stable ∞-category) である。これは $\Sigma X := * \coprod_X *$ で定まる懸垂関手 Σ (または $\Omega X := * \times_X *$ で定まるループ関手 Ω) が ∞ 圏の自己同値になることと同値であり、'安定' という言葉はここに由来する。安定 ∞ 圏の対象 X に対し

$$
X[n] := \begin{cases} \Sigma^n(X) & n \geq 0, \\ \Omega^{-n}(X) & n < 0 \end{cases}
\tag{3.5}
$$

と書く。安定 ∞ 圏のホモトピー圏は Verdier の意味の三角圏になる [36]。三角圏と比較した時の安定 ∞ 圏の特徴の 1 つは、安定 ∞ 圏は ∞ 圏に条件を付け加えたものであり、構造を付け加えたものではない事にある。

∞ 圏の間の関手が有限の極限と可換である時、左完全 (left exact) と言う。同様に、∞ 圏の間の関手が有限の余極限と可換である時、右完全 (right exact) と言う。左完全かつ右完全な関手は完全 (exact) と言う。安定 ∞ 圏に対

[31] ∞ 圏については [Lur09]、安定 ∞ 圏については [Lur] 及びそれらの参考文献を見よ。

[32] 圏 $\mathscr{C}$ 上の弱同値とは、$\mathscr{C}$ の部分圏 $\mathscr{W}$ で、全ての同型を含み (特に、$\mathscr{C}$ の全ての対象は $\mathscr{W}$ の対象である)、2-out-of-3 性 (two-out-of-three property, すなわち任意の図式 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し、$f, g, g \circ f$ のうち 2 つが $\mathscr{W}$ に含まれていれば残りの 1 つも $\mathscr{W}$ に含まれている) を満たすものを指す。

[33] 与えられた圏と弱同値の組に対し、そこにファイブレーションと余ファイブレーションを付け加えて模圏を構成する事は一般に自明でない問題である。また、それが可能である場合にも、ファイブレーションや余ファイブレーションの付け加え方は一意的ではない。

[34] 圏 $\mathscr{C}$ および $\mathscr{C}$ の対象 S に対し、S の下圏 (under category または coslice category) とは、対象が $\mathscr{C}$ の射 $S \to X$ で、射が S の下の可換図式であるような圏 $\mathscr{C}_{S/}$ を指すのであった。

[35] 位相空間の圏は終対象を持つが、始対象を持たないので模圏にならない。一方、点付き位相空間のなす圏は模圏になる。

[36] 例えば [Lur] を見よ。また、[Hov99, Chapter 7] も参照のこと

し、右完全性、左完全性及び完全性は同値な概念である。安定 ∞ 圏を対象とし、完全関手を射とするような $\mathfrak{Cat}_\infty$ の部分圏を $\mathfrak{Cat}_\infty^{\mathrm{Ex}}$ と書く。標数 0 の体 k に対し、k 上の安定 ∞ 圏の概念が自然に定義される。k 上の安定 ∞ 圏のなす ∞ 圏は、k 上の dg 圏のなす圏を森田同値で局所化して得られる ∞ 圏と同値になる [37]。

4 A_∞ 代数

この節では、符号と次数付けの問題を忘れる為に、標数 2 の体 k 上で考える。この節の目標は、弱 A_∞ 代数とテンソル余代数上の余微分が同値な概念である事の解説である [38]。

k 上のベクトル空間 A と線形写像 $m\colon A\otimes A\to A$ 及び $e\colon k\to A$ からなる 3 つ組 (A,m,e) であって、図式

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

が可換であり、

$$A\cong k\otimes A\xrightarrow{e\otimes\mathrm{id}}A\otimes A\xrightarrow{m}A \tag{4.2}$$

と

$$A\cong k\otimes A\xrightarrow{e\otimes\mathrm{id}}A\otimes A\xrightarrow{m}A \tag{4.3}$$

が恒等写像になるものを k 代数 (k-algebra) と呼ぶのであった。この時、m を A の積 (multiplication)、e を単位元 (unit) と呼ぶ。図式 (4.1) の可換性は A の結合律 (associativity) である。k 代数 (A,m,e) と (A',m',e') に対し、図式

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ A'\otimes A' \arrow[r, "m'"] & A' \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

及び

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ k \arrow[r, "e'"] & A' \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

を可換にするような線形写像 $\varphi\colon A\to A'$ を (A,m,e) から (A',m',e') への k 代数の準同型 (homomorphism) と呼ぶ。k 代数を対象とし、k 代数の準同型を射とするような圏を k 代数の圏と呼び、alg_k で表す。また、図式

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\partial+\partial\otimes\mathrm{id}"'] & A \arrow[d, "\partial"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

を可換にするような線形写像 $\partial\colon A\to A$ を A 上の導分 (derivation) と呼ぶ。

k 代数 A に対してその下部構造としてのベクトル空間を対応させる忘却関手 (forgetful functor) を $\mathrm{fgt}\colon \mathrm{alg}_k\to\vec{t}_k$ とおく。これは本質的全射 (essentially surjective) かつ忠実 (faithful) であるが、充満 (full) ではない。ベクトル空間 V に対して、直和 $TV\coloneqq\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V^{\otimes n}$ に積 $TV\otimes TV\to TV$ を

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)\otimes(w_1\otimes\cdots\otimes w_n)\mapsto v_1\otimes\cdots\otimes v_m\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_n \tag{4.7}$$

[37] [Coh] を見よ。
[38] テンソル余代数上の余微分は、非可換形式スキーム上の奇ベクトル場 (odd vector field) と解釈できる。これについては [KS09] 及びその参考文献を見よ。

で入れたものを V 上の自由代数 (free algebra) と呼び、$\mathrm{free}(V)$ で表す[39]。ベクトル空間 V から V' への線形写像 $\varphi\colon V \to V'$ に対して $T\varphi\colon TV \to TV'$ を $T\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \coloneqq \varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_n)$ で定めると、これは k 代数の準同型になる。従って、ベクトル空間 V に対してテンソル代数 TV を対応させるような関手 $\mathrm{free}\colon \vec{t}_k \to \mathrm{alg}_k$ が定まるが、これは忘却関手 fgt の左随伴関手 (left adjoint functor) になっている；

$$\mathrm{Hom}_{\vec{t}_k}(V, \mathrm{fgt}(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}_k}(\mathrm{free}(V), A). \tag{4.8}$$

随伴関係 (4.8) は次の普遍写像性質 (universal mapping property) と同値である；任意の線形写像 $f\colon V \to A$ に対し、代数の準同型 $\widetilde{f}\colon \mathrm{free}(V) \to A$ が一意的に存在して、f は埋め込み写像 $\varphi_V\colon V \hookrightarrow \mathrm{free}(V)$ を一意的に経由する．

代数の公理を双対化することで余代数の概念を得る。k 余代数 (k-coalgebra) はベクトル空間 C と線形写像 $\Delta\colon C \to C \otimes C$ 及び $\epsilon\colon C \to k$ からなる 3 つ組 (C, Δ, ϵ) で、図式

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

の可換性と、

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}} k \otimes C \cong C \tag{4.10}$$

及び

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \epsilon} k \otimes C \cong C \tag{4.11}$$

が恒等写像に等しいという条件を満たすものを指す。この時、Δ を余積 (coproduct)、ϵ を余単位元 (counit) と呼ぶ。また、図式 (4.9) の可換性を余結合律 (coassociativity) と言う。代数の場合と同様に、余積及び余単位元と可換な線形写像を k 余代数の準同型と呼び、k 余代数を対象として、k 余代数の準同型を射とするような圏を Coalg_k で表す。余代数 C に対し、

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \delta + \delta \otimes \mathrm{id}"] \\ C \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

を可換にするような線形写像 $\delta\colon C \to C$ を C 上の余導分 (coderivation) と呼ぶ。また、$\delta \circ \delta = 0$ を満たすような余導分を余微分 (codifferential) と呼ぶ。

任意のベクトル空間 V に対し、直和 $TV \coloneqq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ は

$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots v_n) \tag{4.13}$$

で定まる写像 $\Delta\colon TV \to TV \otimes TV$ を余積とし、直和成分 $k \cong V^{\otimes 0} \subset TV \coloneqq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes}$ への射影 ϵ を余単位元とする余代数の構造を持つが、これを V 上のテンソル余代数 (tensor coalgebra) と呼ぶ。

余代数は、ある自然数 n が存在して $\Delta_n\colon C \to C^{\otimes n}$ が 0 である時、余冪零 (conilpotent) と呼ばれる。余冪零な余代数の帰納極限で表わされるような余代数を帰余冪零 (ind-colinpotent) と呼ぶ。ベクトル空間 V に対して V 上のテンソル余代数 $C(V)$ を対応させる関手は、帰余冪零余代数の圏からベクトル空間の圏への忘却関手の右随伴関手である [Pri10, Remark 3.12][40]。

[39] 自由代数はテンソル代数 (tensor algebra) と呼ばれることもある。

[40] 自由代数 $\mathrm{free}(V)$ の下部構造としてのベクトル空間が直和 $TV = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ で与えられる事から、余自由代数 $\mathrm{cofree}(V)$ の下部構造としては直積 $\widehat{T}V \coloneqq \prod_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ を取れば良いように思われるが、テンソル余代数 $TV \subset \widehat{T}V$ の余積 (4.13) が $\widehat{T}V \to \widehat{T} \otimes \widehat{T}$ には拡張されないので、この安直な考えは正しくない。余自由代数の構成については例えば [Haz03] を見よ。

V をベクトル空間とし、$\delta\colon TV \to TV$ をテンソル余代数 TV 上の余微分とする。直和分解 $TV \coloneqq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V^{\otimes i}$ に付随する射影を $\pi\colon TV \to V$ とおき、合成写像 $\mathfrak{m} \coloneqq \pi\circ\delta\colon TV \to V$ の $V^{\otimes n} \subset TV$ への制限を

$$\mathfrak{m}_n\colon V^{\otimes n} \to V \tag{4.14}$$

と書くと、図式 (4.12) の可換性から、余導分 δ は写像の列 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によって

$$\delta(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-m} v_1\otimes\cdots\otimes v_i\otimes\mathfrak{m}_m(v_{i+1}\otimes\cdots\otimes v_{i+m})\otimes v_{i+m+1}\otimes\cdots\otimes v_n \tag{4.15}$$

で一意的に定まる。ここで、(4.15) の右辺の総和記号の中身は $V^{\otimes(n-m+1)} \subset TV$ の元である。この事から、余導分 δ が余微分であるための必要十分条件は任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の $v_1\otimes\cdots\otimes v_n \in V^{\otimes n}$ に対して

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-m} \mathfrak{m}_{n-m+1}(v_1\otimes\cdots\otimes v_i\otimes\mathfrak{m}_m(v_{i+1}\otimes\cdots\otimes v_{i+m})\otimes v_{i+m+1}\otimes\cdots\otimes v_n) = 0 \tag{4.16}$$

が成り立つことである。(4.16) を A_∞ 関係式 (A_∞-relation) と呼び、ベクトル空間 V と写像の列 $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の組 $(V,(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ で、(4.16) を満たすものを弱 A_∞ 代数 (weak A_∞-algebra) と呼ぶ。弱 A_∞ 代数が更に条件 $\mathfrak{m}_0 = 0$ を満たす時、A_∞ 代数 (A_∞-algebra) と呼ぶ。A_∞ 代数の場合に、低い n に対する A_∞ 関係式 (4.16) を具体的に書き下すと

$$\mathfrak{m}_1(\mathfrak{m}_1(x)) = 0, \tag{4.17}$$

$$\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_1(x)\otimes y) + \mathfrak{m}_2(x\otimes\mathfrak{m}_1(y)) + \mathfrak{m}_1(\mathfrak{m}_2(x\otimes y)) = 0, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}_3(\mathfrak{m}_1(x)\otimes y\otimes z) + \mathfrak{m}_3(x\otimes\mathfrak{m}_1(y)\otimes z) + \mathfrak{m}_3(x\otimes y\otimes\mathfrak{m}_1(z))\\ &\qquad+\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_2(x\otimes y)\otimes z) + \mathfrak{m}_2(x\otimes\mathfrak{m}_2(y\otimes z)) + \mathfrak{m}_1(\mathfrak{m}_3(x\otimes y\otimes z)) = 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

となる。(4.17) は $\mathfrak{m}_1$ が微分であることを意味し、(4.18) は積 $\mathfrak{m}_2$ の微分 $\mathfrak{m}_1$ に関する Leibniz 則である。(4.19) は $\mathfrak{m}_3 = 0$ の時には $\mathfrak{m}_2$ の結合律を与える。$\mathfrak{m}_3 \neq 0$ の時には $\mathfrak{m}_2$ は結合的ではないので、一般には A_∞ 圏は圏にならない [41]。しかし、Leibniz 則 (4.18) によって $\mathfrak{m}_2$ は $\mathfrak{m}_1$ に関するコホモロジー群 $H^*(V,\mathfrak{m}_1) \coloneqq \operatorname{Ker}\mathfrak{m}_1/\operatorname{Im}\mathfrak{m}_1$ に積 $[\mathfrak{m}_2]\colon H^*(V,\mathfrak{m}_1)\otimes H^*(V,\mathfrak{m}_1) \to H^*(V,\mathfrak{m}_1)$ を引き起こし、(4.19) はこの積が結合的であることを保証する。言い換えると、$\mathfrak{m}_2$ はホモトピーを除いて結合的であり、$\mathfrak{m}_3$ はそのホモトピーを記述している。さらに、$\mathfrak{m}_3$ は高次の整合性条件をホモトピーを除いて満たしており、そのホモトピーが $\mathfrak{m}_4$ で記述され、…、という連鎖が無限に続く。

5　導来代数幾何学

強化三角圏は加法的 (あるいは線形) な理論であるが、非線形な対象である代数多様体の導来版を考えることもできる。その出発点は代数多様体を可換環の圏 calg から集合の圏 set への関手と見る事である。与えられた代数多様体から新しい代数多様体を作る典型的な方法としては、切る (すなわち、関数の零点を取る) 操作と、割る (同値関係による商を取る) 操作がある。関数 $f\colon X \to \mathbb{A}^1$ の零点は図式

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

のファイバー積であり、同値関係による商は図式 $S \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ の余等化子 (coequalizer) である。前者は座標環のレベルではテンソル積に対応するが、テンソル積が左完全でない事が、横断的 (transversal) でない場合に問題を引き起こす。後者の典型例は群作用による商であり、しばしばスキームでは表現できない。前者の困難は関手の定義域を calg から単体的可換環 (simplicial commutative ring) の圏 scalg に取り替えることによって解消される。一方、関手の値

[41] 一般の A_∞ 圏が圏ではない事は、任意の微分次数圏が圏である事と対照的である。

域を亜群 (groupoid) に取り替えることによって群による商を常に表現可能にするのがスタック (stack) の理論である。しかし、余等化子より一般の余極限 (colimit) を取り扱うためには、高次の圏における亜群の対応物である ∞ 亜群 (∞-groupoid) を考えた方が都合が良い。Grothendieck のホモトピー仮説 (homotopy hypothesis) を念頭に置いて、∞ 亜群のモデルとして単体的集合の圏 sset を取り、scalg から sset への関手で適当な条件を満たすものとして導来代数多様体を定義する。こうして得られる導来代数多様体の圏は、極限や余極限が自由に取れる柔軟な枠組みを提供する。導来代数幾何学に関する概説としては例えば [Toë09, Toë14] を見よ。

代表的な導来代数多様体としては、代数多様体 X のループ空間 $LX \coloneqq \operatorname{Map}(S^1, X) = X \times_{X \times X} X$ が挙げられる。これは $\mathcal{O}_X$ の Hochschild 複体を $\mathcal{O}_X$ 上の微分次数代数と見たもののスペクトルである。S^1 同変な Hochschild コホモロジーが巡回コホモロジーである事と、代数多様体の巡回コホモロジーが de Rham コホモロジーである事から、代数多様体上の $\mathcal{D}$ 加群はそのループ空間上の S^1 同変な準連接層の言葉で記述される [BZN12, TV15]。また、スタックのループ空間も同様に定義され、慣性スタック (inertia stack) の導来版と見ることができる。

古典的な代数多様体にしか興味が無い人にとっての導来代数幾何学は、代数方程式の整数解にしか興味が無い人にとっての複素代数幾何学のようなものである。結論に導来代数多様体が現れないにも関わらず、自然な理解の為に導来代数幾何学が有効に用いられる例としては、幾何学的表現論への応用 [BZN13] が挙げられる。

ミラー対称性においては種々のモジュライ空間が中心的な役割を果たす。モジュライ空間はしばしば方程式の零点を同値関係で割って得られるので、導来代数幾何学的な取り扱いを行うのが自然である。モジュライ空間を導来スタックとして構成することで、代数多様体やスキームの範囲でモジュライ問題を考えた時に生じる様々な困難が解消されるという哲学を、隠れた滑らかさの原理 (hidden smoothness principle) と呼ぶ [42]。また、モジュライ空間の局所理論の微分 Lie 環による記述も、導来代数幾何の枠組みで自然に理解される [Man02, Hin01, Lur10]。

6 複素幾何学とシンプレクティック幾何学

m 次元多様体 M と群 G、それに G から $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ への準同型が与えられた時、M の枠束 TM の構造群 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ の G への簡約を M の G 構造 (G-structure) と呼ぶ。例えば、$\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})^+$ 構造は向きと同値であり、$O(m)$ 構造は Riemann 計量と同値である。また、与えられた G 構造が $\mathbb{R}^m$ の自然な G 構造と局所的に同型な時、積分可能 (integrable) と言う。向きはいつでも積分可能であり、Riemann 構造が積分可能であるための必要十分条件は曲率テンソルが 0 になる事である。

複素一般線形群 (complex general linear group) とシンプレクティック群 (symplectic group) は行列 $J_{2n} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \coloneqq \left\{ g \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \;\middle|\; g^{-1} J_{2n} g = J_{2n} \right\}, \tag{6.1}$$

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \coloneqq \left\{ g \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \;\middle|\; g^{T} J_{2n} g = J_{2n} \right\} \tag{6.2}$$

で定義される。積分可能な $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 構造をシンプレクティック構造 (symplectic structure) と呼び、積分可能な $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 構造を複素構造 (complex structure) と呼ぶ。偶数次元多様体に $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 構造を与えることは全ての点で非退化な 2 次微分形式 ω を与えることと同値であり、$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 構造を与えることは接束 TM の自己準同型 $J \in \operatorname{End}(TM)$ で $J^2 = -\mathrm{id}_{TM}$ を満たすものを与えることと同値である [43]。$J f_* = f_* J$ を満たす微分同相写像は双正則写像 (biholomorphic map) と呼ばれ、$f^* \omega = \omega$ を満たす微分同相写像はシンプレクティック同相写像 (symplectomorphism) と呼ばれる。また、シンプレクティックベクトル空間の開集合の間のシンプレクティック同相写像は特に正準変換 (canonical transformation) と呼ばれる。複素多様体は複素ベクトル空間の開集合を双正則写像で貼り合わせて得られる多様体であり、シンプレクティック多様体はシンプレクティックベクトル空間の開集合を正準変換

[42] 藤原一宏, 〈 現代数学の土壌 〉ガロア理論, 数学のたのしみ, 13 巻, 日本評論社, pp. 109–121 では Galois 理論を隠れた対称性 (hidden symmetry) に喩えているが、隠れた滑らかさも隠れた対称性に少し似ている。隠れた対称性は自発的に破れた対称性 (spontaneously broken symmetry) とも呼ばれ、理論物理学における重要な原理である。隠れた対称性を直接見るには高エネルギーが必要であり、隠れた滑らかさを直接見るには高次圏が必要である。

[43] 積分可能とは限らない $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 構造を概複素構造 (almost complex structure) と呼ぶ。積分可能とは限らない $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 構造に対する特別の呼称はない。

で貼り合わせて得られる多様体である。$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 構造の積分可能性は ω が閉形式である事と同値であり (Darboux の定理)、$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 構造の積分可能性は Nijenhuis テンソルが消えることと同値である (Newlander-Nirenberg の定理)。

複素幾何学とシンプレクティック幾何学は一見すると全く違う種類の幾何学であるが、ある意味では非常によく似ている [44]。どちらも偶数次元であり、実多様体をある意味で「2 重に」したものだと思える [45]。複素多様体の典型例は接束であり、シンプレクティック多様体の典型例は余接束である。ミラー対称性はこれらの 2 つの幾何学の間の関係を与える。

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})\cap O(2n)=U(n) \tag{6.3}$$

なので、$U(n)$ 構造は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 構造と $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 構造を引き起こすが、この $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 構造と $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 構造が共に積分可能である時、この $U(n)$ 構造を Kähler 構造 (Kähler structure) と呼ぶ。(6.3) において、任意の 2 つの共通部分は自動的に残りの 1 つに含まれるが、これは Kähler 多様体において、複素構造、シンプレクティック構造、Riemann 構造のうちの任意の 2 つは

$$g(V,W)=\omega(V,JW) \tag{6.4}$$

によって残りの 1 つを定めることと対応している。

7 解析力学

解析力学 (analytical mechanics) には大きく分けて Lagrange 形式 (Lagrangian formalism) と Hamilton 形式 (Hamiltonian formalism) の 2 種類がある。Lagrange 形式の解析力学においては、系は配置空間 (configuration space) と呼ばれる多様体 N と、その接束 TN 上の Lagrange 関数 (Lagrangian) と呼ばれる関数 $L(q,v)$ によって指定される。ここで q は N の局所座標であり、v は q に対応する TN のファイバー方向の座標である。系の時間発展は、N の経路空間 (path space) $\mathscr{P}N \coloneqq \{\gamma\colon [0,1]\to N\}$ における作用汎関数 (action functional)

$$S\colon \mathscr{P}N\to\mathbb{R},\quad \gamma\mapsto\int L(\gamma,\dot\gamma)dt \tag{7.1}$$

の停留点として定義され、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L(q,v)}{\partial v}\right|_{v=\dot q}\right)-\left.\frac{\partial L(q,v)}{\partial q}\right|_{v=\dot q}=0 \tag{7.2}$$

によって特徴付けられる。一方、Hailton 形式の解析力学においては、系はシンプレクティック多様体 (M,ω) と M 上の Hamilton 関数 (Hamiltonian) と呼ばれる関数 $H(p,q)$ によって指定される。ここで、(p,q) は M の Darboux 座標である。系の時間発展は H の生成する Hamilton ベクトル場 (Hamiltonian vector field)

$$X_H\coloneqq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{7.3}$$

の積分曲線 (integral curve) として定義され、作用汎関数

$$S=\int(pdq-Hdt) \tag{7.4}$$

の停留点として特徴付けられる。

Lagrange 関数を Legendre 変換して得られる T^*N 上の関数

$$p\coloneqq\frac{\partial L(q,v)}{\partial v},\quad H(q,p)\coloneqq p\cdot v-L \tag{7.5}$$

[44] symplectic という単語は、ラテン語を起源とする complex という単語の構成要素 'com' と 'plexus' を対応するギリシャ語の 'sym' と 'plectikos' に置き換えて、Weyl が創ったのであった。

[45] さらに、これらの 2 つの幾何を統一的に扱うための枠組みとして、一般化された複素構造 (generalized complex structure) の概念が Hitchin によって導入された。これについては例えば [Hit11] を見よ。

を Hamilton 関数に取れば、Lagrange 形式の解析力学は Hamilton 形式に書き直すことができる [46]。この事と直接関わるわけではないが、Legendre 変換はミラー対称性において重要な役割を果たす。

8 Liouville–Arnold の定理

Hamilton 系が保存量を持てば、それを Darboux 座標の一部として取ることによって、系の次元が実質的に 2 つ下がる。保存量が複数ある時に、それらを同時に Darboux 座標の一部として取れるためには、それらが互いに Poisson 可換かつ関数的に独立でなくてはならない。ただし、関数 $f_1, \dots, f_k$ が関数的に独立 (functionally independent) であるとは、$df_1, \dots, df_k$ が稠密な部分集合で一次独立になる事を指す。Poisson 可換かつ関数的に独立な保存量の最大個数は次元の半分を超えないが、これがぴったり次元の半分になるような Hamilton 系を完全可積分系と呼ぶ。

$\pi \coloneqq (f_1, \dots, f_n) \colon X \to \mathbb{R}^n$ を完全可積分系の保存量が定める写像とし、$b \in \mathbb{R}^n$ をその正則値とする。π のファイバーにはこれらの保存量に付随する Hamilton 流によって自然に $\mathbb{R}^n$ の作用が入り、この作用に関して等質空間になる。$\mathbb{R}^n$ のコンパクトかつ連結な等質空間はトーラスに限られるので、π のファイバーがコンパクトかつ連結であればトーラスになる。π の像を B と置き、正則値の集合を $B^{\mathrm{sm}} \subset B$ と置く。π が固有写像であり、しかも全てのファイバーが連結であれば、Ehresmann のファイブレーション定理により、$\pi|_{\pi^{-1}(B^{\mathrm{sm}})} \colon \pi^{-1}(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$ はトーラスをファイバーとするファイバー束になる。このファイバー束のファイバーの接空間は保存量の生成する Hamilton ベクトル場で張られているが、保存量の個数が全空間の次元の半分で、しかもこれらの Hamilton ベクトル場は互いに可換なので、ファイバーは Lagrange 部分多様体になる。B^{sm} の十分小さな開集合 U と U 上での π の自明化を取って $\pi|_{\pi^{-1}(U)} \colon \pi^{-1}(U) \to U$ を射影 $\pi_1 \colon U \times L \to U$ と同一視する。$H_1(L; \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 上の順序基底 $(\alpha_i)_{i=1}^n$ と、各 α_i を代表する L のサイクル C_i、それに U の基点 b_0 を任意に取って固定する。任意の $b \in U$ に対し、b_0 から b に至る U 上の道 $\gamma \colon [0,1] \to U$, $\gamma(0) = b_0$, $\gamma(1) = b$ を任意に取ると、$\gamma([0,1]) \times C_i$ は $U \times L$ の 2-cycle を定める。この 2-cycle 上の積分

$$x_i(b) \coloneqq \int_{\gamma([0,1]) \times C_i} \omega \tag{8.1}$$

は、b と基底 $(\alpha_i)_{i=1}^n$ にしか依らない (ω が閉形式なので γ の取り方に依らず、$\omega|_L$ が 0 なので α_i の代表元 C_i の取り方に依らない)。こうして定まる関数 $(x_i)_{i=1}^n \colon U \to \mathbb{R}^n$ は U の座標を与えるが、これを U の作用座標 (action coordinate) と呼ぶ。この作用座標に付随する $\mathbb{R}^n$ の Hamilton 作用は、$\mathbb{R}^n$ の自然な格子 $\mathbb{Z}^n$ を固定部分群に持つので、L の基点 l_0 を任意に取って固定すれば、各ファイバー $\pi^{-1}(b)$ と $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の同一視を引き起こす。こうして得られるファイバーの座標を角座標 (angle coordinate) と呼ぶ。さらに、系のもともとの Hamilton 関数は作用座標のみの関数であり、

- 正則な等位集合がコンパクトかつ連結成分の時、それはトーラスであり、
- このトーラスには作用・角座標と呼ばれる特別な座標が入って、
- 系の時間発展は作用座標に関しては定数であり、角座標に関しては線形になる

ことが分かるが、これを Liouville-Arnold の定理と呼ぶ。すなわち、完全可積分系は Lagrange トーラスファイバー束とほぼ同値な概念である。

9 トロピカルアファイン多様体

適当な行列 $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{R})$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ によって

$$f(x) = Ax + b \tag{9.1}$$

[46] シンプレクティック多様体が常に余接束であるとは限らないので、Hamilton 形式は Lagrange 形式に比べて自由度が大きい。一方、シンプレクティック多様体 (M, ω) が Lagrange 部分多様体 L を持てば、M における L の管状近傍は L の余接束 T^*L とシンプレクティック同相である (Weinstein 近傍定理 (Weinstein neighborhood theorem))。

と表わされる関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をアファイン関数 (affine function) と呼ぶ。ここで $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ の時に、f をトロピカルアファイン関数 (tropical affine function) と呼び、$A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ かつ $b \in \mathbb{Z}^n$ の時に、f を整アファイン関数 (integral affine function) と呼ぶ [47]。変換関数がアファイン関数であるような多様体はアファイン多様体 (affine manifold) と呼ばれる。トロピカルアファイン多様体や整アファイン多様体も同様に定義される。接束の接続をアファイン接続 (affine connection) と呼ぶが、アファイン多様体は、捩れのない平坦なアファイン接続を持つ多様体として特徴付けられる。 また、トロピカルアファイン多様体 B^{sm} に対し、その上のトロピカルアファイン関数のなす層 $\mathrm{Aff}_{B^{\mathrm{sm}}}$ は、接束の $\mathbb{Z}$ 格子 $T^{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}} \subset TB^{\mathrm{sm}}$ を局所定数層とみなしたものの定数層 $\mathbb{R}$ による拡大になっている;

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathrm{Aff}_{B^{\mathrm{sm}}} \to T^{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}} \to 0. \tag{9.2}$$

逆に、接束の $\mathbb{Z}$ 格子 $T^{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}} \subset TB^{\mathrm{sm}}$ とその $\mathbb{R}$ による拡大 $\mathrm{Aff}_{B^{\mathrm{sm}}}$ が与えられれば、$\mathrm{Aff}_{B^{\mathrm{sm}}}$ をトロピカルアファイン関数の層にするようなトロピカルアファイン構造が唯一つ定まる。

完全可積分系が与えられた時、作用座標の任意性は、$H_1(L;\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 上の順序基底と U の基点 b_0 の取り換えの分だけある。作用座標に対し、前者は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$、後者は $\mathbb{R}^n$ の平行移動で作用するので、この任意性はトロピカルアファイン変換群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の作用で与えられる。これは B^{sm} を開集合で覆った時、座標変換がトロピカルアファイン変換になる事を示しているので、B^{sm} にはトロピカルアファイン構造が入る。角座標の任意性は、本質的に $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ の自明化の任意性であるが、これは切断の取り方の自由度と一致する。

トロピカルアファイン多様体 B^{sm} に対し、整接束 $T^{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}} \subset T$ の双対束 $T^*_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$ が定まり、これによる商としてトーラスファイバー束 $X(B^{\mathrm{sm}}) \coloneqq T^*B^{\mathrm{sm}}/T^*_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$ が定まる。$X(B^{\mathrm{sm}})$ と $\pi^{-1}(B^{\mathrm{sm}})$ がファイバーを保つシンプレクティック同相写像で移り合うための必要十分条件は、$\pi|_{\pi^{-1}(B^{\mathrm{sm}})}$ が切断を持つことである。

$\pi|_{\pi^{-1}(B^{\mathrm{sm}})}$ が切断を持たない時の $\pi^{-1}(B^{\mathrm{sm}})$ は、各開集合 U_i 上で切断を取り、$U_i \cap U_j$ 上でそれらを貼り合わせて得られる。U_i 上の自明化によって U_j の切断を見たものは $U_i \cap U_j$ 上の Lagrange 切断になり、$U_i \cap U_j$ 上の閉 1 次微分形式に対応する。この閉 1 次微分形式を f_{ij} と書くと、$U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で $\alpha_{ijk} \coloneqq f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$ はトロピカルアファイン関数になる (微分すると $T^*_{\mathbb{Z}}(U_i \cap U_j \cap U_k)$ の定数切断になる)。$\{\alpha_{ijk}\}_{i,j,k}$ は Čech 余輪体 (cocycle) になる。また、f_{ij} には定数を加える任意性があるが、これは余境界 (coboundary) になる。従って、M 上のトロピカルアファイン関数のなす層を Aff で表すと、B^{sm} 上の Lagrange トーラスファイバー束のファイバーを保つシンプレクティック同相による同値類は、層係数コホモロジー $H^2(B^{\mathrm{sm}}, \mathrm{Aff})$ によって分類される [Dui80]。

10 Floer コホモロジーと深谷圏

周期解の存在は力学系の中心問題の 1 つである。任意のコンパクトなシンプレクティック多様体 (M,ω) に対し、M 上の C^∞ 関数全体を渡る臨界点の個数の下限を $c_M \coloneqq \inf_{f \in C^\infty(M)} \#\,\mathrm{Crit}(f)$ とおくと、M 上の任意の周期 Hamilton 系は c_M 個以上の固定点を持つ事を Arnold が予想した。この予想の拡張として Arnold-Givental 予想 (Arnold-Givental conjecture) があり、次を主張する：

予想 10.1. (M,ω) をコンパクトなシンプレクティック多様体とし、L を M のコンパクトな Lagrange 部分多様体とする。時間に依存する Hamilton 関数 $H\colon M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し、その生成する流れを $\psi\colon M \times [0,1] \to M$ とおく。$\psi_1 \coloneqq \psi(-,t)$ による L の像 $\psi_1(L)$ と L が横断的に交わると仮定すると、$\#(L \cap \psi_1(L)) \geq \mathrm{rank}\, H^*(L;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である。

Arnold-Givental 予想を $(M \times M, \pi_1^*\omega_M - \pi_2^*\omega_M)$ の対角集合と (id, ψ_1) に適用すると、弱い Arnold 予想 (コンパクトなシンプレクティック多様体 M 上の周期 Hamilton 系の全ての固定点が非退化ならば、固定点の個数は $\mathrm{rank}\, H^*(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 以上である) が従う。

Lagrange 交叉 Floer コホモロジーは、道の空間 $\Omega(L_0,L_1) \coloneqq \{\ell\colon [0,1] \to M \mid \ell(0) \in L_0, \ell(1) \in L_1\}$ の不変被覆 $\Omega(L_0,L_1)^\sim$ の上の、作用関数

$$\mathcal{A}(\ell) \coloneqq \int_{[0,1]\times[0,1]} \gamma^*\omega \tag{10.1}$$

[47] ここでのトロピカルアファイン関数の事を整アファイン関数と呼ぶことも多い。

を Morse 関数とする Morse 理論である。ここで、$\Omega(L_0, L_1)$ の各連結成分に対し基点 ℓ_0 を 1 つ取って固定し、$\ell \in \Omega(L_0, L_1)$ に対し、ℓ_0 から ℓ への道を $\gamma\colon [0,1] \to \Omega(L_0, L_1)$ とおいた。ω が閉形式なので、Stokes の定理から、$\mathcal{A}$ は γ の取り方に依らずに $\Omega(L_0, L_1)^{\sim}$ 上の関数を定める。

(M, ω) に整合的な概複素構造を入れると、これは M の Riemann 計量 g_M を定める。$\ell \in \Omega(L_0, L_1)$ に対し $T_\ell \Omega(L_0, L_1) = \Gamma(\ell^* TM; T_{\ell(0)} L_0, T_{\ell(1)} L_1)$ であり、その元 V, W に対して

$$g_{\Omega(L_0,L_1)}(V, W) \coloneqq \int_0^1 g_M(V(t), W(t)) dt \tag{10.2}$$

と定義すると、これは $\Omega(L_0, L_1)$ の計量を与える。

Gromov による重要な観察は、$\mathcal{A}$ の勾配流の軌跡が概正則写像になることである。実際、$\ell \in \Omega(L_0, L_1)$ と $V \in T_\ell(\Omega(L_0, L_1)) \cong \Gamma(\ell^* TM; T_{\ell(0)} L_0, T_{\ell(1)} L_1)$ に対し、$\ell_s = \exp_{\ell(t)}(sV(t))$ とおくと、

$$d\mathcal{A}(V) = \int_0^1 \omega\left(V, \frac{\partial \ell}{\partial t}\right) dt \tag{10.3}$$

$$= -\int_0^1 \omega\left(\frac{\partial \ell}{\partial t}, V\right) dt \tag{10.4}$$

$$= -\int_0^1 g_M\left(J_M\left(\frac{\partial \ell}{\partial t}\right), V\right) dt \tag{10.5}$$

$$= g_{\Omega(L_0,L_1)}\left(-J_M\left(\frac{\partial \ell}{\partial t}\right), V\right) \tag{10.6}$$

すなわち

$$(\operatorname{grad} \mathcal{A})_\ell = -J_M\left(\frac{\partial \ell}{\partial t}\right) \tag{10.7}$$

となる。従って、$\gamma\colon \mathbb{R} \to \Omega(L_0, L_1)$ が $\operatorname{grad} \mathcal{A}$ の積分曲線であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = -J_M\left(\frac{\partial \ell}{\partial t}\right) \tag{10.8}$$

である。γ を $\Sigma \coloneqq \left\{ t + \sqrt{-1}s \in \mathbb{C} \;\middle|\; s \in [0,1],\ t \in \mathbb{R} \right\}$ から M への写像と見て、これを書き換えると

$$-\gamma_* \circ J_\Sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -J_M \circ \gamma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{10.9}$$

すなわち

$$\gamma_* \circ J_\Sigma = J_M \circ \gamma_* \tag{10.10}$$

である。

$\mathcal{A}$ の臨界点は L_0 と L_1 の共通部分 $L_0 \cap L_1$ への定数関数である。コンパクトな Lagrange 部分多様体 L_0 と L_1 が横断的に交われば、共通部分 $L_0 \cap L_1$ は有限個の点からなる。$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の Novikov 体 (Novikov field) を

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lim_{i\to\infty} \lambda_i \to \infty \right\} \tag{10.11}$$

で定義し、$L_0 \cap L_1$ を自由基底とする Λ 上の自由加群に

$$\mathfrak{m}_1(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} \sum_{[\varphi] \in \overline{\mathcal{M}}_2(L_0, L_1; p, q)} T^{\langle [\varphi], \omega \rangle} q \tag{10.12}$$

で微分を入れたものを $\mathrm{CF}^*(L_0, L_1)$ と書いて、Lagrange 交叉 Floer 複体 (Lagrangian intersection Floer complex) と呼ぶ。ここで T は Novikov 体の不定元であり、$\overline{\mathcal{M}}_2(L_0, L_1; p, q)$ は Σ から M への概正則写像のモジュライ空間の安定コンパクト化である。$\langle [\varphi], \omega \rangle$ は $[\varphi]$ の代表する $\pi_2(M, L_0 \cap L_1)$ の元と $\omega \in H^2(M, L_0 \cap L_1)$ の対合であり、

概正則写像のエネルギー (energy) を与える。$\overline{\mathcal{M}}_2(L_0, L_1; p, q)$ の仮想次元 (virtual dimension) は指数定理から計算されるが、これが 0 になるようなモジュライ空間の連結成分のみについて和を取る。また、必要であれば方程式に適当な摂動を加える事で、仮想次元と真の次元が一致するようにしておく。Gromov のコンパクト性定理から、エネルギーの上限が指定されたモジュライ空間はコンパクトになるので、(10.12) の右辺は Novikov 体の元としてきちんと定義される。複体の次数付けは Lagrange 交叉の Maslov 指数 (Maslov index) で与えられ、一般には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値を取る。これを $\mathbb{Z}$ に持ち上げるにはシンプレクティック多様体と Lagrange 部分多様体の両方に次数付け (grading) と呼ばれる余分の構造を付加する必要がある。

適当な条件の下で $\mathfrak{m}_1 \circ \mathfrak{m}_1 = 0$ となり、そのコホモロジー $\mathrm{HF}^*(L_0, L_1) := \operatorname{Ker} \mathfrak{m}_1 / \operatorname{Im} \mathfrak{m}_1$ を Lagrange 交叉 Floer コホモロジー (Lagrangian intersection Floer cohomology) と呼ぶ。Lagrange 交叉 Floer コホモロジーは Hamilton 同相写像 $\phi\colon M \to M$ に対する不変性

$$\mathrm{HF}(L_1, L_2) \cong \mathrm{HF}(L_1, \phi(L_2)) \tag{10.13}$$

を持ち、$\phi(L)$ と L が横断的に交わる時に L の Λ 係数の常コホモロジー (ordinary cohomology) を再現する；

$$\mathrm{HF}^*(L, \phi(L); \Lambda) \cong H^*(L; \Lambda). \tag{10.14}$$

Arnold-Givental 予想はこれらの性質から直ちに従う。

深谷 [Fuk93] は与えられたシンプレクティック多様体 M に対し、M の Lagrange 部分多様体を対象とし、Lagrange 交叉 Floer 複体を射の空間とするような A_∞ 圏を考えることを提案した [48]。この圏における高次の積は点付き円盤からの概正則写像の数え上げによって定義される。これが深谷圏 (Fukaya category) であり、Kontsevich [Kon95b] によって直ちにホモロジー的ミラー対称性の定式化に使われた [49]。

11 Seidel のプログラム

コンパクトなシンプレクティック多様体の深谷圏を計算するには、Lagrange 多様体に境界を持つ概正則円盤の数え上げをしなければならないが、楕円曲線の場合に ϑ 関数が現れることからも分かるように、この数え上げはしばしば無限和になり、具体的に実行するのは極めて困難である。

射影多様体の深谷圏の取り扱いを可能にするのが Seidel のプログラムであり、次の 2 つのステップから成る：

- 射影多様体の深谷圏はアファイン多様体の深谷圏の変形である。
- アファイン多様体の深谷圏は Picard-Lefschetz 理論によって組合せ論的に計算できる。

Seidel はシンプレクティック多様体 X が射影多様体である時に、X の超平面切断 D を X から取り除いてアファイン多様体にすることを考えた。アファイン多様体は完全シンプレクティック多様体であり、コンパクトなシンプレクティック多様体に比べて扱い易いと期待される。射影多様体 X において、超平面切断 D はシンプレクティック形式 ω の Poincaré 双対であることから、(10.12) における T の指数 $\langle [\varphi], \omega \rangle$ は $[\varphi]$ と D の交点数になる。従って、Floer 複体は Novikov 体よりも小さい収束冪級数環 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\![T]\!]$ 上で定義され、しかも T に 0 を代入することで $X \setminus D$ における Floer 複体を再現する。これは X の深谷圏が $X \setminus D$ の深谷圏の変形である事を示しており、変形理論を用いて深谷圏を調べる道を開いた [Sei02]。

シンプレクティック幾何学における強力な道具として、Lefschetz ファイブレーション (Lefschetz fibration) の概念がある。Lefschetz ファイブレーションは Morse 関数の複素幾何における類似物であり、非退化な [50] 臨界点を許すようなファイバー束の拡張概念である。Donaldson の有名な仕事 [Don96] により、任意のシンプレクティック多様体は、適当に爆発すれば Lefschetz ファイブレーションの構造を持つ事が知られている。Seidel は、全空間が完全シンプレクティック多様体であるような Lefschetz ファイブレーション $\pi\colon M \to S$ に対する深谷圏の変種 $\mathcal{F}(\pi)$ を導入し

[48] 深谷圏において、$\mathfrak{m}_1$ のコホモロジーにおける積 $[\mathfrak{m}_2]$ のみを考えて高次の積を無視したものは、Donaldson–Fukaya 圏 (Donaldson–Fukaya category) と呼ばれる事もある。

[49] 深谷圏の導入のもともとの動機の 1 つは、境界付き 4 次元多様体に対する Donaldson 理論に現れる、3 次元多様体のインスタントン Floer コホモロジーを、境界付き 3 次元多様体に一般化することであった。これは Atiyah–Floer 予想と関係が深い。

[50] 適当に座標を取れば $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, $(z_1, \ldots, z_d) \mapsto z_1^2 + \cdots + z_d^2$ と表せるような臨界点を非退化 (non-degenerate) と呼ぶ。

て、M の深谷圏 $\mathcal{F}(M)$ が $\mathcal{F}(\pi)$ によって記述されることを示した。これを Picard–Lefschetz 理論 (Picard–Lefschetz theory) と呼ぶ [Sei08]。この圏 $\mathcal{F}(\pi)$ はしばしば深谷-Seidel 圏と呼ばれ、原型を [Kon98] に見ることができるが、その源流は少なくとも Cecotti–Vafa[CV93] などの弦の理論家の仕事にまで遡る。深谷–Seidel 圏の定義にはいくつかの流儀があるが、その中の 1 つとして、π の消滅サイクルの特基底 $(C_1, \dots, C_n)$ を対象の集合とするような、π のファイバー $M_z \coloneqq \pi^{-1}(z)$ の深谷圏 $\mathcal{F}(M_z)$ の有向部分圏 (directed subcategory) とする定義がある [Sei01b, Sei01a] [51]。この定義では、$\mathcal{F}(\pi)$ の対象の集合は有限の全順序集合 $(C_1, \dots, C_n)$ であり、射は $\mathcal{F}(M_z)$ における射を用いて

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\pi)}(C_i, C_j) = \begin{cases} \mathrm{id}_{C_i} & i = j, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(M_z)}(C_i, C_j) & i < j, \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{11.1}$$

で与えられる。(11.1) から明らかなように、深谷–Seidel 圏の積 $\mathfrak{m}_k$ は、$k > n$ の時は 0 であり、$k \leq n$ に対しても有限の情報しか持っていないので、深谷-Seidel 圏は有限のデータで完全に記述される。

ここでさらに M_z に Lefschetz ファイブレーションの構造を入れれば、$\mathcal{F}(M_z)$ の計算をもう 2 次元低いシンプレクティック多様体の深谷圏の計算に帰着する事が出来る。これを繰り返すことによってシンプレクティック多様体の次元を 2 まで落とせば、概正則円盤の数え上げは組合せ論的な「塗り絵」の問題に帰着する。

アファイン多様体 (あるいはより一般に Stein 多様体) の深谷圏が位相的幾何的 (あるいは組合せ論的) であるというアイデアは、余接束の場合の [Wit95] や [FO97] にまで遡り、[FSS08, FSS09, NZ09, Nad09, AS10a, Abo11, Sei12b] などで発展させられた。Kontsevich [Kon] は Seidel の手法を分析することにより、任意の Stein 多様体 X は Lagrange 骨格と呼ばれる一般には特異点を持つ Lagrange 部分多様体 L を持ち、その上に dg 圏の構成可能層 $\mathcal{A}$ が存在して、その大域切断 $H^0(\mathcal{A})$ として X の深谷圏が得られると予想した。この Kontsevich の予想と密接に関係する仕事としては [DK, STZ14, IU, Nad14, Nad15, NT, Nada, Nadb] などがある。

12 Lefschetz 束

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし、$B \subset M$ を M の余次元 2 のシンプレクティック部分多様体とする。写像 $f \colon M \setminus B \to \mathbb{P}^1$ が Lefschetz 束 (Lefschetz pencil) であるとは、f が有限個の非退化な臨界点のみを持ち、それらの臨界値は互いに異なり、B は適当な概正則局所座標 $(z_1, \dots, z_d)$ によって $z_1 = z_2 = 0$ で定義されていて、B の近傍で f は $(z_1, \dots, z_d) \mapsto z_1/z_2 \in \mathbb{P}^1$ で与えられる事を指す。従って、M を B に沿って爆発すれば、f は $\widetilde{f} \colon \widetilde{M} \coloneqq \mathrm{Bl}_M M \to \mathbb{P}^1$ に拡張され、$\widetilde{f}$ は Lefschetz ファイブレーションになる。

$\mathbb{C}$ を底空間とする Lefscehtz ファイブレーション $\pi \colon M \to \mathbb{C}$ に対し、その臨界点の集合に全順序を 1 つ入れて固定する；$\mathrm{Crit}(f) = (p_1, \dots, p_n)$. さらに、臨界値の集合を $\mathrm{Critv}(f) \coloneqq f(\mathrm{Crit}(f)) = (f(p_1), \dots, f(p_n))$ とおく。底空間 $\mathbb{C}$ 上の基点 $*$ を 1 つ取って固定する。$\mathbb{C}$ 上の単射な道 $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ で、$\gamma(0) = *$ かつ $\gamma(1) \in \mathrm{Critv}(f)$ を満たすものを消滅経路 (vanishing path) と呼ぶ。任意の消滅経路 γ に対し、始点における微分 $\gamma'(0)$ は $T_*\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ の元である。消滅経路からなる順序集合 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ が次の条件を満たす時、消滅経路の特集合 (distinguished set of vanishing paths) と呼ぶ：

- 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\gamma_i(1) = f(p_i)$.
- 任意の $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対し、$i \neq j$ ならば $\gamma_i([0,1]) \cap \gamma_j([0,1]) = \{*\}$.
- 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\gamma_i'(0) \neq 0$ であり、偏角の分枝を適当に取れば $\arg \gamma_1'(0) > \dots > \gamma_n'(0)$ となる。

消滅経路 $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ とファイバー $M_* \coloneqq \pi^{-1}(*)$ の点 $p \in M_*$ に対し、p を始点とする γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_p \colon [0,1) \to M$ が、任意の $t \in [0,1)$ に対し $\pi \circ \widetilde{\gamma}_p(t) = \gamma(t)$ かつ $\widetilde{\gamma}_p'(t) \in \left(T_{\widetilde{\gamma}_p(t)} M_{\gamma(t)}\right)^{\perp\omega}$ という条件で一意的に定まる。ここで $\widetilde{\gamma}_p'(t) \in T_{\widetilde{\gamma}_p(t)} M$ は $\widetilde{\gamma}_p$ の t における微分であり、$\left(T_{\widetilde{\gamma}_p(t)} M_{\gamma(t)}\right)^{\perp\omega}$ は $\gamma(t) \in \mathbb{C}$ における π のファイバー $M_{\gamma(t)} \coloneqq \pi^{-1}(\gamma(t))$ の $\widetilde{\gamma}_p(t) \in M_{\gamma(t)}$ における接空間 $T_{\widetilde{\gamma}_p(t)} M_{\gamma(t)}$ の、$T_{\widetilde{\gamma}_p(t)} M$ における ω に関する直交補空間である。任意の

[51] この他には、ファイバーで分岐する全空間の二重被覆を用いるもの [Sei08] や、より最近の [Sei12a, Seia, Seib] などがある。

$t \in [0,1)$ に対し、写像 $p \mapsto \widetilde{\gamma}_p(t)$ は M_* から $M_{\gamma(t)}$ へのシンプレクティック同相を与える。π の臨界点の周りでの局所モデル $(z_1, \dots, z_d) \mapsto z_1^2 + \cdots + z_d^2$ を使うと、

$$V_\gamma \coloneqq \left\{ p \in M_* \,\middle|\, \lim_{t \to 1} \widetilde{\gamma}_p(t) \in \mathrm{Crit}(f) \right\} \tag{12.1}$$

は球面と同相な M_* の Lagrange 部分多様体である事が分かる。これを γ に沿った π の消滅サイクル (vanishing cycle) と呼ぶ。消滅経路の特集合 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ に付随する消滅サイクルの順序集合 $(V_1, \dots, V_n) \coloneqq (V_{\gamma_1}, \dots, V_{\gamma_n})$ を消滅サイクルの特基底 (distinguished basis of vanishing paths) と呼ぶ。

$*$ を起点として γ の周りを回るループ $\gamma^\# \in \Omega(\mathbb{C} \setminus \mathrm{Critv}(f))$ に対し、$\gamma^\#$ に沿った平行移動は M_* のシンプレクティック自己同相を与えるが、これを消滅サイクル V_γ に沿った Dehn 捻り (Dehn twist) と呼ぶ。Dehn 捻りのシンプレクティック写像類群 (symplectic mapping class group) $\mathrm{Symp}(M,\omega)/\mathrm{Ham}(M,\omega)$ における像は γ のホモトピー類にのみ依存する。M_* が 2 次元の時、上の意味での Dehn 捻りの写像類群 (mapping class group) $\mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Diff}(M)_0$ における像は通常の意味の Dehn 捻りになっている。シンプレクティック写像類群から写像類群への写像は一般には大きな核を持つ [Sei99, KS02, ST01]。

Donaldson [Don96, Don99] による有名な定理により、任意のシンプレクティック多様体は Lefschetz 束の構造を持つ。また、4 次元では逆に任意の Lefschetz 束の全空間はシンプレクティック構造を許容することが Gompf によって知られている [GS99]。種数 g の曲面をファイバーとする S^2 上の Lefschetz ファイブレーションを与えることは、種数 g の曲面の上の単純閉曲線の列 $(C_1, \dots, C_n)$ で、写像類群において関係式

$$\tau_{C_1} \circ \cdots \circ \tau_{C_n} = 1 \tag{12.2}$$

を満たすものを与える事と同値である。シンプレクティック幾何学における Lefschetz ファイブレーションについては 1998 年の国際数学者会議における Donaldson の講演 [Don98] が、4 次元トポロジーにおける Lefschetz ファイブレーションの位置付けについては、前述の [GS99] の他に Gompf による解説 [Gom05] などがある。

13 深谷–Seidel 圏

Lefschetz ファイブレーション $\pi\colon M \to \mathbb{C}$ に対し、$\mathbb{C}$ 上の単射な道 $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ で、$\gamma([0,\infty)) \cap \mathrm{Critv}(\pi) = \{\gamma(0)\}$ を満たし、コンパクト集合の外では負の実軸に平行な直線になっているようなものを、$-\infty$ を基点とした π の消滅経路と呼ぶ。また、消滅経路 γ に沿った時刻 $t \in (0,\infty)$ における消滅サイクルを

$$V_{\gamma,t} \coloneqq \left\{ p \in M_{\gamma(t)} \,\middle|\, \lim_{s \to 0} \widetilde{\gamma}_p(s) \in \mathrm{Crit}(f) \right\} \tag{13.1}$$

と置き、これらの消滅サイクルを並べたものを

$$L_\gamma \coloneqq \bigcup_{t \in [0,\infty)} V_{\gamma,t} \tag{13.2}$$

と書いて、γ に沿った Lefschetz 指貫 (Lefschetz thimble) と呼ぶ。Lefschetz 指貫は開円板と同相な M の Lagrange 部分多様体である。ここで、便宜的に $\gamma(0) \in \mathrm{Critv}(\pi)$ 上のただ一つの臨界点からなる集合を $V_{\gamma,0}$ と置いた。$-\infty$ を基点とする消滅経路からなる全順序集合 $(\gamma_i)_{i=1}^n$ が互いに交わらず、しかも十分大きな t に対して $\mathfrak{Im}(\gamma_1(t)) > \cdots > \mathfrak{Im}(\gamma(n(t))$ を満たす時、$-\infty$ を基点とする消滅経路の特集合 (distingusihed set of vanishing paths based at $-\infty$) と呼ぶ。この時、対応する Lefschetz 指貫 $L_i \coloneqq L_{\gamma_i}$ の順序集合 $(L_i)_{i=1}^n$ を Lefschetz 指貫の特基底 (distinguished basis of Lefschetz thimbles) と呼ぶ。

全ての臨界値を含むコンパクト集合 K_1 と、K_1 を内部に含むコンパクト集合 K_2 を適当に選んで固定する。さらに、十分小さな正数 ϵ と、Lefschetz ファイブレーションの底空間 $\mathbb{C}$ の微分同相 $\overline{\phi}_\epsilon$ で、K_1 において恒等写像であり、K_2 の外側では ϵ 回転 $z \mapsto \exp(\epsilon\sqrt{-1})z$ で与えられるようなものを取る。K_1 の外側では、π は局所自明なシンプレクティック多様体の族になっているので、M の Hamilton 同相 ϕ_ϵ で、$\overline{\phi}_\epsilon$ の持ち上げになっているようなものが存在する。$(L_i)_{i=1}^n$ を対象とし、

$$\hom(L_i, L_j) \coloneqq \mathrm{CF}^*(\phi_\epsilon(L_i), L_j) \tag{13.3}$$

を射の空間とする A_∞ 圏を π の深谷–Seidel 圏と呼び、$\mathcal{F}(\pi)$ と書く。深谷–Seidel 圏における射の合成は、ϕ_ϵ が誘導する同一視

$$\mathrm{CF}^*(\phi_\epsilon(L_i), L_j) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CF}^*(\phi_{2\epsilon}(L_i), \phi_\epsilon(L_j)) \tag{13.4}$$

と E の深谷圏における射の合成

$$\mathfrak{m}_2\colon \mathrm{CF}^*(\phi_\epsilon(L_j), L_k) \otimes \mathrm{CF}^*(\phi_{2\epsilon}(L_i), \phi_\epsilon(L_j)) \to \mathrm{CF}^*(\phi_{2\epsilon}(L_i), L_k), \tag{13.5}$$

それに Lagrange 交叉 Floer 理論における連続性写像 (continuation map)

$$\mathrm{CF}^*(\phi_{2\epsilon}(L_i), L_k) \cong \mathrm{CF}^*(\phi_\epsilon(L_i), L_k) \tag{13.6}$$

を合成する事で与えられる。ただし、$\phi_{2\epsilon} := \phi_\epsilon \circ \phi_\epsilon$ とおいた。A_∞ 圏における射の高次の合成についても同様に定義される。この定義が、基点 $* \in \mathbb{C}$ における π のファイバー $M_* := \pi^{-1}(*)$ の深谷圏 $\mathcal{F}(M)$ の、消滅サイクルの特基底 $(V_i)_{i=1}^N$ に付随する有向部分圏としての前述の定義と一致することは容易に分かる。$\mathcal{F}(\pi)$ は消滅サイクルの特基底や概複素構造などの補助的なデータに依存するが、導来圏 $D^b\mathcal{F}(\pi)$ の擬同値類は Lefschetz ファイブレーション π のシンプレクティック同相類にしか依存しない [52]。

Lefschetz ファイブレーションを Morse 関数の類似と見るならば、Lefschetz 指貫は降下 Morse サイクル (descending Morse cycle) の Lefschetz ファイブレーションにおける対応物である。$\mathbb{C}$ 上の点 $*$ を基点とする消滅経路の特集合 $(\gamma_i)_{i=1}^n$ を 1 つ取って固定する。$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^n \gamma([0,1])$ は可縮であり、しかもその上では π は位相的に自明なファイバー束になっているので、$E \setminus \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n \gamma([0,1])\right)$ はファイバー $M_* := \pi^{-1}(*)$ とホモトピー同値である。ここに $*$ を基点とする Lefschetz 指貫を貼り合わせたものは M とホモトピー同値になる；

$$M \sim M_* \cup \bigcup_{i=1}^n L_i. \tag{13.7}$$

従って、Lefschetz 指貫は全空間 M とファイバー M_* の仲立ちをするような幾何学的対象であり、Seidel のプログラムはその深谷圏における影である。また、Lefschetz 指貫には超幾何級数の積分表示における被積分サイクルとしての側面もあり、量子コホモロジーに付随するモノドロミー保存変形の Stokes 行列に関する Dubrovin の予想 [Dub98] と密接に関わる。

Lefschetz ファイブレーションの例として、A_n 型特異点の定義多項式 x^{n+1} を正数 a で摂動して得られる写像

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^{n+1} - ax \tag{13.8}$$

を考える。f の臨界点の集合は

$$\mathrm{Crit}(f) := \{x \in \mathbb{C} \mid (n+1)x^n = a\} = \left\{\zeta_n^i x_0\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad x_0 := \sqrt[n]{a/(n+1)},\ \zeta_n := \exp(2\pi\sqrt{-1}/n) \tag{13.9}$$

であり、臨界値

$$x^{n+1} - ax = \frac{a}{n+1}x - ax = -\frac{n}{n+1}ax \tag{13.10}$$

は円周上に分布する。消滅経路の特集合を図 13.1 のように取ると、対応する Lefschetz 指貫は図 13.2 のようになる。これらは

$$\#\left(\phi_\epsilon(L_i) \cap L_j\right) = \begin{cases} 1 & j = i \text{ または } j = i+1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{13.11}$$

を満たすので、次数付けを適当に取ると、深谷–Seidel 圏における射の空間は

$$\hom^k(L_i, L_j) = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{L_i} & j = i \text{ かつ } k = 0, \\ \mathbb{C} & j = i+1 \text{ かつ } k = 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{13.12}$$

で与えられる。

[52] 深谷–Seidel 圏が消滅サイクルの特基底の取り方に依らないことは、Dehn 捻りに関する Lagrange 交叉 Floer コホモロジーの長完全列 [Sei03] の帰結である。

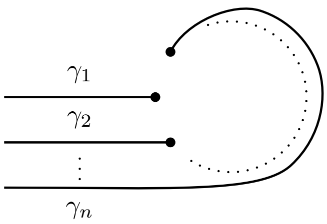


図 13.1: 消滅経路の特集合

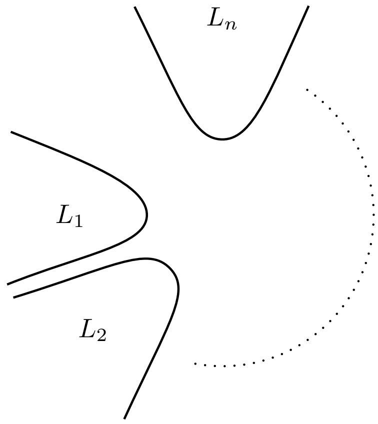


図 13.2: Lefschetz 指貫の特基底

14　行列因子化

Gorenstein 次数環 [53] R に対し、有限生成次数 R 加群のなす Abel 圏を $\operatorname{gr} R$ と置き、$D^b \operatorname{gr} R$ をその有界導来圏とする。$D^b \operatorname{gr} R$ の対象は、射影加群の有界複体と擬同型である時に理想複体 (perfect complex) と呼ばれる。理想複体のなす $D^b \operatorname{gr} R$ の充満部分圏を $D^{\mathrm{perf}} \operatorname{gr} R$ で表し、理想導来圏 (perfect derived category) と呼ぶ。有界導来圏の理想導来圏による商 [54] を安定導来圏 (stable derived category) もしくは特異点圏 (singularity category) と呼び、

$$D^b_{\mathrm{sing}}(\operatorname{gr} R) \coloneqq D^b \operatorname{gr} R / D^{\mathrm{perf}} \operatorname{gr} R \tag{14.1}$$

で表す [Buc87]。

正則次数環 [55] S と 0 でない斉次元 $f \in S$ に対し、商環 $R \coloneqq S/(f)$ は Gorenstein 次数環の典型的な例を与える。この場合の安定導来圏は [Eis80] で導入された行列因子化 (matrix factorization) を用いて具体的に記述される [56]。例として $S \coloneqq \mathbb{C}[x]$, $f \coloneqq x^{n+1}$, $R \coloneqq S/(f)$ の場合を考えると、$(E_i \coloneqq R/(x)(-i+1))_{i=1}^n$ が $D^b_{\mathrm{sing}}(\operatorname{gr} R)$ の完備例外列になり、それらの間の射が

$$\operatorname{Ext}^k(E_i, E_j) \cong \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{S_i} & i = j \text{ かつ } k = 0, \\ \mathbb{C} & j = i+1 \text{ かつ } k = 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{14.2}$$

を満たすことは容易に分かる [Tak05, Orl09]。

15　可逆多項式

自然数を成分とする $n \times n$ 行列 A に対し n 変数多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, n]$ を

$$f = \sum_{i=1}^n x_1^{a_{i1}} \cdots x_n^{a_{in}} \tag{15.1}$$

[53] Abel 群 H に対し、$A_h \cdot A_{h'} \subset A_{h+h'}$ を満たす直和分解 $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$ が与えられた環を H 次数環 (H-graded ring) または単に次数環 (graded ring) と呼ぶ。次数環に対し、全ての素イデアルにおける局所化が Gorenstein 局所環である事と、全ての斉次素イデアルにおける局所化が Gorenstein 局所環である事は同値であり、この条件を満たす次数環を Gorenstein 次数環と呼ぶ。

[54] $\mathcal{T}$ を三角圏とし、$\mathcal{N}$ を $\mathcal{T}$ の充満三角部分圏とすると、写像錐が $\mathcal{N}$ に入るような射の集合で $\mathcal{T}$ を局所化する事によって、再び三角圏を得る事ができる。これを $\mathcal{T}$ の $\mathcal{N}$ による Verdier 商 (Verdier quotient) と呼び、$\mathcal{T}/\mathcal{N}$ で表す。Keller [Dri04] や Drinfeld [Kel99] によって、強化三角圏の Verdier 商は再び強化三角圏になることが知られている。

[55] 次数環の全ての素イデアルにおける局所化が正則局所環である事と、全ての斉次素イデアルにおける局所化が正則局所環である事は同値であり、この条件を満たす次数環を正則次数環と呼ぶ。

[56] 自由 S 加群の無限列 $K^\bullet = \left\{ \cdots \to K^i \xrightarrow{k^i} K^{i+1} \xrightarrow{k^{i+1}} K^{i+2} \to \cdots \right\}$ で、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $K^{i+2} \cong K^i$ 及び $k^{i+1} \circ k^i = W$ を満たすものを行列因子化 (matrix factorization) と呼ぶ。複体の場合と同様にして、行列因子化は自然に微分次数圏をなす。行列因子化の解説としては例えば [Yos90] を見よ。

で定義する。f の零でない係数は変数 x_i たちを適当に定数倍することによって 1 に規格化できる事に注意せよ。A が可逆行列で、f が原点に孤立臨界点を持つ時、f を可逆多項式 (invertible polynomial) と呼ぶ。$f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ と $g \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$ に対し、$f + g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ を f と g の Sebastiani–Thom 和 (Sebastiani–Thom sum) と呼ぶ [ST71]。一般に、可逆多項式は

- Fermat 型 (Fermat type) : $f = x^p$
- 鎖型 (chain type) : $f = x_1^{p_1} x_2 + x_2^{p_2} x_3 + \cdots + x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n + x_n^{p_n}$
- 円環型 (loop type) : $f = x_1^{p_1} x_2 + x_2^{p_2} x_3 + \cdots + x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n + x_n^{p_n} x_1$

の幾つかの Sebastiani–Thom 和で与えられる [AGZV85, KS92]。与えられた可逆多項式に対し、環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/f$ は $n+1$ 個の生成元 $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{c}$ と n 個の関係式

$$a_{i1}\vec{x}_1 + \cdots + a_{in}\vec{x}_n = \vec{c}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{15.2}$$

で定義される階数 1 の Abel 群 L による自然な次数付けを持つ。この L は

$$K \coloneqq \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n \;\middle|\; \alpha_1^{a_1 1} \cdots \alpha_n^{a_{1n}} = \cdots = \alpha_1^{a_n 1} \cdots \alpha_n^{a_{nn}} \right\} \tag{15.3}$$

で定義される群の指標群である。 最大対角対称性の群 (the group of maximal diagonal symmetries) $G_{\max}$ は写像

$$K \to \mathbb{C}^\times, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1^{a_{11}} \cdots \alpha_n^{a_{1n}} \tag{15.4}$$

の核として定義される :

$$1 \to G_{\max} \to K \to \mathbb{C}^\times \to 1. \tag{15.5}$$

(15.5) は指標群の完全列

$$0 \to \mathbb{Z} \to L \to G_{\max}^\vee \to 0 \tag{15.6}$$

を誘導する。ここで、

$$G_{\max}^\vee \coloneqq \mathrm{Hom}(G_{\max}, \mathbb{C}^\times) \tag{15.7}$$

は $G_{\max}$ との正準的 (canonical) ではない同型を持つ。A の逆行列を

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} & \varphi_1^{(2)} & \cdots & \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(1)} & \varphi_2^{(2)} & \cdots & \varphi_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^{(1)} & \varphi_n^{(2)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{15.8}$$

と置くと、$G_{\max}$ は

$$\rho_k \coloneqq \left(\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\varphi_1^{(k)}\right), \ldots, \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\varphi_n^{(k)}\right) \right) \tag{15.9}$$

で生成される。$i = 1, \ldots, n$ に対し

$$\varphi_i \colon \varphi_i^{(1)} + \cdots + \varphi_i^{(n)} \tag{15.10}$$

と置いて、群の準同型 $\varphi \colon \mathbb{C}^\times \to K$ を

$$\varphi(\alpha) \coloneqq \left(\alpha^{\ell\varphi_1}, \ldots, \alpha^{\ell\varphi_n} \right) \tag{15.11}$$

で定義する。但し、ℓ は全ての $i=1,\dots,n$ に対し $\ell\varphi_i$ が整数になるような最小の非負整数である。 この時 φ は単射になり、その余核を $\overline{G}_{\max}$ と置く；

$$1 \to \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\varphi} K \to \overline{G}_{\max} \to 1. \tag{15.12}$$

W は

$$\deg x_i = \ell\varphi_i, \quad i=1,\dots,n \tag{15.13}$$

によって $\mathbb{Z}$ 次数付けを持つ。f が原点に孤立臨界点を持つので、重み付き超曲面

$$Y \coloneqq \{[x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}(\ell\varphi_1,\dots,\ell\varphi_n) \mid f(x_1,\dots,x_n)=0\} \tag{15.14}$$

は滑らかな Deligne–Mumford スタックである。Y の正準束が自明になるための必要十分条件は

$$\deg x_1 + \cdots + \deg x_n = \ell \tag{15.15}$$

である。$\operatorname{Im}\varphi \cap G$ は

$$J \coloneqq \left(\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\varphi_1\right),\dots,\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\varphi_n\right)\right) \tag{15.16}$$

で生成されている。$J \in G$ と仮定して、$\overline{G} \coloneqq G/\langle J\rangle$ と置き、自然な全射 $K \to \overline{G}_{\max}$ による $\overline{G}$ の逆像を M と書く。また、M の指標群を H と置く。この時、Calabi–Yau スタック $[Y/\overline{G}]$ と Landau–Ginzburg 軌道体 (f,G) (もしくは (f,M)) [57] が密接に関係しているという予想を Calabi–Yau/Landau–Ginzburg 対応 (Calabi–Yau/Landau–Ginzburg correspondence) と呼ぶ。これは少なくとも [Gep87] にまで遡る古いアイデアであるが、最近の発展としては例えば [Orl09, CR10, CR11, CIR14] 等がある。

可逆多項式 f の転置 (transpose) は

$$\check{f} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_1^{a_{1i}} \cdots x_n^{a_{ni}} \tag{15.17}$$

で定義される。$\check{f}$ の最大対角対称性の群 $\check{G}_{\max}$ は $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ の列ベクトル $\check{\rho}_i$ たちで生成されている。$G_{\max}$ の部分群 G に対し、G の転置 $\check{G}$ は

$$\check{G} \coloneqq \left\{ \prod_{i=1}^{n} \check{\rho}_i^{r_i} \;\middle|\; \text{任意の} \prod_{i=1}^{n} \rho_i^{a_i} \in G \text{ に対し} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \right\} \tag{15.18}$$

で定義される ([Kra] を見よ)。対応 $G \leftrightarrow \check{G}$ は $G_{\max}$ を $\{e\}$ と、$\langle J\rangle$ を $G_{\max} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ とそれぞれ入れ替える。この時、Landau–Ginzburg 模型 (f,G) と $(\check{f},\check{G})$ がミラーであるというのが Berglund–Hübsch [BH93] による転置ミラー対称性 (transposition mirror symmetry) である。

16 箙とその表現

ホモロジー的ミラー対称性の証明の方針は大きく分けて 2 つある。1 つは Fourier 変換のような幾何学的な方法で関手を定義して、それが充満忠実かつ本質的全射であることを示す方法、そしてもう 1 つは、それぞれの圏の生成元で、それらの自己同型代数が微分次数代数あるいは A_∞ 代数として擬同型になるようなものを見つける方法である。これらの方法は、2 つの環が同型であることを示すのに、まず準同型を作って、それが全射かつ単射であることを示すのと、生成元の間に対応をつけて、関係式が一致することを示すのに似ている。

[57] 代数多様体上の正則関数 $f\colon V \to \mathbb{C}$ と、V に作用する群 G で f を不変にするようなものの組 (f,G) をここでは Landau–Ginzburg 軌道体と呼ぶ。

予完備な強化三角圏 $\mathscr{D}$ のコンパクトな生成元 E が与えられた時、$\mathscr{A} := \hom_{\mathscr{D}}(E,E)$ に対し関手

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E,-)\colon \mathscr{D} \to D\mathscr{A} \tag{16.1}$$

とその随伴関手

$$(-) \otimes_{\mathscr{A}} E\colon D\mathscr{A} \to \mathscr{D} \tag{16.2}$$

は圏の同値を与える [58]。$\mathscr{A}$ が非輪体的 (acyclic、すなわち $i \neq 0$ に対し $H^i(\mathscr{A}) = 0$) であれば、$D\mathscr{A}$ は $A := H^0(\mathscr{A})$ 上の加群の導来圏と同値になる。

頂点 (vertex) の集合 Q_0 と矢印 (arrow) の集合 Q_1、それに矢印に対してその始点 (source) と終点 (target) を対応させる写像 $s,t\colon Q_1 \to Q_0$ からなる組 $Q := (Q_0, Q_1, s, t)$ を箙 (quiver) と呼ぶ。Q_0 と Q_1 が有限集合の時、Q は有限である (finite) と言う。正の自然数 k に対し、長さ (length) が k の道 (path) とは、矢印の列 $(a_k, \dots, a_2, a_1)$ で、任意の $i = 1, \dots, k-1$ に対して $s(a_{i+1}) = t(a_i)$ を満たすものを指す。また，各頂点 $v \in Q_0$ に対し，v で始まって v で終わる長さ 0 の元 e_v を考えて，これも道と呼ぶ．道の張るベクトル空間に

$$(a_k, \dots, a_1) \cdot (b_l, \dots, b_1) = \begin{cases} (a_k, \dots, a_1, b_l, \dots, b_1) & s(a_1) = t(b_l) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{16.3}$$

で積を入れたものを道代数 (path algebra) と呼び，$\mathbb{C}Q$ で表す．頂点に付随する長さ 0 の道はこの代数の冪等元になる．道代数 $\mathbb{C}Q$ は道の長さによる自然な次数付け $\mathbb{C}Q = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbb{C}Q)_n$ を持つ。箙 Q とその道代数の両側イデアル $I \subset \mathbb{C}Q$ の組 $\Gamma := (Q, I)$ を関係付き箙 (quiver with relations) と呼び、$\mathbb{C}\Gamma := \mathbb{C}Q/I$ をその道代数と呼ぶ。以下では、箙の関係式は長さが 2 以上の元からなる部分加群に含まれると仮定する；

$$I \subset (\mathbb{C}Q)_{\geq 2} := \bigoplus_{n=2}^{\infty} (\mathbb{C}Q)_n. \tag{16.4}$$

関係付き箙 Γ に対し、道代数 $\mathbb{C}\Gamma$ 上の加群を Γ の表現 (representation) と呼ぶ。関係付き箙の表現を与える事は、各頂点 v に対応する線形空間 M_v と各矢印 a に対応する線形写像 $\phi_a \in \mathrm{Hom}(M_{s(a)}, M_{t(a)})$ の組 $\Big((M_v)_{v \in Q_0}, (\phi_a)_{a \in Q_1} \Big)$ で、関係式を満たすものを与える事と同値である。

頂点に対応する冪等元が生成する半単純代数を

$$\mathbb{C}^{Q_0} := \bigoplus_{v \in Q_0} \mathbb{C} e_v \tag{16.5}$$

と置くと、関係付き箙の道代数は半単純代数 $\mathbb{C}^{Q_0}$ 上の代数である。逆に半単純代数 $\mathbb{C}^{Q_0}$ 上の代数 A が与えられた時、線形空間の直和分解 $A = \bigoplus_{v,w \in Q_0} e_v A e_w$ が存在するので、A の生成元を直和因子から適当に取って Q_1 と置いて、$a \in Q_1$ が $e_v A e_w$ の元の時 $s(a) := w$, $t(a) := v$ と定義する事によって、箙 $Q := (Q_0, Q_1, s, t)$ が得られる。構成から $\mathbb{C}Q$ から A に自然な全射があるので、その核を I として $\Gamma := (Q, I)$ と置けば、$\mathbb{C}\Gamma$ と A は自然に同型になる。

非輪体的な生成元 $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ に対し、その直和成分の個数と同じ数の頂点を用意して $Q_0 := \{v_1, \dots, v_n\}$ と置くと、$i = 1, \dots, n$ に対して $e_i := e_{v_i}$ を $\mathrm{id}_{E_i} \subset A$ に送る事で、E の自己準同型代数 A は半単純代数 $\mathbb{C}^{Q_0}$ 上の代数になるので、適当な関係付き箙の道代数として表される。

Γ を関係付き箙とし、$A := \mathbb{C}\Gamma$ をその道代数とする。任意の頂点 $v \in Q_0$ に対し、冪等元 $e_v \in A$ の生成する A の右部分加群を $P_v := e_v A$ とおく。$1 = \sum_{v \in Q_0} e_v$ から $A \cong \bigoplus_{v \in Q_0} P_v$ なので、P_v は A の直和因子であり、従って射影加群である。関係付き箙が非輪体的な生成元 $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ から来ている時、圏同値 (16.1) によって E_i は $P_i := P_{v_i}$ に移される。一方、頂点 v が与えられた時、頂点 w に対して線形空間を

$$M_w = \begin{cases} \mathbb{C} & w = v, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{16.6}$$

[58] これと Fourier–SYZ 変換 (あるいは族の Floer コホモロジー) の類似性を強調する見方もあるが、Lagrange トーラスファイブレーションのファイバーは全て集めても導来圏を生成しない (ミラー側で見ると、点層は導来圏はおろか K 群すら生成しない) という顕著な違いがある。

で定め、全ての矢印 $a \in Q_1$ に対して $\phi_a = 0$ とおくと、$\left((M_w)_{w \in Q_0}, (\phi_a)_{a \in Q_1}\right)$ は Γ の表現になるが、これを S_v と書き、v に付随する単純加群と呼ぶ。A 加群 S_v の射影分解の初項は

$$\cdots \to \bigoplus_{t(a)=v} P_{s(a)} \to P_v \to S_v \to 0 \tag{16.7}$$

で与えられ、その核は A の関係式から来る。この射影分解を関手 $\operatorname{Hom}(-, S_w)$ で送る事により、$\operatorname{Ext}^1(S_v, S_w)$ の基底は w から v への矢印に対応し、$\operatorname{Ext}^2(S_v, S_w)$ の基底は w から v に至る道の関係式に対応する事が分かる。

非自明な直和分解を持たない対象を直既約 (indecomposable)、自明な部分対象を持たない対象を既約 (irreducible)、恒等写像の定数倍以外の自己準同型を持たない対象を単純 (simple) と呼ぶ。また、単純かつ非輪体的な対象を例外対象 (exceptional object) と呼ぶ。例外対象の列 $(E_i)_{i=1}^n$ が任意の $i > j$ と任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Ext}^k(E_i, E_j) = 0$ を満たす時、例外列 (exceptional collection) と呼ばれる。非輪体的な例外列を強例外列 (strong exceptional collection) と呼ぶ。$\bigoplus_{i=1}^n E_i$ が生成元であるような例外列を完備例外列 (full exceptional collection) と言う。

始点と終点が一致する道を有向サイクル (oriented cycle) と呼ぶ。また、有向サイクルを持たない箙を有向箙 (directed quiver) と呼ぶ。完備強例外列の全準同型代数 (total morphism algebra) $A \coloneqq \bigoplus_{i,j=0}^n \operatorname{Hom}(E_i, E_j) \cong \operatorname{End}\left(\bigoplus_{i=0}^n E_i\right)$ は関係付き有向箙の道代数と同型になる。有向箙の表現においては、単純加群の列 $(S_n, S_{n-1}, \dots, S_1)$ は完備例外列をなし、

$$\operatorname{Ext}^k(P_i, S_j) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = j \text{ かつ } k = 0, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{16.8}$$

という意味で射影加群のなす強完備例外列 $(P_i)_{i=1}^n$ と双対的になっている。完備例外列 $(S_i)_{i=n}^1$ は決して強例外列にならないが、A が Koszul 代数 (Koszul algebra) であれば、導来圏における次数をずらして得られる列 $(S_i[-i])_{i=n}^1$ は強例外列になり、その全準同型代数は A の Koszul 双対代数 (Koszul dual algebra) になる。この意味で、$(S_i[i])_{i=n}^1$ の微分次数代数もしくは A_∞ 代数としての全準同型代数は、A の Koszul 双対代数の一般化を与える。

箙の例として、

$$v_1 \xleftarrow{a_1} v_2 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_{n-1}} v_n \tag{16.9}$$

で与えられる箙 Q を考える。これは n 個の頂点 $Q_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$ と $n-1$ 本の矢印 $Q_1 = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ を持ち、任意の $i = 1, \dots, n-1$ に対して $s(a_i) = v_{i+1}$ かつ $t(a_i) = v_i$ である。$i, j = 1, \dots, n$ に対して道 a_{ij} を

$$a_{ij} \coloneqq \begin{cases} a_i a_{i+1} \cdots a_{j-1} & i < j, \\ e_{v_i} & i = j, \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{16.10}$$

で定義すると、道代数に於ける積は

$$a_{ij} a_{kl} = \begin{cases} a_{il} & j = k, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{16.11}$$

で与えられる。(i, j) 成分のみが 1 で残りが 0 の $n \times n$ 行列を E_{ij} とおくと、写像 $a_{ij} \mapsto E_{ij}$ によって、Q の道代数 $A \coloneqq \mathbb{C}Q$ は n 次上半三角行列代数と同型になる。射影加群 $P_i \coloneqq e_i A$ からなる強完備例外列 $(P_n, P_{n-1}, \dots, P_1)$ の双対列は単純加群 $S_i \coloneqq \mathbb{C} e_i$ からなり、それらの間の射のなす線形空間は

$$\operatorname{Ext}^k(S_i, S_j) \cong \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{S_i} & i = j \text{ かつ } k = 0, \\ \mathbb{C} & j = i + 1 \text{ かつ } k = 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{16.12}$$

で与えられる。次数代数 $A := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{i,j=1}^{n} \operatorname{Ext}^k(S_i, S_j)$ の積構造は、次数付き線形空間としての構造 (16.12) から一意的に定まる事が容易に分かる。更に、微分次数代数 $\mathscr{A}$ が形式的である事も (16.12) から容易に従う。一般に、次数代数 A の強化 [59] が一意的である現象を内在的形式性 (intrinsic formality) と呼ぶ。

深谷–Seidel 圏における射の空間 (13.12) と行列因子化の圏における (14.2) を、(16.12) で与えられる次数代数の内在的形式性と組み合わせることにより、$f := x^{n+1} - ax$ と $\check{f} := x^{n+1}$ に対して強化三角圏の同値

$$D^b \mathcal{F}(f) \cong D^b_{\mathrm{sing}}(\operatorname{gr} \mathbb{C}[x]/(\check{f})) \tag{16.13}$$

を得るが、これが A_n 特異点に対するホモロジー的ミラー対称性である。類似の結果はより一般の可逆多項式に対しても成り立つと予想されており、幾つかの場合に証明されているが、これについては例えば [FU] を見よ。

17 トーリック Fano 多様体に対するホモロジー的ミラー対称性

Calabi–Yau 多様体以外の多様体に対するホモロジー的ミラー対称性の中で最も深く研究されているのは、トーリック Fano 多様体の場合である。トーリック Fano 多様体のミラーは Landau–Ginzburg 模型であり、この明らかな非対称性のために、どちら側でシンプレクティック幾何を考えるかによって 2 つのバージョンがある。

トーリック Fano 多様体 X は凸格子多面体 [60] で決まり、その複素構造はモジュライを持たない。一方、シンプレクティック構造は、X をシンプレクティックベクトル空間のトーラス作用によるシンプレクティック商として構成するときの運動量写像の値 (等位集合) の選び方によって変化するので、$b_2 = \dim H^2(X, \mathbb{R})$ 次元のモジュライを持つ。このモジュライはミラーの Landau–Ginzburg 模型において、ポテンシャル W の係数に対応する。

ホモロジー的ミラー対称性の 1 つのバージョンは

$$D^b \operatorname{coh} X \cong D^b \mathcal{F}(W) \tag{17.1}$$

であり、もう 1 つのバージョンは

$$D^\pi \mathcal{F}(X) \cong D^b_{\mathrm{sing}}(W) \tag{17.2}$$

である。モジュライ依存性が無いという意味では (17.1) の方が易しいが、一般のシンプレクティック構造に対しては (17.2) に現れるどちらの圏も半単純になる (すなわち、ベクトル空間の複体の圏の直和になる) と期待されるので、その意味では (17.2) の方が易しい。但し、X の Gromov–Witten 不変量とポテンシャル W の振動積分の関係を与える古典的ミラー対称性が系として従うべき主張は (17.2) の方である。Fano 多様体とは限らない一般のコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体に対する (17.2) の証明が Abouzaid–Fukaya–Oh–Ohta–Ono によって予告されている。また、この場合のホモロジー的ミラー対称性と古典的ミラー対称性の関係については [FOOO] で詳しく議論されている。ただし、強化三角圏の同値から古典的ミラー対称性を導出する事はこの場合でも行われていない。以下では (17.1) について議論する。

$\boldsymbol{N}$ を階数 n の自由 Abel 群とし、その双対 Abel 群を $\boldsymbol{M} := \operatorname{Hom}(\boldsymbol{N}, \mathbb{Z})$ とおく。$\Delta \subset \boldsymbol{N}_{\mathbb{R}} := \boldsymbol{N} \otimes \mathbb{R}$ を凸格子多面体とし、Δ は原点を内点に含むと仮定する。Δ の格子点の集合を $A := \Delta \cap \boldsymbol{N}$ とおき、Δ を Newton 多面体とする Laurent 多項式を

$$W = \sum_{\boldsymbol{n} \in A} a_{\boldsymbol{n}} x^{\boldsymbol{n}} \tag{17.3}$$

とおく。ここで係数 $(a_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n} \in A} \in \mathbb{C}^A$ を十分一般に取れば、W が定める写像 $\boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}^{\times} := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\boldsymbol{N}] \to \mathbb{C}$ は Lefschetz ファイブレーションを与える。(17.1) の右辺はこうして得られる Lefschetz ファイブレーションの深谷–Seidel 圏である。但し、定義域 $\boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}^{\times} \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ には $-\sqrt{-1}/2 \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\overline{x}_i / |x_i|^2$ をシンプレクティック形式とする自然なシンプレクティック構造を入れる。

[59] 与えられた次数代数 A に対し、コホモロジー代数が A と同型になるような微分次数代数 $\mathscr{A}$ を A の強化 (enhancement) と呼ぶ。
[60] 有限個の格子点の凸包 (convex hull) を凸格子多面体 (convex lattice polytope) と呼ぶ。

Δ の頂点の集合を $\{\boldsymbol{n}_i\}_{i=1}^r$ と置いて、写像 $\varphi\colon \mathbb{Z}^r \to \boldsymbol{N}$ を $\varphi(e_i) \coloneqq \boldsymbol{n}_i$ で定める。但し、$\mathbb{Z}^r$ の標準基底を $(e_i)_{i=1}^r$ と置いた。更に、Δ の境界 (すなわち、余次元 1 の面の和集合) の三角形分割 Σ で、その頂点の集合が Δ の頂点の集合と一致するようなものを 1 つ選んで固定する。ある $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$ が存在して、$z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0$ であるが、$\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ で張られる単体が Σ に属さないような点 $(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ の集合を Stanley-Reisner 軌跡 (Stanley-Reisner locus) と呼び、$\mathrm{SR}(\Sigma)$ で表す。φ の誘導する写像 $\varphi_{\mathbb{C}^\times}\colon (\mathbb{C}^\times)^r \to \boldsymbol{N}_{\mathbb{C}^\times}$ の核 $K \coloneqq \operatorname{Ker} \varphi_{\mathbb{C}^\times} \subset (\mathbb{C}^\times)^r$ は $(\mathbb{C}^\times)^r$ の $\mathbb{C}^r$ への自然な作用を通して $\mathbb{C}^r$ に作用するが、この作用に関する $\mathbb{C}^r \setminus \mathrm{SR}(\Sigma)$ のスタック論的な商を

$$X_\Sigma \coloneqq [(\mathbb{C}^r \setminus \mathrm{SR}(\Sigma))/K] \tag{17.4}$$

と書き、Σ に付随したトーリックスタックと呼ぶ。この時、予想 2.5 は強化三角圏の同値

$$D^b \operatorname{coh} X_\Sigma \cong D^b \mathcal{F}(W) \tag{17.5}$$

の存在を主張する。X_Σ は一般にトーリック弱 Fano スタックになる [61]。X_Σ が代数多様体になるための必要十分条件は Σ がユニモジュラーである (すなわち、Σ の任意の単体が $GL_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$ の作用で標準単体に移せる) 事であり、X_Σ が Fano になるための必要十分条件は Σ の全ての面が Δ の面である事である。X_Σ の同型類は単体分割 Σ の取り方に依るが、導来圏 $D^b \operatorname{coh} X_\Sigma$ の強化三角圏としての擬同型類は Δ のみで決まる [Kaw05]。

例として、$\boldsymbol{N} \coloneqq \mathbb{Z}$ が階数 1 の Abel 群であり、$\Delta_{a,b} \coloneqq [-a, b]$ が長さ $a+b$ の閉区間である場合を考える。この時

$$\varphi_{\mathbb{C}^\times}\colon (\mathbb{C}^\times)^2 \to \mathbb{C}^\times, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha^{-a}\beta^b \tag{17.6}$$

であり、その核は $c \coloneqq \gcd(a, b)$ に対し $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ と同型になる。$\partial\Delta$ の単体分割は一意的であり、Stanley-Reisner 軌跡は $\mathbf{0} \coloneqq \{(0,0)\}$ になる。K の $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$ への作用は $(1,0)$ と $(0,1)$ にそれぞれ $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ 及び $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ と同型な固定化部分群を持つ。対応するトーリックスタックを

$$\mathbb{X}_{a,b} \coloneqq [(\mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0})/K] \tag{17.7}$$

と書く。a と b が互いに素なら、$\mathbb{X}_{a,b}$ は $\mathbb{C}^\times$ の $\mathbb{C}^2$ への作用 $(x, y) \mapsto (\alpha^a x, \alpha^b y)$ による $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$ の商 $\mathbb{P}(a, b) \coloneqq [(\mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0})/\mathbb{C}^\times]$ と同型になる。ミラーとして

$$W(x) = x^a - \frac{1}{x^b} \tag{17.8}$$

を取ると、臨界点は $x^{a+b} = b/a$ で定義され、そのうちの 1 つは正の実数である。∞ を起点に取って、臨界値と ∞ を結ぶ実軸上の半直線 γ_1 を消滅経路として選ぶと、対応する Lefschetz 指貫 L_1 は x 平面の正の実軸になる。$n = a+b$, $\zeta_n = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ とおいて、$i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対し、写像 $x \mapsto \zeta_n^i x$ によって L_1 を移したものを $\zeta_n^i L_1$ と書くと、これは $\zeta_n^{ai}\gamma_1$ に沿った Lefscheta 指貫になる。コンパクト集合の外で正の実軸と平行になるように $\zeta_n^{ai}\gamma_1$ を変形すると、$\zeta_n^i L_1$ は無限遠の近傍では $-\frac{2ai\pi}{n}$ 回転され, 0 の近傍では $\frac{2bi\pi}{n}$ 回転される。こうして得られる Lefschetz 指貫を L_{i+1} とおくと、$(L_i)_{i=1}^n$ は Lefschetz 指貫の特基底になる。この特基底に関する深谷–Seidel 圏は容易に計算され、$\mathbb{X}$ の直線束からなる完備強例外列 $(\mathcal{L}_i)_{i=1}^n$ を上手く取ると

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Fuk}\, W}(L_i, L_j) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) \tag{17.9}$$

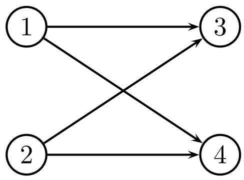
が成り立つことが容易に分かる [62]。

例として、$(a, b) = (1,1), (2,2), (3,5)$ の場合を考える。Lefschetz 指貫の特基底は図 17.1、図 17.2 及び図 17.3 のようになり、対応する箙はそれぞれ (17.10)、(17.11) 及び (17.12) で与えられる。$(a, b) = (1,1)$ の場合は $\mathbb{X} = \mathbb{P}^1$ であり、$(a, b) = (2,2)$ の場合はその被覆であることに注意せよ。

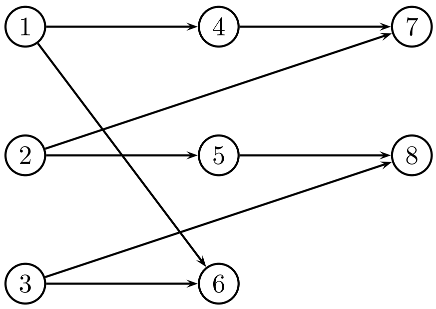
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 2 \end{tikzcd} \tag{17.10}$$

[61] 正準束がネフかつ巨大なスタックを弱 Fano スタックと呼ぶ。

[62] a と b が互いに素なら、$\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(i)$ と取れる。a と b が互いに素でない場合は、a と b が互いに素な場合の被覆として記述できる。



(17.11)



(17.12)

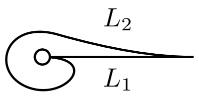


図 17.1: $(a, b) = (1, 1)$

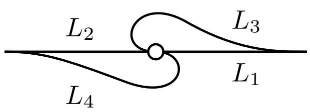


図 17.2: $(a, b) = (1, 1)$

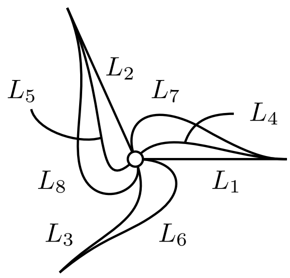


図 17.3: $(a, b) = (1, 1)$

18　半直交分解

三角圏 $\mathcal{T}$ の充満部分圏 $\mathcal{N}$ が右許容的 (right admissible) であるとは、埋め込み関手 $i\colon \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{T}$ が右随伴関手 $i^!\colon \mathcal{T} \to \mathcal{N}$ を持つ事を指す。同様に、埋め込み関手が左随伴関手 $i^*\colon \mathcal{T} \to \mathcal{N}$ を持つ時、左許容的 (left admissible) と呼ぶ。$\mathcal{N}$ が右許容的であるための必要十分条件は、任意の $X \in \mathcal{T}$ に対してある完全三角 $N \to X \to M$ が存在して、$N \in \mathcal{N}$ かつ $M \in \mathcal{N}^\perp$ となる事である。$\mathcal{T}$ と $\mathcal{N}$ が Serre 関手を持てば、

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(X, i(N)) \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{T}(i(N), S_\mathcal{T}(X))^\vee \tag{18.1}$$
$$\cong \mathrm{Hom}_\mathcal{N}(N, i^! \circ S_\mathcal{T}(X))^\vee \tag{18.2}$$
$$\cong \mathrm{Hom}_\mathcal{N}(i^! \circ S_\mathcal{T}(X), S_\mathcal{N}(N)) \tag{18.3}$$
$$\cong \mathrm{Hom}_\mathcal{N}(S_\mathcal{N}^{-1} \circ i^! \circ S_\mathcal{T}(X), N) \tag{18.4}$$

より

$$i^* \cong S_\mathcal{N}^{-1} \circ i^! \circ S_\mathcal{T} \tag{18.5}$$

となるので、左右の許容性は同値である。両側許容部分圏を単に許容部分圏 (admissible subcategory) と呼ぶ。許容部分圏の列 $(\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$ と左許容部分圏の増大列 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{T}_n = \mathcal{T}$ が存在して、任意の $i = 1, \dots, n-1$ に対して $\mathcal{N}_i$ が $\mathcal{T}_i$ で $\mathcal{T}_{i-1}$ に左直交している時、

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n \rangle \tag{18.6}$$

と書き、$\mathcal{T}$ の半直交分解 (semiorthogonal decomposition) と呼ぶ。
三角圏の対象 E が

$$\operatorname{Hom}^i(E,E) = \begin{cases} \mathbb{C}\cdot \mathrm{id}_E & i=0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18.7}$$

を満たす時、例外対象 (exceptional object) と呼ばれる。例外対象の列 $(E_1,\dots,E_n)$ が任意の $i>j$ と $k\in\mathbb{Z}$ に対し

$$\operatorname{Hom}^k(E_i,E_j)=0 \tag{18.8}$$

を満たす時、例外列 (exceptional sequence) と呼ばれる。例外列によって三角圏として生成される部分圏は必ず許容的である。例外列は、$\mathcal{T}$ を三角圏として生成している時、完備 (full) と呼ばれる。完備例外列 $(E_1,\dots,E_n)$ に対し、E_i が生成する $\mathcal{T}$ の三角部分圏を $\mathcal{N}_i$ とおくと、$\mathcal{T}$ の半直交分解 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_n\rangle$ が存在するが、これを $\mathcal{T}=\langle E_1,\dots,E_n\rangle$ と書く。この時の $\mathcal{T}_i$ は $E_1,\dots,E_i$ が生成する $\mathcal{T}$ の三角部分圏である。
微分次数圏 $\mathscr{D}$ とその上の対象の列 $(E_1,\dots,E_n)$ が与えられた時、これらを対象に持つ新たな微分次数圏 $\mathscr{D}^{\to}$ を

$$\hom_{\mathscr{D}^{\to}}(E_i,E_j) \coloneqq \begin{cases} \mathbb{C}\cdot\mathrm{id}_{E_i} & i=j, \\ \hom_{\mathscr{D}}(E_i,E_j) & i<j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18.9}$$

と書き、$(E_1,\dots,E_n)$ に関する $\mathscr{D}$ の有向部分圏 (directed subcatetory) と呼ぶ。有向部分圏は充満ではない部分圏の重要な例になっている。また、$\mathscr{D}$ が Calabi–Yau 圏 (すなわち、$\operatorname{Ho}\mathscr{D}$ において Serre 関手が整数シフトであるような圏) で、$(E_1,\dots,E_n)$ が $\mathscr{D}$ を写像錐と直和因子で生成している時、有向部分圏を取る操作の逆の操作に相当する Calabi–Yau 拡大 (Calabi–Yau extension) と呼ばれる操作がある。これは Fano 多様体の連接層の導来圏に似た圏から Calabi–Yau 多様体の連接層の導来圏に似た圏を作る操作になっている。Calabi–Yau 拡大には自明なもの [Seg08, Bal] とそうでないもの [Kel11] がある。例えば、$\mathscr{D}^{\to}$ が $\mathbb{P}^2$ の連接層の導来圏で、$(E_1,E_2,E_3)=(\mathcal{P}_{\mathbb{P}^2},\mathcal{P}_{\mathbb{P}^2}(1),\mathcal{P}_{\mathbb{P}^2}(2))$ の時、$\mathscr{D}^{\to}$ の次元 1 の非自明な Calabi–Yau 拡大として楕円曲線の連接層の導来圏が得られ、次元 3 の自明な Calabi–Yau 拡大として $\mathbb{P}^2$ の正準束の全空間の連接層の導来圏が得られる。
有向部分圏の導来圏は定義から完備例外列を持ち、深谷–Seidel 圏はまさにこれに該当する。これはホモロジー的ミラー対称性によって、完備トーリック多様体の連接層の導来圏が完備例外列を持つという [Kaw06b] の結果と対応している。また、例外対象を幾つか取り除くことで許容部分圏を得るが、これが極小モデル理論における収縮やフロップと対応していると期待されている [Kaw13, BFK, BO, BO02, Kuzb]。[AKO08] ではこれを用いて Hirzebruch 曲面に対するホモロジー的ミラー予想を証明している。また、[Ker08] ではトーリック曲面の重み付き爆発に対応するミラーの振る舞いを調べている。
半直交分解

$$\mathcal{T}=\langle\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\rangle \tag{18.10}$$

に対し、$\phi=i_2^*\circ i_1\colon\mathcal{N}_1\to\mathcal{N}_2$ を貼り合わせ関手 (gluing functor) と呼ぶ。例えば、$\mathbb{P}^2$ の 1 点爆発を $\pi\colon X\to\mathbb{P}^2$ とおくと、X の連接層の導来圏は

$$D^b\operatorname{coh}X=\left\langle\mathcal{O}_E(-1),\pi^*D^b\operatorname{coh}\mathbb{P}^2\right\rangle,\quad \pi^*D^b\operatorname{coh}\mathbb{P}^2=\langle\mathcal{O},\mathcal{O}(H),\mathcal{O}(2H)\rangle \tag{18.11}$$

という半直交分解を持つ [Orl92]。この時

$$M\coloneqq\phi(\mathcal{O}_E(-1))=i_2^*(\mathcal{O}_E(-1))\in{}^{\perp}(\pi^*D^b\operatorname{coh}\mathbb{P}^2) \tag{18.12}$$

は、$N\in\pi^*D^b\operatorname{coh}\mathbb{P}^2$ によって

$$M\to\mathcal{O}_E(-1)\to N \tag{18.13}$$

なる完全三角によって特徴付けられる。これは (18.11) に沿って $\mathcal{O}_E(-1)$ を変異した

$$D^b \operatorname{coh} X = \left\langle \pi^* D^b \operatorname{coh} \mathbb{P}^2, M \right\rangle \tag{18.14}$$

で与えられる。変異と Serre 関手の関係から

$$M[2] \cong \mathcal{O}_E(-1) \otimes \omega_X^{-1} \cong \mathcal{O}_E(E) \otimes \mathcal{O}(3H - E) \cong \mathcal{O}_E(3H) \cong \mathcal{O}_E \tag{18.15}$$

であり、N は

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_E[-2], \mathcal{O}_E(-1)) &\cong \operatorname{Ext}^2(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_E(-1)) && (18.16)\\
&\cong \operatorname{Ext}^2\left(\{\mathcal{O}(-E) \to \mathcal{O}\}, \mathcal{O}_E(-1)\right) && (18.17)\\
&\cong \mathbb{H}^2\left(\{\mathcal{O}_E(-1) \to \mathcal{O}_E(-2)\}\right) && (18.18)\\
&\cong \mathbb{C} && (18.19)
\end{aligned}$$

の生成元に対応する写像錐である。変異を具体的に書くと、

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_E[-2] \arrow[rr] & & \mathcal{O}(2H-E)[-1] \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathcal{O}(E) \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathcal{O}_E(-1) \arrow[dl] \\
& \mathcal{O}(2H)[-1] \arrow[ul, dashed] & & \mathcal{O}(H)^{\oplus 2} \arrow[ul, dashed] & & \mathcal{O}[1] \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd} \tag{18.20}$$

から

$$N \cong \{\mathcal{O}_E[-2] \to \mathcal{O}_E(-1) \to \pi^* \mathcal{O}_p[1]\} \cong \pi^* \mathcal{O}_p[1] \tag{18.21}$$

となる。但し、

$$\mathcal{O}_p \cong \left\{\mathcal{O}(2H) \to \mathcal{O}(H)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}\right\} \tag{18.22}$$

は爆発の中心 $p \in \mathbb{P}^2$ の構造層である。

連接層の導来圏の半直交分解から来る Hochschild コホモロジーの完全列

$$\cdots \to \operatorname{HH}^i(\mathcal{A}) \to \operatorname{HH}^i(\mathcal{A}_1) \oplus \operatorname{HH}^i(\mathcal{A}_2) \to \operatorname{Ext}(\phi, \phi) \to \cdots \tag{18.23}$$

が [Kuza] に与えられている。また、関連する結果は [Han14] にもある。

森田理論により、Abel 圏の関手 $\phi\colon \operatorname{mod} A_1 \to \operatorname{mod} A_2$ は (A_1, A_2) 両側左 A_1 右 A_2 加群 M によって $X_1 \mapsto X_1 \otimes_{A_1} M$ と表される。集合

$$\begin{pmatrix} A_2 & \\ M & A_1 \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ m & a_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ m \in M \right\} \tag{18.24}$$

に積を

$$\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ m & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2' & 0 \\ m' & a_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_2' & 0 \\ m a_2 + a_1 m' & a_1 a_1' \end{pmatrix} \tag{18.25}$$

で入れたものを $T(A_1, A_2, M)$ と書き、三角行列環 (triangular matrix algebra) と呼ぶ。

$$\left(\begin{pmatrix} u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \\ m & a_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_2' & \\ m' & a_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_2 a_2) a_2' + (u_1 m) a_2' + (u_1 a_1) m' & (u_1 a_1) a_1' \end{pmatrix}, \tag{18.26}$$

$$\begin{pmatrix} u_2 & u_1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_2 & \\ m & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2' & \\ m' & a_1' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_2 (a_2 a_2') + u_1 (m a_2') + u_1 (a_1 m') & u_1 (a_1 a_1') \end{pmatrix} \tag{18.27}$$

なので、$T(A_1,A_2,M)$ 加群を与えることは、A_1 加群 U_1, A_2 加群 U_2 および A_2 加群の準同型 $\varphi\colon U_1 \otimes_{A_1} M \to U_2$ からなる三つ組 (U_1,U_2,φ) を与えることと同値である。三つ組 (U_1,U_2,φ) と (U_1',U_2',φ') の間の射は、$\psi_1 \in \operatorname{Hom}_{A_1}(U_1,U_1')$ と $\psi_2 \in \operatorname{Hom}_{A_2}(U_2,U_2')$ の組 $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ で、図式

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes_{A_1} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi_1\otimes \mathrm{id}_M"'] & U_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ U_1' \otimes_{A_1} M \arrow[r, "\varphi"] & U_2' \end{tikzcd} \tag{18.28}$$

を可換にするもので与えられる。

関手 $i_1\colon \operatorname{mod} A_1 \to \operatorname{mod} T(A_1,A_2,M)$ および $i_2\colon \operatorname{mod} A_2 \to \operatorname{mod} T(A_1,A_2,M)$ を

$$i_1(U_1)=(U_1,0,0),\ i_2(U_2)=(\operatorname{Hom}_{A_2}(M,U_2),U_2),\mathrm{ev}) \tag{18.29}$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{A_2}(\phi(U_1),U_2) &\coloneqq \operatorname{Hom}_A(i_1(U_1),i_2(U_2)) && (18.30)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_1}(U_1,\operatorname{Hom}_{A_2}(M,U_2)) && (18.31)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_2}(U_1\otimes_{A_1} M,U_2), && (18.32)\\ \operatorname{Hom}_A(i_1(U_1),i_2(U_2)) &= 0 && (18.33)\end{aligned}$$

となる。

三角行列環において、$A_1=\mathbb{C}$ の時に、

$$A = T(\mathbb{C},A_2,M) = \begin{pmatrix} A_2 & \\ M & \mathbb{C}\end{pmatrix} \tag{18.34}$$

を A_2 の一点余拡大 (one-point coextension) と呼ぶ。また、左 A_2 加群 N に対して

$$\begin{pmatrix} A_2 & N \\ & \mathbb{C}\end{pmatrix} \tag{18.35}$$

を A_2 の N による一点拡大 (one-point extension) と呼ぶ。これらの概念は [Rin84] によって導入された。

三角行列環を作る方法として、冪等列に対する有向部分環を取るものがある。代数 A の元の列 (e_1,e_2) で

$$e_1^2=e_1,\ e_2^2=e_2,\ e_1e_2=e_2e_1=0,\ 1=e_1+e_2, \tag{18.36}$$

を満たすものを A の冪等列と呼ぶ。代数 A の任意の冪等元 e に対し、$(e,1-e)$ は冪等列である。冪等列 (e_1,e_2) に対し

$$A_1 \coloneqq e_1Ae_1,\ A_2 \coloneqq e_2Ae_2,\ M \coloneqq e_1Ae_2,\ N \coloneqq e_2Ae_1 \tag{18.37}$$

とおくと、M は (A_1,A_2) 両側加群、N は (A_2,A_1) 両側加群であり、A は

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & N \\ M & A_2\end{pmatrix} \tag{18.38}$$

と分解される。この時、

$$A^{\to} \coloneqq T(A_1,A_2,M) \tag{18.39}$$

とおいて、冪等列 (e_1,e_2) に付随する A の有向部分環 (directed subalgebra) と呼ぶ。

三角行列環は Abel 圏や導来圏における再接着 (recollement) の概念と密接に関係する。これは [BBD82] に由来する概念であるが、これについては例えば [FP04] を見よ。

三角行列環の Hochschild コホモロジーは長完全列

$$\cdots \to \mathrm{HH}^i(A) \to \mathrm{HH}^i(A_1)\oplus \mathrm{HH}^i(A_2) \to \operatorname{Ext}_{A_1^{\mathrm{op}}\otimes A_2}(M,M) \to \cdots \tag{18.40}$$

を持つ [Cib00, GG, MP00, GS02, GMS03]。一点拡大の場合には、これらは [Hap89] によってそれ以前に知られていた。

19　ホモロジー的ミラー予想から SYZ 予想へ

Calabi–Yau 多様体の組 (M, W) に対してホモロジー的ミラー対称性 (2.5) が成立している仮定すると、W の各点 p に対して、p における点層 (skyscraper sheaf) $\mathcal{O}_p$ に対応する M の深谷圏の対象が存在する。これは一般には Lagrange 部分多様体の複体であるが、素朴に考えて M の単一の Lagrange 部分多様体として実現されると仮定しよう。この Lagrange 部分多様体を L_p とおくと、圏同値 (2.5) から

$$\mathrm{HF}^*(L_p) \cong \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) \tag{19.1}$$

となる。ここで、$\mathrm{HF}^*(L_p)$ は L_p の Floer コホモロジーである。一方、n 次元の複素多様体上の点層のコホモロジーは常に n 次元トーラス $T^n := (S^1)^n$ の通常のコホモロジーと同型になる;

$$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) \cong H^*(T^n) \tag{19.2}$$

適当な条件のもとで Lagrange 部分多様体の Floer コホモロジーは通常のコホモロジーに一致するので、大らかに考えれば L_p はトーラスであると期待される。相異なる 2 点 $p, q \in W$ に対し、圏同値 (2.5) から

$$\mathrm{HF}^*(L_p, L_q) \cong \mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_q) = 0 \tag{19.3}$$

となるので、再び大らかに考えれば、L_p と L_q は交わらないことが期待される。さらに、点層の集合 $\{\mathcal{O}_p\}_{p \in W}$ は全域類 (spanning class、すなわち任意の $p \in W$ に対して $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_p) = 0$ であれば $E \cong 0$) なので、こうして得られた L_p たちが W 全体を敷き詰めて、W の Lagrange トーラスファイブレーションを与えると期待するのは自然である。ただし、深谷圏における同型類は Lagrange 部分多様体を Hamilton 同相で移しても変わらないので、Lagrange 部分多様体の Hamilton アイソトピー類の中で良い代表元を取る事が必要になる。類似の問題は複素幾何側にもあって、モジュライ空間を構成する際の安定性 (stability) がそれにあたる。連接層の導来圏における安定性は、Calabi–Yau 多様体のフロップと関連が深い [Bri02]。

20　特殊 Lagrange 部分多様体

Kähler 多様体上の連接層としては、点層の他に正則ベクトル束 (holomorphic vector bundle) がある。Donaldson と Uhlenbeck–Yau によって証明された小林–Hitchin 対応 (Hitchin–Kobayashi correspondence) により、安定 (stable) な正則ベクトル束と既約 Hermite Yang–Mills 接続 (irredubicle Hermitian Yang–Mills connection) は 1 対 1 に対応する。これにミラー側で対応すると期待されているのが特殊 Lagrange 部分多様体である。

ホロノミー群が $\mathrm{SU}(n)$ の部分群になるような $2n$ 次元の Riemann 多様体 (M, g) を Calabi–Yau 多様体と呼ぶのであった。$\mathbb{C}^n$ 上の $(1,1)$ 形式

$$\omega_0 := \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(dz_1 \wedge d\overline{z}_1 + \cdots + dz_n \wedge d\overline{z}_n\right) \tag{20.1}$$

と $(n, 0)$ 形式

$$\Omega_0 := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \tag{20.2}$$

は $\mathrm{SU}(n)$ の作用で不変なので、ある点の接空間から出発して平行移動によって拡張することで、Calabi–Yau 多様体上の微分形式 ω と Ω で、共変微分が零であるようなものを得る事が出来る。これらは、それぞれ M の Kähler 形式と正則体積形式 (holomorphic volume form) を与える。ω_0 と Ω_0 は関係式

$$\frac{1}{n!}\omega_0^n = (-1)^{n(n-1)/2}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega_0 \wedge \overline{\Omega}_0 \tag{20.3}$$

を満たすので、ω と Ω も同様に

$$\frac{1}{n!}\omega^n = (-1)^{n(n-1)/2}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega \wedge \overline{\Omega} \tag{20.4}$$

を満たす。M の n 次元部分多様体 L が

$$\omega|_L = 0 \tag{20.5}$$

を満たす時、L を Lagrange 部分多様体 (Lagrangian submanifold) と呼ぶ。ある実数 θ があって、Lagrange 部分多様体 L が

$$\mathfrak{Im}\left(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega\right)\Big|_L = 0 \tag{20.6}$$

を満たす時、L を位相 (phase) が θ の特殊 Lagrange 部分多様体 (special Lagrangian submanifold) と呼ぶ。Ω を定数倍する事で位相は必ず 0 にできるので、単一の特殊 Lagrange 部分多様体を扱っている限りでは位相は本質的ではない。

21 極小部分多様体

(M, g_M) を Riemann 多様体とし、L をその部分多様体とする。L の接束の g_M に関する直交補空間を L の法束 (normal bundle) と呼び、$N_{L/M}$ と書く;

$$TM_L \coloneqq TL \perp N_{L/M}. \tag{21.1}$$

L の上のベクトル場 $v, w \in \Gamma(TL)$ に対し、$\widetilde{v}|_L = v$ および $\widetilde{w}|_L = w$ を満たす M 上のベクトル場 $\widetilde{v}, \widetilde{w} \in \Gamma(TM)$ を任意に取って

$$B(v, w) \coloneqq \pi_{N_{L/M}}(\nabla_{\widetilde{v}}\widetilde{w}) \tag{21.2}$$

と置く。但し、

$$\pi_{N_{L/M}} \colon TM_L \to N_{L/M} \tag{21.3}$$

は直交分解 (21.1) に関する射影であり、∇ は g_M に関する TM の Levi-Civita 接続である。(21.2) の右辺は明らかに $\widetilde{v}$ の取り方に依らない。また、$\widetilde{v}|_L, \widetilde{w}|_L \in \Gamma\left(TM|_L\right)$ が $\Gamma(TL)$ の元なので $[\widetilde{v}, \widetilde{w}]|_L \in \Gamma\left(TM|_L\right)$ も $\Gamma(TL)$ の元である事と、Levi-Civita 接続の零捩率条件 $\nabla_{\widetilde{v}}\widetilde{w} - \nabla_{\widetilde{w}}\widetilde{v} = [\widetilde{v}, \widetilde{w}]$ から、(21.2) の右辺は $\widetilde{v}$ と $\widetilde{w}$ の入れ替えに関して対称である。従って (21.2) の右辺は $\widetilde{w}$ の取り方にも依らず、$\Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*L \otimes N_{L/M})$ の元を定めるが、これを L の第 2 基本形式 (second fundamental form) と呼ぶ。L の計量 $g_L \coloneqq g|_L$ に関する第 2 基本形式 B の跡 (trace) を L の平均曲率 (mean curvature) と呼ぶ;

$$H \coloneqq \mathrm{tr}_{g|_L} B \in C^\infty(L, N_{L_M}). \tag{21.4}$$

体積汎関数

$$\mathrm{Vol}(L) \coloneqq \int_L \mathrm{vol}\, L \tag{21.5}$$

に関する Euler-Lagrange 方程式は、2 階の非線形偏微分方程式

$$H = 0 \tag{21.6}$$

を与える事が知られている。

22 校正幾何学

Riemann 多様体 (M, g_M) 上の k 次微分形式が以下の 2 つの条件を満たす時、k 次の校正形式 (calibration) と呼ばれる:

1. φ は閉形式である。

2. 任意の点 $p \in M$ と任意の向き付けられた k 次元部分空間 $W \subset T_pM$ に対し、不等式

$$\varphi|_{\bigwedge^k W} \leq \mathrm{vol}_W \tag{22.1}$$

が成り立つ。

M の向き付けられた k 次元部分多様体 N が、任意の $p \in N$ に対して不等式 (22.1) における等号

$$\varphi|_{\bigwedge^k T_pN} = \mathrm{vol}_{T_pN} \tag{22.2}$$

を満たす時、N を校正部分多様体 (calibrated submanifold) と呼ぶ。校正形式の定義から直ちに不等式

$$\mathrm{Vol}\,(N, g|_N) = \int_N \mathrm{vol}_N \leq \int_N \varphi \tag{22.3}$$

を得る。ここで、(22.3) の右辺は N のホモロジー類 $[N] \in H_k(M, \mathbb{Z})$ にしか依存しないことに注意せよ。これは Yang-Mills-Higgs 汎関数に対する Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield 不等式の類似である。不等式 (22.3) から直ちに、校正部分多様体がそれの属するホモロジー類の中で最小の体積を持つ事が従う。特に、校正部分多様体は極小部分多様体である。極小部分多様体の方程式 (21.6) と校正部分多様体の方程式 (22.2) の関係は、Yang–Mills 方程式 $D^*F = 0$ と ASD 方程式 $*F = -F$ の関係とよく似ている。前者は 2 階の偏微分方程式であり、汎関数の停留点を与える一方、後者は 1 階の偏微分方程式であり、汎関数の最小値を与える。

校正形式と校正部分多様体の概念は [HL82] で導入された。校正形式の最も基本的な例は Kähler 多様体における Kähler 形式の冪 ω^k であり、この場合に校正部分多様体であるための必要十分条件は、複素部分多様体である事である。Calabi–Yau 多様体 $(M, g, J, \omega, \Omega)$ に対し、$\mathfrak{Re}\,\Omega$ は校正形式であり、この場合の校正部分多様体は特殊 Lagrange 部分多様体になる。その他の校正部分多様体の例としては、G_2 多様体における結合部分多様体 (associative 3-fold) や余結合部分多様体 (coassociative 4-fold)、それに Spin(7) 多様体における Cayley 部分多様体 (Caley 4-fold) などがある。

23 McLean の定理

$(M, g_M, J, \omega, \Omega)$ を Calabi–Yau 多様体とし、L をその特殊 Lagrange 部分多様体とする。L の Riemann 計量 $g_L \coloneqq (g_M)|_L$ に関する Hodge の星状作用素を $*_L \colon \Omega^k(L) \to \Omega^{n-k}(L)$ と書く。$\nu \in \Gamma\left(N_{L/X}\right)$ を L の法ベクトル場とすると、

$$\left(\iota_\nu \,\mathfrak{Im}\,\Omega\right)\big|_L = - *_L \left(\left(\iota_\nu \omega\right)\big|_L\right) \tag{23.1}$$

が成り立つ。実際、(23.1) は微分を含まないので、各点ごとに接空間の適当な基底を取る事によって、$M = \mathbb{C}^n$ かつ $L = \mathbb{R}^n$ で

$$\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = (dx_1 + \sqrt{-1}dy_1) \wedge \cdots \wedge (dx_n + \sqrt{-1}dy_n), \tag{23.2}$$

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n, \tag{23.3}$$

$$\nu = \frac{\partial}{\partial y_1} \tag{23.4}$$

である場合に帰着されるが、この時に (23.1) の両辺とも $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ となる事が容易に分かる。

法ベクトル場 ν による L の微小変形が特殊 Lagrange 多様体であるための必要十分条件は

$$\mathscr{L}_\nu \,\mathfrak{Im}\,\Omega = \mathscr{L}_\nu \omega = 0 \tag{23.5}$$

である。Cartan のホモトピー公式

$$\mathscr{L}_\nu = d \circ \iota_\nu + \iota_\nu d \tag{23.6}$$

と、Ω および ω が閉形式であることを使うと、この条件は

$$d\iota_\nu\omega = d\iota_\nu \,\mathfrak{Im}\,\Omega = 0 \tag{23.7}$$

と書き換えられる。(23.1) により、この条件は

$$d\iota_\nu\omega = d(*\iota_\nu\omega) = 0, \tag{23.8}$$

すなわち $\iota_\nu\omega$ が調和 1 形式である事と同値である。Banach 多様体における陰関数定理を用いる事によって、McLean は次の定理を示した:

定理 23.1 ([McL98, Theorem 3.6])**.** 特殊 Lagrange 部分多様体のモジュライ空間は滑らかであり、その L における接空間は L 上の調和形式の空間と自然に同一視される。

特に、特殊 Lagrange 部分多様体のモジュライ空間の次元は L の第 1Betti 数に等しい。$\nu_1, \nu_2 \in \Gamma\left(N_{L/M}\right)$ に対し

$$g(\nu_1,\nu_2) = \int_{L_b} (\iota_{\nu_1}\omega)\wedge *(\iota_{\nu_2}\omega) \tag{23.9}$$

と置くと、これは特殊 Lagrange 部分多様体のモジュライ空間の計量を定めるが、これを McLean 計量 (McLean metric) と呼ぶ。

24 Hesse 構造

アファイン多様体 M 上の Riemann 計量 g が Hesse 計量 (Hessian metric) であるとは、各点 $p \in M$ に対して、p の近傍 U のアファイン座標 $\{y_i\}_{i=1}^n$ と、U 上の関数 K が存在して、

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial y_i \partial y_j} \tag{24.1}$$

を満たすことを指す。M のアファイン構造を定める接続 D を用いると、(24.1) は座標に依らない形で

$$g = DdK \tag{24.2}$$

と書ける。一般に D は g に関する Levi-Civita 接続 ∇ と一致しない事に注意せよ。計量 g が正定値である事から、K は凸関数になり、アファイン関数を加える自由度を除いて一意的に決まる。

アファイン座標を用いて U を $\mathbb{R}^n$ の開集合と同一視し、写像 $\check{y} = (\check{y}_1,\dots,\check{y}_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ を

$$\check{y}_i = \frac{\partial K}{\partial y_i} \tag{24.3}$$

で定義すると、K の凸性から $\check{y}$ は単射になり、U の座標を与える。さらに、U の関数 $\check{K}$ を

$$\check{K} \coloneqq \sum_{i=1}^n \check{y}_i y_i - K \tag{24.4}$$

で定義すると、

$$\frac{\partial \check{K}}{\partial \check{y}_i} = y_i + \sum_{j=1}^n \check{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial \check{y}_i} - \frac{\partial K}{\partial \check{y}_i} \tag{24.5}$$

$$= y_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial K}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial \check{y}_i} - \frac{\partial K}{\partial \check{y}_i} \tag{24.6}$$

$$= y_i \tag{24.7}$$

かつ

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \check{y}_i}, \frac{\partial}{\partial \check{y}_j}\right) = g\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial \check{y}_i}\frac{\partial}{\partial y_k}, \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial \check{y}_i}\frac{\partial}{\partial y_l}\right) \tag{24.8}$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial \check{y}_i}\frac{\partial y_l}{\partial \check{y}_i} g\left(\frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l}\right) \tag{24.9}$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial \check{y}_i}\frac{\partial y_l}{\partial \check{y}_i}\frac{\partial \check{y}_k}{\partial y_l} \tag{24.10}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial \check{y}_i}\frac{\partial y_k}{\partial \check{y}_j} \tag{24.11}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial \check{y}_i} \tag{24.12}$$

$$= \frac{\partial^2 \check{K}}{\partial \check{y}_i \partial \check{y}_j} \tag{24.13}$$

となる。従って、(U, g) は $((\check{y}_i)_{i=1}^n)$ をアファイン座標とするような Hesse 構造を持つが、これを双対 Hesse 構造 (dual Hesse structure) と呼ぶ。また、$((y_i)_{i=1}^n, K)$ から $((\check{y}_i)_{i=1}^n, \check{K})$ への変換は Legendre 変換 (Legendre transformation) と呼ばれる。この構成は貼り合って M の双対 Hesse 構造を定める。

25 シンプレクティックアファイン構造

$\pi\colon X \to B$ を Lagrange トーラスファイバー束とする。底空間の点 b_0 に対し、その近傍 U における π の自明化 $\pi^{-1}(U) \cong U \times T^n$ を取る。トーラス $T^n \coloneqq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上の 1 サイクルの標準基底を $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ とおき、ω の γ_i に沿った積分として

$$\omega_i \coloneqq \int_{\gamma_i} \omega \tag{25.1}$$

を定める。これは、$\nu \in T_b B$ に対して

$$\omega_i(\nu) \coloneqq \int_{\gamma_i} \iota_{\widetilde{\nu}}(\omega) \tag{25.2}$$

を与えるような底空間上の 1 次微分形式である。但し、$\widetilde{\nu}$ は任意の $x \in L_b \coloneqq \pi^{-1}(b)$ に対して $\pi_*(\widetilde{\nu}(x)) = \nu$ を満たすような $TX|_{L_b}$ の切断である。L_b の Lagrange 条件

$$\omega|_{L_b} = 0 \tag{25.3}$$

により、(25.2) の右辺は $\widetilde{\nu}$ の取り方に依らずに決まる。また、ω が閉形式であることから、ω_i も閉形式であることが従う。従って、U を十分小さく取れば、U 上のある関数 y_i が存在して、

$$dy_i = \omega_i \tag{25.4}$$

を満たす。このような y_i はトロピカルアファイン変換 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の作用を除いて一意的に定まる。$U \cap U'$ 上で関数 $\{y_i\}_{i=1}^n$ と $\{y'_i\}_{i=1}^n$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の作用によって互いに結びついている。これによって、B にトロピカルアファイン構造が定まるが、これを B のシンプレクティックアファイン構造 (symplectic affine strcutre) と呼ぶ。

26 複素アファイン構造

同様に、$\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ を T^n の $(n-1)$ サイクルの標準基底とする。

$$\lambda_i = -\int_{\Gamma_i} \mathfrak{Im}\,\Omega \tag{26.1}$$

とおくと、$d\lambda_i = 0$ となり、$\{\check{y}_i\}_{i=1}^n$ が存在して

$$\lambda_i = d\check{y}_i \tag{26.2}$$

となる。B にはこの $\{\check{y}_i\}_{i=1}^n$ を局所座標とするトロピカルアファイン構造が定まるが、これを B の複素アファイン構造 (complex tropical affine strcutre) と呼ぶ。

27 Hitchin の定理

定理 27.1. McLean 計量は Hesse 計量であり、シンプレクティックアファイン構造と複素アファイン構造は互いに双対的である。

Proof. $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ と $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ を $\gamma_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij}$ となるように選ぶ。

$$\delta_{ij} = dy_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \int_{\gamma_i} \iota_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \omega \tag{27.1}$$

なので、

$$\left[\iota_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \omega\right] \in H^1(L_b) \tag{27.2}$$

は γ_j に双対な元 γ_j^* である。

$$\begin{aligned} g_{ij} &\coloneqq g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) && (27.3)\\ &= -\int_{L_b} \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \omega\right) \wedge \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \mathfrak{Im}\,\Omega\right) && (27.4)\\ &= -\int_{L_b} \gamma_i^* \wedge \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \mathfrak{Im}\,\Omega\right) && (27.5)\\ &= -\int_{\Gamma_i} \iota_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \mathfrak{Im}\,\Omega && (27.6)\\ &= \frac{\partial \check{y}_i}{\partial y_j} && (27.7) \end{aligned}$$

が成り立つが、$g_{ij} = g_{ji}$ なので、

$$\frac{\partial \check{y}_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \check{y}_j}{\partial y_i} \tag{27.8}$$

であり、ある K が存在して

$$\check{y}_i = \frac{\partial K}{\partial y_i} \tag{27.9}$$

と書ける。これは g が Hesse 計量で、$(y_i)_{i=1}^n$ と $(\check{y}_i)_{i=1}^n$ が Legendre 双対なアファイン座標であることを示している。 □

例 27.2. 代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ に平坦な計量を

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n dr_i \wedge d\theta_i \tag{27.10}$$

で入れる。但し、

$$z_i = \exp(r_i + \sqrt{-1}\theta_i) \tag{27.11}$$

とおいた。正則体積形式を

$$\Omega = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \frac{dz_n}{z_n} \tag{27.12}$$

で定義すると、

$$y_i = \check{y}_i = r_i \tag{27.13}$$

となる事が容易に分かる。

28 半平坦ミラー対称性

B をトロピカルアファイン多様体とし、$\pi\colon X(B) \coloneqq TB/T_{\mathbb{Z}}B \to B$ と $\check{\pi}\colon \check{X}(B) \coloneqq T^*B/T^*_{\mathbb{Z}}B$ を双対トーラスファイブレーションとする。$y = (y_1, \ldots, y_n)$ を B のトロピカルアファイン座標とし、$x = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\check{x} = (\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ を y に対応する π および $\check{\pi}$ のファイバー方向の座標とする。この座標によって、$X(B)$ の自然な複素構造は $J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}$ で与えられる。これは、$X(B)$ の複素座標が $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ で与えられると言っても同じことである。また、$\check{X}(B)$ のシンプレクティック構造は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} d\check{x}_i \wedge dx_i \tag{28.1}$$

で与えられる。

B が Hesse 計量を持ち、そのポテンシャルが K で与えられる時、$X(B)$ は

$$\omega = q\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}(K \circ \pi) = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial y_j \partial y_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k \tag{28.2}$$

を Kähler 形式とする Kähler 構造を持つ。また、$X(B)$ は

$$\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \tag{28.3}$$

で与えられる正則体積形式を持つ。ω^n が $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ の定数倍になるための必要十分条件は、K が実 Monge-Ampère 方程式

$$\det\left(\left(\frac{\partial^2 K}{\partial y_j \partial y_k}\right)^n_{j,k=1}\right) = \text{定数} \tag{28.4}$$

を満たす事である。また、$\check{X}(B)$ においては、複素座標は

$$\check{z}_j = \check{x}_j + \sqrt{-1}\frac{\partial K}{\partial y_j} \tag{28.5}$$

Kähler 形式は

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k, \quad g_{jk} = \frac{\partial^2 K}{\partial y_j \partial y_k} \tag{28.6}$$

で与えられ、Calabi–Yau 条件 $\omega^n \propto \Omega \wedge \overline{\Omega}$ は再び実 Monge-Ampère 方程式

$$\det\left(\left(\frac{\partial^2 K}{\partial y_j \partial y_k}\right)^n_{j,k=1}\right) = \text{定数} \tag{28.7}$$

になる。実 Monge-Ampère 方程式を満たす Hesse 多様体を Monge-Ampère 多様体と呼ぶ。

29 Fourier–SYZ 変換

Lagrange トーラスファイブレーションの切断 $s\colon B \to \check{X}(B)$ を

$$s(y) = s_1(y)\check{x}_1 + \cdots + s_n(y)\check{x}_n \tag{29.1}$$

と書き、これに対して $X(B)$ 上の自明な $U(1)$ 束の接続を

$$\nabla = d + \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} s_i(y)dx_i \tag{29.2}$$

で定義する。この接続の曲率は

$$F = d\left(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} s_i(y)dx_i\right) \tag{29.3}$$

$$= -\sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial y_j} dx_i \wedge dy_j \tag{29.4}$$

であり、その $(2,0)$ 成分は

$$F^{2,0} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial s_i}{\partial y_j} - \frac{\partial s_j}{\partial y_i}\right) dz_i \wedge dz_j \tag{29.5}$$

なので、s が Lagrange 切断であるための必要十分条件は、∇ が正則であることである。

30 非コンパクト概 Calabi-Yau 多様体上の特殊 Lagrange トーラスファイバー束

Kähler 多様体 (M, g, J, ω) と正則体積形式 $\Omega \in H^0\left(\bigwedge^n \mathcal{T}_M^*\right)$ の組 $(M, g, J, \omega, \Omega)$ は Joyce によって**概 Calabi-Yau 多様体** (almost Calabi-Yau manifold) と名付けられた ([Joy05, Section 4.1] を見よ)。Calabi-Yau 多様体との違いは、(20.4) を要求しないことである。従って、概 Calabi-Yau 多様体は Ricci 平坦とは限らない。この節では [Gro01] に沿って、非コンパクト概 Calabi-Yau 多様体上の特殊 Lagrange トーラスファイバー束の構成について解説する。また、[Gol01, Joy02, GHJ03] なども見よ。

m 次元のトーラス $T = (S^1)^n$ が n 次元の概 Calabi-Yau 多様体 (X, J, ω, Ω) への効果的な Hamilton 作用を持つとする。すなわち、J, ω および Ω は T の作用で不変であり、X の任意の点を固定する T の元は単位元のみであるとする。この作用の運動量写像を $\mu\colon X \to \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^m$ とおく。必要であれば X を稠密な開部分集合に取り替えることによって、T の作用は自由で、μ は臨界点を持たないと仮定する。T の作用が J を保つので、T 作用の基本ベクトル場として正則 (holomorphic) なものを考えることができるが、これを $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ とおく。実の基本ベクトル場 $X_1, \ldots, X_m$ との関係は

$$X_i = \mathcal{X}_i + \overline{\mathcal{X}_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{30.1}$$

で与えられる。

例 30.1. $\mathbb{C}$ の標準的な S^1 作用

$$e^{\sqrt{-1}\theta}\colon z \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta} z \tag{30.2}$$

を考えると、正則基本ベクトル場は

$$\mathcal{X} = \sqrt{-1} z \frac{\partial}{\partial z} \tag{30.3}$$

$$= \sqrt{-1}\left(x + \sqrt{-1}y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{30.4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{30.5}$$

であり、実の基本ベクトル場は

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{30.6}$$

である。

定理 30.2. 任意の $\xi \in \mathfrak{t}^*$ に対し、

$$\Omega_{\mathrm{red}} \coloneqq \iota(X_1, \dots, X_m)\Omega \tag{30.7}$$

はシンプレクティック商

$$X/\!/_{\xi}T \coloneqq \mu^{-1}(\xi)/T \tag{30.8}$$

上の $(n-m)$ 形式を定め、$(X/\!/_{\xi}T, J_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}}, \Omega_{\mathrm{red}})$ は概 Calabi-Yau 多様体になる。

Proof. シンプレクティック商の一般論から、$(X/\!/_{\xi}T, J_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}})$ は Kähler 多様体であるので、Ω_{red} がどこでも零にならない正則 $(n-m)$ 形式を定めることを示せば良い。$\overline{p} \in X/\!/_{\xi}T$ における $X/\!/_{\xi}T$ の接空間の元 $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_{n-m}$ に対し、その $p \in \mu^{-1}(\overline{p})$ における接空間 $T_p\mu^{-1}(\overline{p})$ への持ち上げを $Y_1, \dots, Y_{n-m}$ とおく。$Y_1, \dots, Y_{n-m}$ は、$X_1, \dots, X_m$ の線形結合を加える自由度を除いて一意的に決まるが、$Y_1, \dots, Y_{n-m}$ に $X_1, \dots, X_m$ の線形結合を加えても、Ω の反対称性から

$$\Omega(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_{n-m}) \tag{30.9}$$

は不変に保たれるので、Ω_{red} はシンプレクティック商 $X/\!/_{\xi}T$ 上の微分形式を定義する。Ω は $(n, 0)$ 形式なので

$$\iota(X_1, \dots, X_m)\Omega = \iota(\mathcal{X}_1 + \overline{\mathcal{X}}_1, \dots, \mathcal{X}_m + \overline{\mathcal{X}}_m)\Omega = \iota(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m)\Omega \tag{30.10}$$

である。Ω が正則微分形式で、$\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ は正則ベクトル場なので、(30.10) の右辺の $\iota(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m)\Omega$ も正則な微分形式である。Ω がどこでも零にならない n 形式で、$\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ は X の任意の点で一次独立なので、Ω_{red} もどこでも零にならない。 □

定理 30.3. (X, J, ω, Ω) を n 次元の概 Calabi–Yau 多様体とする。また、m 次元の実トーラス $T = (S^1)^m$ の X への Hamilton 作用で、Ω を保つものが与えられているとする。T 作用の Hamilton 関数を $\mu\colon X \to \mathfrak{t}^*$ とし、μ の正則値の集合を $(\mathfrak{t}^*)^{\mathrm{reg}}$ で表す。更に、$(n-m)$ 次元多様体 B' と T 不変な写像 $\pi'\colon X \to B'$ が与えられていて、任意の $\xi \in (\mathfrak{t}^*)^{\mathrm{reg}}$ に対し、π' が誘導する写像 $\overline{\pi}'\colon X/\!/_{\xi}T \to B$ は $X/\!/_{\xi}T$ の特殊 Lagrange トーラスファイバー束である時、写像

$$\pi \coloneqq (\mu, \pi')\colon X \to \mathfrak{t}^* \times B' \tag{30.11}$$

は X の特殊 Lagrange トーラスファイバー束を与える。

Proof. $x \in X$ を μ の正則点とし、対応する正則値を $\xi \coloneqq \mu(x)$ と置く。シンプレクティック商 $X/\!/_{\xi}T \coloneqq \mu^{-1}(\xi)/T$ に於いて x の代表する点を $[x]$ で表し、$[x]$ を通る $\overline{\pi}'\colon X/\!/_{\xi}T \to B'$ のファイバーを $\overline{L}_{b'} \coloneqq \overline{\pi}'^{-1}(b')$ と置く。ここで $b' \coloneqq \overline{\pi}'([x]) = \pi'(x)$ である。$[x]$ に於ける $\overline{L}_{b'}$ の接空間の基底を $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_{n-m}$ とし、その $T_x\left(\mu^{-1}(\xi)\right)$ への持ち上げを $Y_1, \dots, Y_{n-m}$ と置くと、$\{X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_{n-m}\}$ は T_xL_b の基底を成す。但し、$X_1, \dots, X_m$ は T 作用の基本ベクトル場である。T の可換性から X_i 同士は ω に関して直交し、運動量写像の定義から X_i たちと Y_j たちは ω に関して直交するので、$\overline{L}_{b'}$ が Lagrange 部分多様体であれば $L_{\xi,b}$ も Lagrange 部分多様体である。Ω_{red} の定義から

$$\mathfrak{Im}\,\Omega_{\mathrm{red}}(\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_{n-m}) = \mathfrak{Im}\,\Omega(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_{n-m}) \tag{30.12}$$

なので、$\overline{L}_{b'}$ が特殊 Lagrange 部分多様体である事から、$L_{\xi,b}$ が特殊 Lagrange 部分多様体である事が従う。 □

定理 30.3 の典型的な適用例として、$\mathbb{C}^n$ 内の領域 U 上の Kähler 形式が、関数

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{30.13}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\overline{\partial}\varphi\left(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2\right) && (30.14)\\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i z_i d\overline{z}_i\right) && (30.15)\\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i dz_i \wedge d\overline{z}_i + \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} z_i \overline{z}_j dz_j \wedge d\overline{z}_i\right) && (30.16)\\ & && (30.17) \end{aligned}$$

で与えられている状況を考える。ここで、

$$\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad \varphi_{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \tag{30.18}$$

とおいた。

系 30.4. 写像

$$f\colon U \to \mathbb{R}^n,\ z \mapsto \left(\varphi_1|z_1|^2 - \varphi_2|z_2|^2, \dots, \varphi_1|z_1|^2 - \varphi_n|z_n|^2, \mathfrak{Im}\left(\sqrt{-1}^{n+1}\prod_{i=1}^n z_i\right)\right) \tag{30.19}$$

の正則値の逆像は ω と $\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ に関する特殊 Lagrange 部分多様体である。

Proof. Kähler 形式 ω は、

$$X_i = \sqrt{-1}\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} - \overline{z}_i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}\right), \quad i = 1, \dots, n \tag{30.20}$$

を基本ベクトル場に持つ自然な T^n 作用に関して不変である。

$$\iota_{X_i}\omega = \varphi_i\left(z_i d\overline{z}_i + \overline{z}_i dz_i\right) + \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}\left|z_i\right|^2\left(z_j dz_j + \overline{z}_i dz_i\right) = d\left(\varphi_j\left|z_j\right|^2\right) \tag{30.21}$$

より、T^n 作用の運動量写像は

$$z \mapsto \left(\varphi_i\left|z_i\right|^2\right)_{i=1}^n \tag{30.22}$$

で与えられるので、正則体積形式 Ω を保つ $(n-1)$ 次元の部分トーラス

$$T \coloneqq \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in T^n \mid \alpha_1 \cdots \alpha_n = 1\} \cong T^{n-1} \tag{30.23}$$

の作用の運動量写像は

$$\mu\colon z \mapsto \left(\varphi_1\left|z_1\right|^2 - \varphi_2\left|z_2\right|^2, \dots, \varphi_1\left|z_1\right|^2 - \varphi_n\left|z_n\right|^2\right) \tag{30.24}$$

となる。ある $1 \le i < j \le n$ が存在して $z_i = z_j = 0$ となるような $\mathbb{C}^n$ の点が μ の臨界点である。正則値におけるシンプレクティック商は $\mathbb{C}$ であり、その座標は $\prod_{i=1}^n z_i$、正則体積形式は

$$\Omega_{\mathrm{red}} \coloneqq \iota(X_1 - X_2, \dots, X_1 - X_n)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = \sqrt{-1}^{n-1} d\left(\prod_{i=1}^n z_i\right) \tag{30.25}$$

で与えられる。T 不変な写像

$$\pi'\colon X \to B' \coloneqq \mathbb{R}, \quad z \mapsto \mathfrak{Im}\left(\sqrt{-1}^{n+1}\prod_{i=1}^n z_i\right) \tag{30.26}$$

は、シンプレクティック商の上の特殊 Lagrange トーラスファイブレーションを与える。 ☐

31 A_1 特異点

複素数 a_0, a_1 に対し

$$Y := \left\{(z,u,v) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; uv = (z-a_0)(z-a_1)\right\} \tag{31.1}$$

で定義される $\mathbb{C}^3$ の超曲面は、$a_0 = a_1$ の時 $(z,u,v) = (a_0,0,0)$ に A_1 特異点を持ち、$a_0 \neq a_1$ ならば非特異である。相異なる $a_0, a_1 \in \mathbb{C}^\times$ を 1 つ選んで固定し、Y の開部分多様体

$$Y^0 := \{(z,u,v) \in Y \mid z \neq 0\} \tag{31.2}$$

を考える。Kähler 形式と正則体積形式を

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi |z|^2} + du \wedge d\overline{u} + dv \wedge d\overline{v} \right\}\Bigg|_{Y^0}, \tag{31.3}$$

$$\Omega = d\log z \wedge d\log u \Big|_{Y^0} \tag{31.4}$$

で定めることで、Y^0 は概 Calabi–Yau 多様体になる。Y^0 は

$$S^1 \ni e^{\sqrt{-1}\theta} \colon (z,u,v) \mapsto \left(z, e^{\sqrt{-1}\theta}u, e^{-\sqrt{-1}\theta}v\right) \tag{31.5}$$

によって自然な S^1 作用を持つが、これは

$$\mu \colon Y^0 \to \mathbb{R}, \quad (z,u,v) \mapsto \frac{1}{2}(|u|^2 - |v|^2) \tag{31.6}$$

を Hamilton 関数とする Hamilton 作用であり、正則体積形式 Ω を保つ。μ の正則値におけるシンプレクティック商は z 平面に適当なシンプレクティック形式を与えたものと自然に同一視され、$s \colon z \mapsto \log|z|$ はその上の特殊 Lagrange ファイブレーションを与える事から、定理 30.3 によって

$$\pi = (s,\mu) \colon Y^0 \to \mathbb{R}^2, \quad (z,u,v) \mapsto \left(\log|z|, \frac{1}{2}(|u|^2 - |v|^2)\right) \tag{31.7}$$

は Y^0 の特殊 Lagrange ファイブレーションを与える。$b = (s,\mu) \in \mathbb{R}^2$ に於ける π のファイバーは

$$L_b := \left\{(z,u,v) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; uv = (z-a_0)(z-a_1),\ |z| = r,\ |u|^2 - |v|^2 = 2\mu\right\} \tag{31.8}$$

で与えられる。

任意の b に対し、z 射影 $p \colon (z,u,v) \mapsto z$ は L_b から $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = r\} \cong S^1$ への全射を与える。L_b に於いて z を固定すると $|u|$ と $|v|$ も固定される事に注意すると、この射影のファイバーは $z \neq a_0, a_1$ の時 S^1 と同相であり、$z = a_0$ または $z = a_1$ の時 1 点になる事が分かる。従って、π の判別式集合は $\Gamma := \{(s_0,0),(s_1,0)\}$ であり、これらの点の上のファイバーは $S^1 \times S^1$ のサイクルを 1 つ潰したものになる。但し、$i = 0,1$ に対して $s_i := \log|a_i|$ と置いた。

滑らかなファイバー L_b の 1 次ホモロジー群 $H_1(L_b;\mathbb{Z})$ は、z 射影の切断とファイバーによって生成される。L_b に向き付けられた円周が埋め込まれている時、その属するホモロジー類は、z 平面、u 平面及び v 平面に射影したものの原点の周りでの回転数 φ_z, φ_u 及び φ_v によって指定される。

$$uv = (z-a_0)(z-a_1) \tag{31.9}$$

であることから、$\mathbb{R}^2$ を 3 つの領域

$$U_0 := \left\{(s,\mu) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; s < s_0\right\}, \tag{31.10}$$

$$U_1 := \left\{(s,\mu) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; s_0 < s < s_1\right\}, \tag{31.11}$$

$$U_2 := \left\{(s,\mu) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; s_1 < s\right\} \tag{31.12}$$

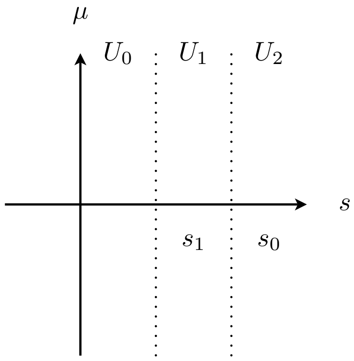


図 31.1: 底空間上の判別式と壁

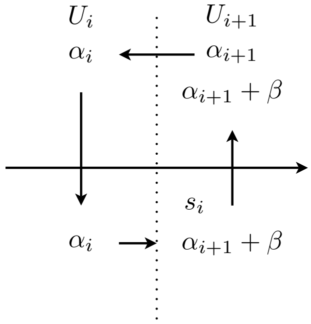


図 31.2: モノドロミー

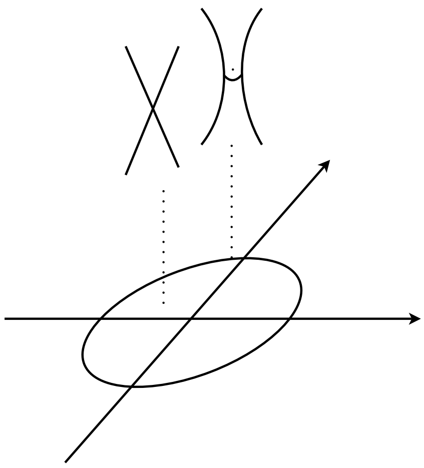


図 31.3: Lagrange トーラス

とその補集合に分けると、これらの回転数は

$$\varphi_u + \varphi_v = \begin{cases} 0 & U_0 \text{ 上で} \\ \varphi_z & U_1 \text{ 上で} \\ 2\varphi_z & U_2 \text{ 上で} \end{cases} \tag{31.13}$$

を満たす。$b \in U_i$ における $H_1(L_b;\mathbb{Z})$ の基底は

$$\alpha_i \coloneqq \left\{ (z,u,v) \in L_b \;\middle|\; z = re^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \text{であり、} u \text{ と } v \text{ の原点の周りの回転数は } 0 \text{ と } i \right\}, \tag{31.14}$$

$$\beta \coloneqq \left\{ (z,u,v) \in L_b \;\middle|\; z = r,\ u = |u| \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}\theta},\ v = |v| \cdot e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta} \right\} \tag{31.15}$$

で与えられる。β の定義において、z を固定すると $|u|$ と $|v|$ は固定されることに注意せよ。α_i は i に依存するが、β は i に依存しない。

ホモロジー類 $\alpha \in H_1(L_b;\mathbb{Z})$ は全ての $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ に対して well-defined であるのに対し、β_i は Γ の周りでモノドロミーを持つ。もし β_i を U_i から U_{i+1} に $\mu > 0$ の領域を通って移動させると、ここでは常に $u > 0$ が成り立つ一方、$z = a_i$ で $v = 0$ となる。従って、φ_u はこの操作で不変であり、φ_v は 1 だけ増える事が分かる。同様に、β_i を U_i から U_{i+1} に $\mu < 0$ の領域を通って移動させると、φ_u は 1 だけ増える一方、φ_v は不変に保たれる。

α_i と β に対する回転数 $(\varphi_z, \varphi_u, \varphi_v)$ はそれぞれ $(1,0,i)$ および $(0,1,-1)$ となり、$s_i \in \Gamma$ の周りでのサイクルのモノドロミーは、図 31.2 から読み取れるように

$$\alpha_{i+1} \mapsto \alpha_{i+1} + \beta \tag{31.16}$$

$$\beta \mapsto \beta \tag{31.17}$$

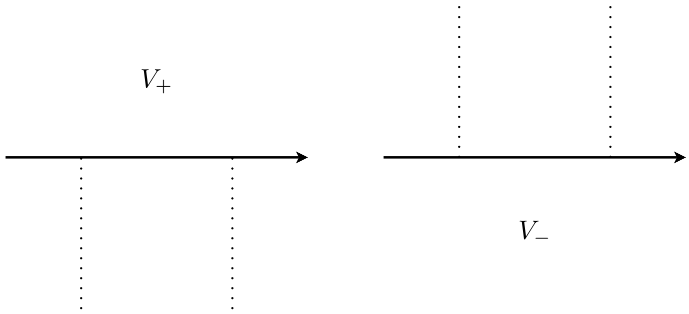


図 31.4: 2 つの開集合

となる。

判別式集合 Γ からモノドロミー不変な方向に伸ばした直線 $\{s = s_i\}$ を壁 (wall) と呼ぶ。$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ は、壁の下半分と上半分を除いた集合

$$V_+ = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (s_i, \mu) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; i = 0, 1,\ \mu \le 0 \right\}, \tag{31.18}$$

$$V_- = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (s_i, \mu) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; i = 0, 1,\ \mu \ge 0 \right\} \tag{31.19}$$

を用いて $V_+ \cup V_-$ と書ける。$V_+ \cap V_- = U_0 \sqcup U_1 \sqcup U_2$ であり、B_0 のアファイン構造は V_+ と V_- の標準的なアファイン構造を変換関数

$$\phi_{V_-, V_+}(s, \mu) = \begin{cases} (s, \mu) & (s, \mu) \in U_0 \\ (s, s + \mu) & (s, \mu) \in U_1 \\ (s, 2s + \mu) & (s, \mu) \in U_2 \end{cases} \tag{31.20}$$

で貼り合わせて得られる。

$(s_0, 0)$ と $(s_1, 0)$ における B の特異点は焦点-焦点特異点 (focus-focus singularity) と呼ばれる。Gauss-Bonnet 型の定理から、高々焦点-焦点特異点を持つトロピカルアファイン構造を許容するコンパクトな 2 次元多様体は、球面、実射影平面、トーラス及び Klein の壺の 4 種類しかない事と、それぞれの場合に焦点-焦点特異点の個数は 24 個、12 個、0 個、0 個でなければならない事が分かる [LS10]。対応するシンプレクティック多様体は K3 曲面、Enriques 曲面、トーラス上のトーラス束、Klein の壺上のトーラス束になる。

32　トロピカル幾何学

特異点を持たないコンパクトなトロピカルアファイン多様体はアファイン空間の離散群による商空間に限定されるので、それ以外の例を作るには特異点は避けて通れない。判別式集合の補集合を $B^{\mathrm{sm}} := B \setminus \Gamma$ と置くと、$TB^{\mathrm{sm}}/T_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$ は半平坦複素構造を持つが、これを判別式集合まで延長するには、正則円盤の数え上げによるインスタントン補正が必要だと考えられている [Fuk05]。このインスタントン補正は非局所的であり、具体的に計算するのは一般に極めて困難である。

一方、与えられたトロピカルアファイン多様体に対して、半平坦複素構造の自然な 1 パラメーター族

$$X_\epsilon(B_0) := TB_0/tT_{\mathbb{Z}}B_0 \tag{32.1}$$

を考えることが出来る。例えば $B = B^{\mathrm{sm}} := \mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ が半径 r の円周の時、対応する 1 パラメーター族は

$$X_\epsilon(B) := TS^1/tT_{\mathbb{Z}}S^1 \tag{32.2}$$

$$= \mathbb{C}/\left(t\mathbb{Z} + \sqrt{-1}r\mathbb{Z}\right) \tag{32.3}$$

$$\cong \mathbb{C}/\left(\mathbb{Z} + t^{-1}r\sqrt{-1}\mathbb{Z}\right) \tag{32.4}$$

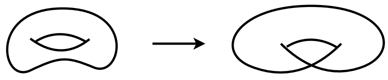


図 32.1: 代数幾何的な退化

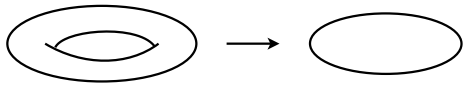


図 32.2: Gromov-Hausdorff 収束

となり、ϵ を 0 にする極限で周期が無限大に行く事が分かる。この退化の代数幾何的なモデルでは、図 32.1 にあるように曲線が縊れて行き、極限は結節点を持つ有理曲線になる。一方、Ricci 平坦なモデルにおいて直径を保って複素構造を変形すると、図 32.2 の様に曲線が細くなって、極限は円周になる。代数幾何的な退化のモデルにおいて曲率が集中するところは、Ricci 平坦なモデルにおいては殆ど全体になる。一般にトロピカルアファイン多様体は、単一の複素多様体ではなく複素多様体の退化する族と対応する。

正のパラメーター t に依存する加算と乗算の変形を

$$x \oplus_t y \coloneqq -\log_t(t^{-x} + t^{-y}), \quad x \odot_t y \coloneqq x + y \tag{32.5}$$

で定義すると、この $t \to 0$ における極限は

$$x \oplus y \coloneqq \max\{x, y\}, \quad x \odot y \coloneqq x + y \tag{32.6}$$

となる。

収束 Puiseux 級数環 $\mathbb{K} \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}(\!(T^{1/n})\!)$ の付値 $v\colon \mathbb{K} \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と絶対値 $|\cdot|: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ を、$x = a_p T^p + a_{p+1/n} T^{p+1/n} + \cdots$, $a_p \neq 0$ に対し $v(x) = p$ と $|x| = e^{-p}$ で定義する。また、0 の付値と絶対値はそれぞれ ∞ 及び 0 と定義する。

$\boldsymbol{M}$ を階数 n の自由 Abel 群とし、$\boldsymbol{N} \coloneqq \mathrm{Hom}(\boldsymbol{M}, \mathbb{Z})$ をその双対 Abel 群とする。Laurent 多項式

$$f = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}} a_{\boldsymbol{m}} x^{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{K}[\boldsymbol{M}] \tag{32.7}$$

に対し、そのトロピカル化を

$$f_{\mathrm{trop}}(x) \coloneqq \max_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}} \{v(a_{\boldsymbol{m}}) + \langle \boldsymbol{m}, x \rangle\} \tag{32.8}$$

で定義すると、これは $\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}} \coloneqq \boldsymbol{N} \otimes \mathbb{R}$ 上の区分アファイン関数を定めるが、これを f に付随するトロピカル多項式と呼ぶ。トロピカル多項式 f_{trop} の定義するトロピカル超曲面を

$$V(f_{\mathrm{trop}}) \coloneqq \{x \in \boldsymbol{N}_{\mathbb{R}} \mid f_{\mathrm{trop}} \text{ は } x \text{ で微分不可能 }\} \tag{32.9}$$

で定義する。また、

$$\mathrm{Log}\colon \boldsymbol{N}_{\mathbb{K}} \to \boldsymbol{N}_{\mathbb{R}}, \quad (x_i)_{i=1}^n \mapsto (\log|x_i|)_{i=1}^n \tag{32.10}$$

と置く。

定理 32.1 ([EKL06, Theorem 2.1.1])**.** トロピカル超曲面 $V(f_{\mathrm{trop}})$ は $\mathrm{Log}\left(f^{-1}(0)\right)$ の閉包と一致する。

正数 t に対して、Laurent 多項式 f の係数に現れる Puiseux 級数の不定元 T に t を代入して得られる Laurent 多項式を $f_t \in \mathbb{C}[\boldsymbol{M}]$ で表す。また、

$$\mathrm{Log}_t\colon \boldsymbol{N}_{\mathbb{C}}^{\times} \to \boldsymbol{N}_{\mathbb{R}}, \quad (z_i)_{i=1}^n \mapsto (\log_t|z_i|)_{i=1}^n \tag{32.11}$$

と置く。

定理 32.2 ([Mik04, Corollary 6.4])**.** $\boldsymbol{N}_{\mathbb{R}}$ の Hausdorff 位相に関して

$$\lim_{t \to 0} \mathrm{Log}_t\left(f_t^{-1}(0)\right) = V(f_{\mathrm{trop}}) \tag{32.12}$$

となる。

33 Berkovich 空間

$\mathbf{k}$ を体とする。写像 $v_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が任意の $x, y \in \mathbf{k}$ に対し

1. $v_{\mathbf{k}}(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

2. $v_{\mathbf{k}}(xy) = v_{\mathbf{k}}(x) + v_{\mathbf{k}}(y)$

3. $v_{\mathbf{k}}(x+y) \geq \min\{v_{\mathbf{k}}(x), v_{\mathbf{k}}(y)\}$

を満たす時、$v_{\mathbf{k}}$ を非 Archimedes 的付値 (non-Archimedean valuation) と呼ぶ。非 Archimedes 的付値から非 Archimedes 的絶対値 (non-Archimedean absolute value) $|\cdot|_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ が

$$|\cdot|_{\mathbf{k}} = e^{-v_{\mathbf{k}}(\cdot)} \tag{33.1}$$

で定まり、3 は非 Archimedes 的三角不等式

- $|x+y|_{\mathbf{k}} \leq \max\{|x|_{\mathbf{k}}, |y|_{\mathbf{k}}\}$

に翻訳される。体 $\mathbf{k}$ とその上の非 Archimedes 的絶対値 $|\cdot|_{\mathbf{k}}$ の組 $(\mathbf{k}, |\cdot|_{\mathbf{k}})$ で、非 Archimedes 的絶対値が定める距離 $d(x,y) \coloneqq |x-y|_{\mathbf{k}}$ に関して完備であるようなものを、非 Archimedes 的体 (non-Archimedean field) と呼ぶ。

複素解析幾何学の非 Archimedes 的体に対する類似としては、Tate のリジッド解析空間 (Tate's rigid analytic space) [Tat71] や Raynauld 生成ファイバー (Raynaud generic fiber) [Ray74]、Berkovich の解析空間 (Berkovich's analytic space) [Ber90]、Huber の adic 空間 (Huber's adic space) [Hub93]、藤原–加藤の Zariski–Riemann 空間 [FK] などがあり、解説記事としては [Kat98, Kat03, Con08, Bak08, Tem15, Pay15] などが挙げられる。以下では [KS06] に沿って、Berkovich の解析空間を用いる。

$\mathbf{k}$ 上の線形空間 V と写像 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ の組 $(V, \|\cdot\|)$ が、任意の $v, v' \in V$ と任意の $c \in \mathbf{k}$ に対して

1. $\|v + v'\| \leq \max(\|v\|, \|v'\|)$

2. $\|cv\| = |c|_{\mathbf{k}} \|v\|$

3. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

を満たす時、$\mathbf{k}$ 上の Banach 空間 ($\mathbf{k}$-Banach space) と呼ばれる。$\mathbf{k}$ 上の Banach 空間 A が $\mathbf{k}$ 代数の構造を持ち、任意の $a, b \in A$ が

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \tag{33.2}$$

を満たす時、A を $\mathbf{k}$ 上の Banach 代数 ($\mathbf{k}$-Banach algebra) と呼ぶ。$\mathbf{k}$ 上の Banach 代数 A の半ノルム (seminorm) とは、写像 $|\cdot| : A \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ で、

1. $|0| = 0$

2. $|1| = 1$

3. $|f + g| \leq |f| + |g|$

4. $|fg| \leq |f|\,|g|$

を満たすものを指す。$|f| = 0$ ならば $f = 0$ を満たす半ノルム $|\cdot|$ をノルムと呼ぶ。半ノルムが $|fg| = |f|\,|g|$ を満たす時、乗法的 (multiplicative) と呼ぶ。半ノルムが $|f| \leq \|f\|$ を満たす時、有界 (bounded) と呼ばれる。Banach 代数 A に対し、A の有界乗法的半ノルムの集合に、任意の $f \in A$ に対して写像

$$\mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad |\cdot| \mapsto |f| \tag{33.3}$$

が連続になるような最弱の位相を入れたものを A の Berkovich スペクトル (Berkovich spectrum) と呼び、$\mathcal{M}(A)$ で表す。$r_1, \cdots, r_n > 0$ に対し、

$$\mathbf{k}\left\langle r_1^{-1}X_1, \ldots, r_n^{-1}X_n\right\rangle \coloneqq \left\{ \sum_J a_J T^J \in K\left[\!\left[X_1, \ldots, X_n\right]\!\right] \;\middle|\; |a_J|_{\mathbf{k}}\, r^J \to 0 \right\} \tag{33.4}$$

に Gauss ノルム

$$\left\| \sum_J a_J X^J \right\| \coloneqq \sup_J |a_J|_K\, r^J \tag{33.5}$$

を入れて得られる Banach 代数を変形 Tate 代数 (modified Tate algebra) と呼ぶ。適当な変形 Tate 代数からの全射を持ち、しかもそのノルムが変形 Tate 代数の Gauss ノルムから誘導されているような $\mathbf{k}$ 上の Banach 代数 A を $\mathbf{k}$ アフィノイド代数 ($\mathbf{k}$-affinoid algebra) と呼ぶ。$\mathbf{k}$ アフィノイド代数の Berkovich スペクトルをアフィノイド領域 (affinoid domain) と呼ぶ。アフィノイド領域を適当な Grothendieck 位相で貼り合わせて得られる空間を Berkovich の解析空間 (Berkovich's analytic space) または単に Berkovich 空間と呼ぶ。$\mathbf{k}$ 上の代数多様体の圏から Berkovich 空間の圏への解析化 (analytification) と呼ばれる関手 $(\cdot)^{\mathrm{an}}$ が存在する。

代数的トーラス $\mathbb{G}_m^n \coloneqq \operatorname{Spec} \mathbf{k}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm n}]$ の解析化 $(\mathbb{G}_m^n)^{\mathrm{an}}$ から $\mathbb{R}^n$ への写像を

$$\pi_{\mathrm{can}} \colon (\mathbb{G}_m^n)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (\log|z_1(x)|, \ldots, \log|z_n(x)|) \tag{33.6}$$

で定義する。$\mathbf{k}$ 代数の層 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}^{\mathrm{can}}$ が

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}^{\mathrm{can}}(U) = \left\{ f \in \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^n} a_\omega z^\omega \;\middle|\; \forall x \in U,\ \lim_{|\omega| \to \infty} \log|a_\omega| + \langle x, \omega\rangle \to \infty = \infty \right\} \tag{33.7}$$

で定まる。

Berkovich 空間から Hausdorff 空間への写像 $\pi \colon X \to B^{\mathrm{sm}}$ が解析的トーラスファイブレーション (analytic torus fibration) であるとは、任意の $b \in B^{\mathrm{sm}}$ に対して b の近傍 U と $\mathbb{R}^n$ の開集合 V が存在して、図式

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{\mathrm{can}}^{-1}(V) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U & \xrightarrow{\sim} & V \end{array} \tag{33.8}$$

が可換になる事を指す。ただしここで上の行は Berkovich 空間の同型であり、下の行は同相写像である。解析的トーラスファイブレーションの底空間は、

$$\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}, B^{\mathrm{sm}}}(U) \coloneqq \left\{ v(f) + c \;\middle|\; f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^\times,\ c \in \mathbb{R} \right\} \tag{33.9}$$

で定まる層 $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}, B^{\mathrm{sm}}}$ をトロピカルアファイン関数のなす層とするようなトロピカルアファイン構造を持つ。逆に、トロピカルアファイン多様体 B^{sm} が与えられた時、アフィノイド領域を貼り合わせることによって、Berkovich 空間 X と解析的トーラスファイブレーション $\pi \colon X \to B^{\mathrm{sm}}$ を構成することが出来る。

問題 33.1. B を $\mathbb{R}^2$ のトロピカルアファイン構造で、原点に焦点-焦点特異点を持つものとする。この時、Berkovich 曲面 X と連続写像 $\pi \colon X \to B$ で、原点の外では解析的トーラスファイブレーションになっており、そこで与えられたトロピカルアファイン構造を持つものを構成せよ。

この問題は Kontsevich–Soibelmann によって次のように解かれた：まず、$(\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}})^2$ の 2 つのコピーを共通部分で

$$\begin{cases} z_1' &= (1 + z_2) z_1 \\ z_2' &= z_2 \end{cases} \tag{33.10}$$

によって貼り合わせて、さらに部分コンパクト化を取ることにより、

$$X = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[\alpha, \beta, \gamma]/((\alpha\beta - 1)\gamma - 1) \tag{33.11}$$

の解析化 X^{an} を得る。ここで (α, β, γ) と (z_1, z_2), (z_1', z_2') は

$$\alpha = \frac{1}{z_1},\ \beta = z_1',\ \gamma = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_2'} \tag{33.12}$$

で結び付いている。(33.10) から

$$\begin{aligned} v(z_1') &= v(1+z_2) + v(z_1) & (33.13)\\ &= \min\{0, v(z_2)\} + v(z_1) & (33.14)\\ &= \begin{cases} v(z_1) & v(z_2) \geq 0, \\ v(z_1) + v(z_2) & v(z_2) \leq 0 \end{cases} & (33.15) \end{aligned}$$

となることに注意せよ。

34 A_1 特異点

ミラーは

$$X = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[\alpha, \beta, \gamma]/((\alpha\beta - 1)\gamma - 1) \tag{34.1}$$

と

$$X' = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[\alpha', \beta', \gamma']/((\alpha'\beta' - 1)\gamma' - 1) \tag{34.2}$$

を

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'},\ \beta = (\alpha')^2\beta',\ \gamma = \gamma' \tag{34.3}$$

で貼り合わせて得られる。結果としてできる空間は、$\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ を $\mathbb{G}_m$ の作用 $(z, w, \zeta) \mapsto (\delta z, \delta w, \delta^{-2}\zeta)$ で割った空間

$$K_{\mathbb{P}^1} \cong ((\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m, \tag{34.4}$$

の開集合と

$$\begin{aligned} X &\to K_{\mathbb{P}^1},\ (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto [1, \alpha, \beta], & (34.5)\\ X' &\to K_{\mathbb{P}^1},\ (\alpha', \beta', \gamma') \mapsto [\alpha', 1, \beta'] & (34.6) \end{aligned}$$

で同型になっている。

参考文献

[AAE+13] Mohammed Abouzaid, Denis Auroux, Alexander I. Efimov, Ludmil Katzarkov, and Dmitri Orlov, *Homological mirror symmetry for punctured spheres*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), no. 4, 1051–1083. MR 3073884

[ABC+09] Paul S. Aspinwall, Tom Bridgeland, Alastair Craw, Michael R. Douglas, Mark Gross, Anton Kapustin, Gregory W. Moore, Graeme Segal, Balázs Szendrői, and P. M. H. Wilson, *Dirichlet branes and mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs, vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2009. MR 2567952 (2011e:53148)

[Aboa] Mohammed Abouzaid, *Family Floer cohomology and mirror symmetry*, arXiv:1404.2659.

[Abob] ———, *The family Floer functor is faithful*, arXiv:1408.6794.

[Abo06] ———, *Homogeneous coordinate rings and mirror symmetry for toric varieties*, Geom. Topol. **10** (2006), 1097–1157 (electronic). MR MR2240909 (2007h:14052)

[Abo09] ———, *Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties*, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), no. 2, 189–270. MR MR2529936

[Abo11] ———, *A topological model for the Fukaya categories of plumbings*, J. Differential Geom. **87** (2011), no. 1, 1–80. MR 2786590 (2012h:53193)

[AGV08] Dan Abramovich, Tom Graber, and Angelo Vistoli, *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 5, 1337–1398. MR 2450211 (2009k:14108)

[AGZV85] V. I. Arnolʹd, S. M. Guseĭn-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I*, Monographs in Mathematics, vol. 82, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985, The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds. MR 777682 (86f:58018)

[AKO06] Denis Auroux, Ludmil Katzarkov, and Dmitri Orlov, *Mirror symmetry for del Pezzo surfaces: vanishing cycles and coherent sheaves*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 537–582. MR MR2257391 (2007g:14045)

[AKO08] ———, *Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 867–943. MR MR2415388 (2009f:53142)

[AMRT10] Avner Ash, David Mumford, Michael Rapoport, and Yung-Sheng Tai, *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, With the collaboration of Peter Scholze. MR 2590897 (2010m:14067)

[AS10a] Mohammed Abouzaid and Paul Seidel, *An open string analogue of Viterbo functoriality*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 2, 627–718. MR 2602848 (2011g:53190)

[AS10b] Mohammed Abouzaid and Ivan Smith, *Homological mirror symmetry for the 4-torus*, Duke Math. J. **152** (2010), no. 3, 373–440. MR 2654219 (2011d:53218)

[Aur07] Denis Auroux, *Mirror symmetry and T-duality in the complement of an anticanonical divisor*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **1** (2007), 51–91. MR 2386535 (2009f:53141)

[Aur09] ———, *Special Lagrangian fibrations, wall-crossing, and mirror symmetry*, Surveys in differential geometry. Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry: forty years of the Journal of Differential Geometry, Surv. Differ. Geom., vol. 13, Int. Press, Somerville, MA, 2009, pp. 1–47. MR MR2537081

[Bak08] Matthew Baker, *An introduction to Berkovich analytic spaces and non-Archimedean potential theory on curves*, p-adic geometry, Univ. Lecture Ser., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 123–174. MR 2482347 (2010g:14029)

[Bal] Matthew Robert Ballard, *Sheaves on local Calabi-Yau varieties*, arXiv:0801.3499.

[Bal08] ———, *Meet homological mirror symmetry*, Modular forms and string duality, Fields Inst. Commun., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 191–224. MR 2454326 (2009m:53225)

[Bat94] Victor V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535. MR MR1269718 (95c:14046)

[Bat98] ______, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*, Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 1–32. MR 1672108 (2001a:14039)

[BB96] Victor V. Batyrev and Lev A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. **126** (1996), no. 1, 183–203. MR 1408560 (97k:14039)

[BBD82] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171. MR MR751966 (86g:32015)

[BD96] Victor V. Batyrev and Dimitrios I. Dais, *Strong McKay correspondence, string-theoretic Hodge numbers and mirror symmetry*, Topology **35** (1996), no. 4, 901–929. MR 1404917 (97e:14023)

[Ber90] Vladimir G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. MR 1070709 (91k:32038)

[BFK] Matthew Ballard, David Favero, and Ludmil Katzarkov, *Variation of geometric invariant theory quotients and derived categories*, arXiv:1203.6643.

[BH93] Per Berglund and Tristan Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Phys. B **393** (1993), no. 1-2, 377–391. MR MR1214325 (94k:14031)

[BK90] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Enhanced triangulated categories*, Mat. Sb. **181** (1990), no. 5, 669–683. MR MR1055981 (91g:18010)

[BLM08] Yu. Bespalov, V. Lyubashenko, and O. Manzyuk, *Pretriangulated A_∞-categories*, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its Applications, vol. 76, Natsīonal′na Akademīya Nauk Ukraïni, Īnstitut Matematiki, Kiev, 2008. MR 2513383 (2010j:18019)

[BO] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, arXiv:alg-geom/9506012.

[BO02] A. Bondal and D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 47–56. MR 1957019 (2003m:18015)

[Boc16] Raf Bocklandt, *Noncommutative mirror symmetry for punctured surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 1, 429–469. MR 3413869

[Bor13] Lev A. Borisov, *Berglund-Hübsch mirror symmetry via vertex algebras*, Comm. Math. Phys. **320** (2013), no. 1, 73–99. MR 3046990

[Bri02] Tom Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147** (2002), no. 3, 613–632. MR MR1893007 (2003h:14027)

[Buc87] Ragnar-Olaf Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings*, Available from `https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/16682`, 1987.

[BZN12] David Ben-Zvi and David Nadler, *Loop spaces and connections*, J. Topol. **5** (2012), no. 2, 377–430. MR 2928082

[BZN13] ______, *Loop spaces and representations*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 9, 1587–1619. MR 3079256

[CdlOGP91] Philip Candelas, Xenia C. de la Ossa, Paul S. Green, and Linda Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nuclear Phys. B **359** (1991), no. 1, 21–74. MR MR1115626 (93b:32029)

[CdlOGP92] ______, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Essays on mirror manifolds, Internat. Press, Hong Kong, 1992, pp. 31–95. MR MR1191420

[CHL] Cheol-Hyun Cho, Hansol Hong, and Siu-Cheong Lau, *Localized mirror functor for Lagrangian immersions, and homological mirror symmetry for $\mathbb{P}^1_{a,b,c}$*, arXiv:1308.4651.

[Cib00] Claude Cibils, *Tensor Hochschild homology and cohomology*, Interactions between ring theory and representations of algebras (Murcia), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 210, Dekker, New York, 2000, pp. 35–51. MR 1758400 (2001i:16016)

[CIR14] Alessandro Chiodo, Hiroshi Iritani, and Yongbin Ruan, *Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence, global mirror symmetry and Orlov equivalence*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **119** (2014), 127–216. MR 3210178

[CK99] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR MR1677117 (2000d:14048)

[Cla] Patrick Clarke, *Duality for toric Landau-Ginzburg models*, arXiv:0803.0447.

[Cle87] Herbert Clemens, *Curves on higher-dimensional complex projective manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 634–640. MR 934266 (89e:14007)

[CLS90] P. Candelas, M. Lynker, and R. Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted* $\mathbf{P}_4$, Nuclear Phys. B **341** (1990), no. 2, 383–402. MR 1067295 (91m:14062)

[Coh] Lee Cohn, *Differential graded categories are k-linear stable infinity categories*, arXiv:1308.2587.

[Con08] Brian Conrad, *Several approaches to non-Archimedean geometry*, p-adic geometry, Univ. Lecture Ser., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 9–63. MR 2482345 (2011a:14047)

[Cos07] Kevin Costello, *Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories*, Adv. Math. **210** (2007), no. 1, 165–214. MR 2298823 (2008f:14071)

[CPU] Kwokwai Chan, Daniel Pomerleano, and Kazushi Ueda, *Lagrangian torus fibrations and homological mirror symmetry for the conifold*, accepted for publication in *Comm. Math. Phys.*, arXiv:1305.0968.

[CR02] Weimin Chen and Yongbin Ruan, *Orbifold Gromov-Witten theory*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 25–85. MR 1950941 (2004k:53145)

[CR10] Alessandro Chiodo and Yongbin Ruan, *Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations*, Invent. Math. **182** (2010), no. 1, 117–165. MR 2672282 (2012b:14110)

[CR11] ______, *LG/CY correspondence: the state space isomorphism*, Adv. Math. **227** (2011), no. 6, 2157–2188. MR 2807086 (2012g:14069)

[Cra04] Alastair Craw, *An introduction to motivic integration*, Strings and geometry, Clay Math. Proc., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 203–225. MR 2103724 (2005k:14027)

[CU13] Kwokwai Chan and Kazushi Ueda, *Dual torus fibrations and homological mirror symmetry for A_n-singlarities*, Commun. Number Theory Phys. **7** (2013), no. 2, 361–396. MR 3164868

[CV93] Sergio Cecotti and Cumrun Vafa, *On classification of $N = 2$ supersymmetric theories*, Comm. Math. Phys. **158** (1993), no. 3, 569–644. MR MR1255428 (95g:81198)

[Del95] Jean Delsarte, *Nombre de solutions des équations polynomiales sur un corps fini*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. Exp. No. 39, 321–329. MR 1605138

[DK] Tobias Dyckerhoff and Mikhail Kapranov, *Triangulated surfaces in triangulated categories*, arXiv:1306.2545.

[DK80] W. G. Dwyer and D. M. Kan, *Simplicial localizations of categories*, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980), no. 3, 267–284. MR 579087 (81h:55018)

[DL99] Jan Denef and François Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 201–232. MR 1664700 (99k:14002)

[Don96] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 4, 666–705. MR 1438190 (98h:53045)

[Don98] ______, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), no. Extra Vol. II, 1998, pp. 309–314. MR 1648081 (99i:57044)

[Don99] ______, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Differential Geom. **53** (1999), no. 2, 205–236. MR 1802722 (2002g:53154)

[Dri04] Vladimir Drinfeld, *DG quotients of DG categories*, J. Algebra **272** (2004), no. 2, 643–691. MR 2028075 (2006e:18018)

[DTT09] Vasiliy Dolgushev, Dmitry Tamarkin, and Boris Tsygan, *Formality theorems for Hochschild complexes and their applications*, Lett. Math. Phys. **90** (2009), no. 1-3, 103–136. MR 2565036 (2011b:53221)

[Dub98] Boris Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), no. Extra Vol. II, 1998, pp. 315–326 (electronic). MR MR1648082 (99j:32025)

[Dui80] J. J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 6, 687–706. MR 596430 (82d:58029)

[Efi12] Alexander I. Efimov, *Homological mirror symmetry for curves of higher genus*, Adv. Math. **230** (2012), no. 2, 493–530. MR 2914956

[EHX97] Tohru Eguchi, Kentaro Hori, and Chuan-Sheng Xiong, *Gravitational quantum cohomology*, Internat. J. Modern Phys. A **12** (1997), no. 9, 1743–1782. MR MR1439892 (99a:32027)

[Eis80] David Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), no. 1, 35–64. MR MR570778 (82d:13013)

[EKL06] Manfred Einsiedler, Mikhail Kapranov, and Douglas Lind, *Non-Archimedean amoebas and tropical varieties*, J. Reine Angew. Math. **601** (2006), 139–157. MR 2289207 (2007k:14038)

[EL] Tolga Etgü and Yanki Lekili, *Koszul duality patterns in Floer theory*, arXiv:1502.07922.

[ES95] Geir Ellingsrud and Stein Arild Strømme, *The number of twisted cubic curves on the general quintic threefold*, Math. Scand. **76** (1995), no. 1, 5–34. MR 1345086 (96g:14045)

[FJR13] Huijun Fan, Tyler Jarvis, and Yongbin Ruan, *The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory*, Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 1, 1–106. MR 3043578

[FK] Kazuhiro Fujiwara and Fumiharu Kato, *Foundations of rigid geometry I*, arXiv:1308.4734.

[FLS] Sebastian Franco, Sangmin Lee, and Rak-Kyeong Seong, *Brane brick models, toric Calabi-Yau 4-folds and 2d (0,2) quivers*, arXiv:1510.01744.

[FLTZ11a] Bohan Fang, Chiu-Chu Melissa Liu, David Treumann, and Eric Zaslow, *A categorification of Morelli's theorem*, Invent. Math. **186** (2011), no. 1, 79–114. MR 2836052 (2012h:14036)

[FLTZ11b] ———, *The coherent-constructible correspondence and homological mirror symmetry for toric varieties*, Geometry and analysis. No. 2, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 18, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 3–37. MR 2882439

[FO97] Kenji Fukaya and Yong-Geun Oh, *Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 1, 96–180. MR 1480992 (99e:58038)

[FOOO] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, arXiv:1009.1648.

[FOOO09] ———, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 46, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. MR MR2553465

[FP04] Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili, *Comparison of abelian categories recollements*, Doc. Math. **9** (2004), 41–56 (electronic). MR 2054979 (2005c:18008)

[FSS08] Kenji Fukaya, Paul Seidel, and Ivan Smith, *Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles*, Invent. Math. **172** (2008), no. 1, 1–27. MR 2385665 (2009a:53142)

[FSS09] K. Fukaya, P. Seidel, and I. Smith, *The symplectic geometry of cotangent bundles from a categorical viewpoint*, Homological mirror symmetry, Lecture Notes in Phys., vol. 757, Springer, Berlin, 2009, pp. 1–26. MR 2596633 (2011c:53213)

[FU] Masahiro Futaki and Kazushi Ueda, *Homological mirror symmetry for brieskorn-pham singularities*, Proceedings of the Japan Geometry Symposium, August 2009, available at `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ kazushi/`.

[FU10] ———, *Exact Lefschetz fibrations associated with dimer models*, Math. Res. Lett. **17** (2010), no. 6, 1029–1040. MR 2729627 (2012b:14076)

[FU11] ———, *Homological mirror symmetry for Brieskorn-Pham singularities*, Selecta Math. (N.S.) **17** (2011), no. 2, 435–452. MR 2803848 (2012e:14083)

[FU13] ———, *Homological mirror symmetry for singularities of type D*, Math. Z. **273** (2013), no. 3-4, 633–652. MR 3030671

[FU14] ———, *Tropical coamoeba and torus-equivariant homological mirror symmetry for the projective space*, Comm. Math. Phys. **332** (2014), no. 1, 53–87. MR 3253699

[Fuk93] Kenji Fukaya, *Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies*, Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993) (Seoul), Lecture Notes Ser., vol. 18, Seoul Nat. Univ., 1993, pp. 1–102. MR MR1270931 (95e:57053)

[Fuk01] ______, *Floer homology and mirror symmetry. I*, Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 15–43. MR MR1876064 (2003f:53161)

[Fuk02a] ______, *Floer homology and mirror symmetry. II*, Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999), Adv. Stud. Pure Math., vol. 34, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 31–127. MR MR1925734 (2003h:53120)

[Fuk02b] ______, *Floer homology for families—a progress report*, Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000), Contemp. Math., vol. 309, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 33–68. MR 1953352 (2003m:53155)

[Fuk02c] ______, *Mirror symmetry of abelian varieties and multi-theta functions*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 3, 393–512. MR MR1894935 (2003m:14059)

[Fuk05] ______, *Multivalued Morse theory, asymptotic analysis and mirror symmetry*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 205–278. MR 2131017 (2006a:53100)

[Fuk11] ______, *Floer homology of Lagrangian submanifolds*, Sūgaku **63** (2011), no. 1, 43–66. MR 2790665 (2012c:53135)

[Gep87] Doron Gepner, *Exactly solvable string compactifications on manifolds of* $\mathrm{SU}(N)$ *holonomy*, Phys. Lett. B **199** (1987), no. 3, 380–388. MR 929596 (89h:83035)

[GG] Jorge A. Guccione and Juan J. Guccione, *Hochschild cohomology of triangular matrix algebras*, arXiv:math/0104068.

[GHJ03] M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Lectures from the Summer School held in Nordfjordeid, June 2001. MR 1963559 (2004c:14075)

[GHK15] Mark Gross, Paul Hacking, and Sean Keel, *Mirror symmetry for log Calabi-Yau surfaces I*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **122** (2015), 65–168. MR 3415066

[GHKK] Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, arXiv:1411.1394.

[Giv95] Alexander B. Givental, *Homological geometry and mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 472–480. MR MR1403947 (97j:58013)

[Giv96] Alexander Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices (1996), no. 13, 613–663. MR MR1408320 (97e:14015)

[Giv97] ______, *Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture*, Topics in singularity theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 180, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 103–115. MR MR1767115 (2001d:14063)

[Giv98] ______, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), Progr. Math., vol. 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, pp. 141–175. MR MR1653024 (2000a:14063)

[GKR] Mark Gross, Ludmil Katzarkov, and Helge Ruddat, *Towards mirror symmetry for varieties of general type*, arXiv:1202.4042.

[GMS03] Edward L. Green, Eduardo N. Marcos, and Nicole Snashall, *The Hochschild cohomology ring of a one point extension*, Comm. Algebra **31** (2003), no. 1, 357–379. MR 1969228 (2004a:16014)

[Gol01] Edward Goldstein, *Calibrated fibrations on noncompact manifolds via group actions*, Duke Math. J. **110** (2001), no. 2, 309–343. MR 1865243 (2002j:53065)

[Gom05] Robert E. Gompf, *What is... a Lefschetz pencil?*, Notices Amer. Math. Soc. **52** (2005), no. 8, 848–850. MR 2161353 (2006c:57022)

[GP90] B. R. Greene and M. R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nuclear Phys. B **338** (1990), no. 1, 15–37. MR MR1059831 (91h:32018)

[GPS] Sheel Ganatra, Timothy Perutz, and Nick Sheridan, *Mirror symmetry: from categories to curve counts*, 1510.03839.

[Gro01] Mark Gross, *Examples of special Lagrangian fibrations*, Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, pp. 81–109. MR 1882328 (2003f:53085)

[Gro11] ———, *Tropical geometry and mirror symmetry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 114, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2722115 (2012e:14124)

[Gro13] ———, *Mirror symmetry and the Strominger-Yau-Zaslow conjecture*, Current developments in mathematics 2012, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 133–191. MR 3204345

[GS99] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz, 4*-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1707327 (2000h:57038)

[GS02] Edward L. Green and Øyvind Solberg, *Hochschild cohomology rings and triangular rings*, Representations of algebra. Vol. I, II, Beijing Norm. Univ. Press, Beijing, 2002, pp. 192–200. MR 2067380 (2005d:16017)

[GS11] Mark Gross and Bernd Siebert, *From real affine geometry to complex geometry*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 3, 1301–1428. MR 2846484

[GS15] Alexander Goncharov and Linhui Shen, *Geometry of canonical bases and mirror symmetry*, Invent. Math. **202** (2015), no. 2, 487–633. MR 3418241

[GSW87] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten, *Superstring theory. Vol. 2*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, Loop amplitudes, anomalies and phenomenology. MR 878144 (88f:81001b)

[Han14] Yang Han, *Recollements and Hochschild theory*, J. Algebra **397** (2014), 535–547. MR 3119237

[Hap89] Dieter Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988), Lecture Notes in Math., vol. 1404, Springer, Berlin, 1989, pp. 108–126. MR 1035222 (91b:16012)

[Haz03] Michiel Hazewinkel, *Cofree coalgebras and multivariable recursiveness*, J. Pure Appl. Algebra **183** (2003), no. 1-3, 61–103. MR 1992043 (2004e:16039)

[Hin01] Vladimir Hinich, *DG coalgebras as formal stacks*, J. Pure Appl. Algebra **162** (2001), no. 2-3, 209–250. MR 1843805 (2002f:14008)

[Hit11] Nigel Hitchin, *Lectures on generalized geometry*, Surveys in differential geometry. Volume XVI. Geometry of special holonomy and related topics, Surv. Differ. Geom., vol. 16, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 79–124. MR 2893677

[HIV] Kentaro Hori, Amer Iqbal, and Cumrun Vafa, *D-branes and mirror symmetry*, hep-th/0005247.

[HKK$^+$03] Kentaro Hori, Sheldon Katz, Albrecht Klemm, Rahul Pandharipande, Richard Thomas, Cumrun Vafa, Ravi Vakil, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, With a preface by Vafa. MR 2003030 (2004g:14042)

[HL82] Reese Harvey and H. Blaine Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47–157. MR 666108 (85i:53058)

[Hos99] Shinobu Hosono, *Mirror symmetry*, Sūgaku **51** (1999), no. 3, 257–275. MR 1712069 (2001a:14041)

[Hov99] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1650134 (99h:55031)

[Hub93] R. Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. **212** (1993), no. 3, 455–477. MR 1207303 (94e:13041)

[Hue] Johannes Huebschmann, *A survey on homological perturbation theory*, available at the author's web page.

[HV00] Kentaro Hori and Cumrun Vafa, *Mirror symmetry*, hep-th/0002222, 2000.

[IU] Akira Ishii and Kazushi Ueda, *Dimer models and exceptional collections*, arXiv:0911.4529.

[Joy02] Dominic Joyce, *Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), no. 1, 1–51. MR 1932324 (2003m:53083)

[Joy05] ———, *Lectures on special Lagrangian geometry*, Global theory of minimal surfaces, Clay Math. Proc., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 667–695. MR 2167283 (2006j:53077)

[Kat86] Sheldon Katz, *On the finiteness of rational curves on quintic threefolds*, Compositio Math. **60** (1986), no. 2, 151–162. MR 868135 (88a:14047)

[Kat98] Fumiharu Kato, *An introduction to rigid analysis*, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku (1998), no. 1073, 1–48, Rigid geometry and group actions (Japanese) (Kyoto, 1998). MR 1713686 (2000j:14034)

[Kat03] ———, *Rigid analytic geometry*, Sūgaku **55** (2003), no. 4, 392–417. MR 2021550 (2005b:14043)

[Kat07] Ludmil Katzarkov, *Birational geometry and homological mirror symmetry*, Real and complex singularities, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 176–206. MR MR2336686 (2008g:14062)

[Kaw05] Yujiro Kawamata, *Log crepant birational maps and derived categories*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **12** (2005), no. 2, 211–231. MR MR2150737 (2006a:14021)

[Kaw06a] ———, *Algebraic geometry and derived categories*, Sūgaku **58** (2006), no. 1, 64–85. MR 2208306 (2007b:14033)

[Kaw06b] ———, *Derived categories of toric varieties*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 3, 517–535. MR MR2280493 (2008d:14079)

[Kaw13] ______, *Derived categories of toric varieties II*, Michigan Math. J. **62** (2013), no. 2, 353–363. MR 3079267

[Kea] Ailsa Keating, *Homological mirror symmetry for hypersurface cusp singularities*, arXiv:1510.08911.

[Kea15] ______, *Lagrangian tori in four-dimensional Milnor fibres*, Geom. Funct. Anal. **25** (2015), no. 6, 1822–1901. MR 3432159

[Kel99] Bernhard Keller, *On the cyclic homology of exact categories*, J. Pure Appl. Algebra **136** (1999), no. 1, 1–56. MR 1667558 (99m:18012)

[Kel01] ______, *Introduction to A-infinity algebras and modules*, Homology Homotopy Appl. **3** (2001), no. 1, 1–35 (electronic). MR MR1854636 (2004a:18008a)

[Kel02] ______, *A-infinity algebras in representation theory*, Representations of algebra. Vol. I, II, Beijing Norm. Univ. Press, Beijing, 2002, pp. 74–86. MR MR2067371 (2005b:16021)

[Kel06] ______, *On differential graded categories*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 151–190. MR MR2275593 (2008g:18015)

[Kel11] ______, *Deformed Calabi-Yau completions*, J. Reine Angew. Math. **654** (2011), 125–180, With an appendix by Michel Van den Bergh. MR 2795754

[Ker08] Gabriel Kerr, *Weighted blowups and mirror symmetry for toric surfaces*, Adv. Math. **219** (2008), no. 1, 199–250. MR MR2435423 (2009d:53130)

[KKOY09] Anton Kapustin, Ludmil Katzarkov, Dmitri Orlov, and Mirroslav Yotov, *Homological mirror symmetry for manifolds of general type*, Cent. Eur. J. Math. **7** (2009), no. 4, 571–605. MR 2563433 (2010j:53184)

[KKP08] L. Katzarkov, M. Kontsevich, and T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*, From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 87–174. MR 2483750 (2009j:14052)

[KL03] Anton Kapustin and Yi Li, *D-branes in Landau-Ginzburg models and algebraic geometry*, J. High Energy Phys. (2003), no. 12, 005, 44 pp. (electronic). MR MR2041170 (2005b:81179b)

[KM94] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 3, 525–562. MR MR1291244 (95i:14049)

[Kon] Maxim Kontsevich, *Symplectic geometry of homological algebra*, Mathematische Arbeitstagung 2009.

[Kon95a] ______, *Enumeration of rational curves via torus actions*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, pp. 335–368. MR MR1363062 (97d:14077)

[Kon95b] ______, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 120–139. MR MR1403918 (97f:32040)

[Kon98] ______, *Lectures at ENS Paris, spring 1998*, set of notes taken by J. Bellaiche, J.-F. Dat, I. Martin, G. Rachinet and H. Randriambololona, 1998.

[Kon03] ______, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216. MR 2062626 (2005i:53122)

[Kra] Marc Krawitz, *FJRW rings and Landau-Ginzburg mirror symmetry*, arXiv:0906.0796.

[KS] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, arXiv:0811.2435.

[KS92] Maximilian Kreuzer and Harald Skarke, *On the classification of quasihomogeneous functions*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 1, 137–147. MR 1188500 (93k:32075)

[KS00] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), Math. Phys. Stud., vol. 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 255–307. MR MR1805894 (2002e:18012)

[KS01] ———, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001, pp. 203–263. MR MR1882331 (2003c:32025)

[KS02] Mikhail Khovanov and Paul Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 1, 203–271 (electronic). MR MR1862802 (2003d:53155)

[KS06] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Affine structures and non-Archimedean analytic spaces*, The unity of mathematics, Progr. Math., vol. 244, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, pp. 321–385. MR MR2181810

[KS09] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Notes on A_∞-algebras, A_∞-categories and non-commutative geometry*, Homological mirror symmetry, Lecture Notes in Phys., vol. 757, Springer, Berlin, 2009, pp. 153–219. MR 2596638 (2011f:53183)

[KST07] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi, *Matrix factorization and representations of quivers. II. Type ADE case*, Adv. Math. **211** (2007), no. 1, 327–362. MR MR2313537 (2008g:16027)

[Kuza] Alexander Kuznetsov, *Hochschild homology and semiorthogonal decompositions*, arXiv:0904.4330.

[Kuzb] ———, *Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry*, arXiv:1404.3143.

[KY84] Keiji Kikkawa and Masami Yamasaki, *Casimir effects in superstring theories*, Phys. Lett. B (1984), no. 4-5, 357–360.

[LLY97] Bong H. Lian, Kefeng Liu, and Shing-Tung Yau, *Mirror principle. I*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 4, 729–763. MR MR1621573 (99e:14062)

[LS10] Naichung Conan Leung and Margaret Symington, *Almost toric symplectic four-manifolds*, J. Symplectic Geom. **8** (2010), no. 2, 143–187. MR 2670163 (2011e:53146)

[Lur] Jacob Lurie, *Higer algebra*, available at `http://www.math.harvard.edu/ lurie/`.

[Lur09] ———, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659 (2010j:18001)

[Lur10] ———, *Moduli problems for ring spectra*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, pp. 1099–1125. MR 2827833 (2012i:55008)

[Man02] Marco Manetti, *Extended deformation functors*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 14, 719–756. MR 1891232 (2003e:16033)

[Mar90] Emil J. Martinec, *Criticality, catastrophes, and compactifications*, Physics and mathematics of strings, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990, pp. 389–433. MR 1104265 (93d:32058)

[Mar96] Martin Markl, *Models for operads*, Comm. Algebra **24** (1996), no. 4, 1471–1500. MR 1380606 (96m:18012)

[Mat68] John N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined mapgerms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 35, 279–308. MR 0275459 (43 #1215a)

[May72] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. MR 0420610 (54 #8623b)

[McL98] Robert C. McLean, *Deformations of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 4, 705–747. MR 1664890 (99j:53083)

[Mik04] Grigory Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, Topology **43** (2004), no. 5, 1035–1065. MR MR2079993 (2005i:14055)

[Mit72] Barry Mitchell, *Rings with several objects*, Advances in Math. **8** (1972), 1–161. MR 0294454 (45 #3524)

[MP00] Sandra Michelena and María Inés Platzeck, *Hochschild cohomology of triangular matrix algebras*, J. Algebra **233** (2000), no. 2, 502–525. MR 1793914 (2001g:16022)

[Nada] David Nadler, *Arboreal singularities*, arXiv:1309.4122.

[Nadb] ______, *A combinatorial calculation of the Landau-Ginzburg model $M = \mathbb{C}^3, W = z_1z_2z_3$*, arXiv:1507.08735.

[Nad09] ______, *Microlocal branes are constructible sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), no. 4, 563–619. MR 2565051 (2010m:53131)

[Nad14] ______, *Fukaya categories as categorical Morse homology*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **10** (2014), Paper 018, 47. MR 3210617

[Nad15] ______, *Cyclic symmetries of A_n-quiver representations*, Adv. Math. **269** (2015), 346–363. MR 3281139

[NT] David Nadler and Hiro Lee Tanaka, *A stable infinity-category of Lagrangian cobordisms*, arXiv:1109.4835.

[NU12] Yuichi Nohara and Kazushi Ueda, *Homological mirror symmetry for the quintic 3-fold*, Geom. Topol. **16** (2012), no. 4, 1967–2001. MR 2975297

[NZ09] David Nadler and Eric Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya category*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 233–286. MR 2449059 (2010a:53186)

[Ono06] Kaoru Ono, *Floer theory in symplectic geometry*, Sūgaku **58** (2006), no. 2, 113–132. MR 2242437 (2007m:53113)

[Orl92] D. O. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 4, 852–862. MR MR1208153 (94e:14024)

[Orl09] Dmitri Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, Progr. Math., vol. 270, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009, pp. 503–531. MR 2641200 (2011c:14050)

[Pay15] Sam Payne, *Topology of nonarchimedean analytic spaces and relations to complex algebraic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **52** (2015), no. 2, 223–247. MR 3312632

[Per87] Ulf Persson, *An introduction to the geography of surfaces of general type*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 195–218. MR 927957 (89a:14057)

[Pol95] Joseph Polchinski, *Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), no. 26, 4724–4727. MR 1366179 (96m:81185)

[Pol98a] ———, *String theory. Vol. I*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, An introduction to the bosonic string. MR 1648555 (99h:81183)

[Pol98b] ———, *String theory. Vol. II*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Superstring theory and beyond. MR 1648559 (99h:81184)

[Pol00] A. Polishchuk, *Massey and Fukaya products on elliptic curves*, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000), no. 6, 1187–1207. MR MR1894854 (2003h:14058)

[Por] Andrew Port, *An introduction to homological mirror symmetry and the case of elliptic curves*, arXiv:1501.00730.

[Pri10] J. P. Pridham, *Unifying derived deformation theories*, Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 772–826. MR 2628795 (2011g:14003)

[PV] Alexander Polishchuk and Arkady Vaintrob, *Matrix factorizations and singularity categories for stacks*, arXiv:1011.4544.

[PZ98] Alexander Polishchuk and Eric Zaslow, *Categorical mirror symmetry: the elliptic curve*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 2, 443–470. MR MR1633036 (99j:14034)

[Ray74] Michel Raynaud, *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,$\cdots$*, Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972), Soc. Math. France, Paris, 1974, pp. 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. MR 0470254 (57 #10012)

[Rei] Miles Reid, *McKay correspondence*, alg-geom/9702016.

[Rei02] Miles Reid, *La correspondance de McKay*, Astérisque (2002), no. 276, 53–72, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. MR 1886756 (2003h:14026)

[Rie08] Konstanze Rietsch, *A mirror symmetric construction of $qH^*_T(G/P)_{(q)}$*, Adv. Math. **217** (2008), no. 6, 2401–2442. MR 2397456 (2009f:14106)

[Rin84] Claus Michael Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 774589 (87f:16027)

[Ros10] Paolo Rossi, *Gromov-Witten theory of orbicurves, the space of tri-polynomials and symplectic field theory of Seifert fibrations*, Math. Ann. **348** (2010), no. 2, 265–287. MR 2672302 (2011f:53210)

[Seg08] Ed Segal, *The A_∞ deformation theory of a point and the derived categories of local Calabi-Yaus*, J. Algebra **320** (2008), no. 8, 3232–3268. MR MR2450725 (2009k:16016)

[Seia] Paul Seidel, *Fukaya A_∞ structures associated to Lefschetz fibrations. II*, arXiv:1404.1352.

[Seib] ———, *Fukaya A_∞-structures associated to Lefschetz fibrations. II 1/2*, arXiv:1504.06317.

[Sei99] ———, *Lagrangian two-spheres can be symplectically knotted*, J. Differential Geom. **52** (1999), no. 1, 145–171. MR MR1743463 (2001g:53139)

[Sei01a] ———, *More about vanishing cycles and mutation*, Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001, pp. 429–465. MR MR1882336 (2003c:53125)

[Sei01b] ———, *Vanishing cycles and mutation*, European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000), Progr. Math., vol. 202, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 65–85. MR MR1905352 (2003i:53128)

[Sei02] ———, *Fukaya categories and deformations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 351–360. MR MR1957046 (2004a:53110)

[Sei03] ———, *A long exact sequence for symplectic Floer cohomology*, Topology **42** (2003), no. 5, 1003–1063. MR MR1978046 (2004d:53105)

[Sei08] ———, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. MR MR2441780

[Sei11] ———, *Homological mirror symmetry for the genus two curve*, J. Algebraic Geom. **20** (2011), no. 4, 727–769. MR 2819674 (2012f:53186)

[Sei12a] ———, *Fukaya A_∞-structures associated to Lefschetz fibrations. I*, J. Symplectic Geom. **10** (2012), no. 3, 325–388. MR 2983434

[Sei12b] ———, *Some speculations on pairs-of-pants decompositions and Fukaya categories*, Surveys in differential geometry. Vol. XVII, Surv. Differ. Geom., vol. 17, Int. Press, Boston, MA, 2012, pp. 411–425. MR 3076066

[Sei15] ———, *Homological mirror symmetry for the quartic surface*, Mem. Amer. Math. Soc. **236** (2015), no. 1116, vi+129. MR 3364859

[She11] Nick Sheridan, *On the homological mirror symmetry conjecture for pairs of pants*, J. Differential Geom. **89** (2011), no. 2, 271–367. MR 2863919 (2012m:53196)

[She15] ———, *Homological mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in projective space*, Invent. Math. **199** (2015), no. 1, 1–186. MR 3294958

[Shi86] Tetsuji Shioda, *An explicit algorithm for computing the Picard number of certain algebraic surfaces*, Amer. J. Math. **108** (1986), no. 2, 415–432. MR 833362 (87g:14033)

[SS86] Norisuke Sakai and Ikuo Senda, *Vacuum energies of string compactified on torus*, Progr. Theoret. Phys. **75** (1986), no. 3, 692–705. MR 844755 (87h:81229)

[ST71] M. Sebastiani and R. Thom, *Un résultat sur la monodromie*, Invent. Math. **13** (1971), 90–96. MR MR0293122 (45 #2201)

[ST01] Paul Seidel and Richard Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 1, 37–108. MR MR1831820 (2002e:14030)

[ST08] Kyoji Saito and Atsushi Takahashi, *From primitive forms to Frobenius manifolds*, From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 31–48. MR 2483747 (2010g:32048)

[Sta63] James Dillon Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; ibid. **108** (1963), 293–312. MR 0158400 (28 #1623)

[STWZ] Vivek Shende, David Treumann, Harold Williams, and Eric Zaslow, *Cluster varieties from Legendrian knots*, arXiv:1512.08942.

[STZ14] Nicolò Sibilla, David Treumann, and Eric Zaslow, *Ribbon graphs and mirror symmetry*, Selecta Math. (N.S.) **20** (2014), no. 4, 979–1002. MR 3273628

[SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243–259. MR MR1429831 (97j:32022)

[Tak05] Atsushi Takahashi, *Matrix factorizations and representations of quivers I*, math.AG/0506347, 2005.

[Tak10] ______, *Weighted projective lines associated to regular systems of weights of dual type*, New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008), Adv. Stud. Pure Math., vol. 59, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, pp. 371–388. MR 2683215

[Tam] Dmitry Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich ' s formality theorem*, arXiv:math.QA/9803025.

[Tat71] John Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289. MR 0306196 (46 #5323)

[Tel] Constantin Teleman, *Gauge theory and mirror symmetry*, arXiv:1404.6305.

[Tem15] Michael Temkin, *Introduction to Berkovich analytic spaces*, Berkovich spaces and applications, Lecture Notes in Math., vol. 2119, Springer, Cham, 2015, pp. 3–66. MR 3330762

[Toë09] Bertrand Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 435–487. MR 2483943 (2010h:14021)

[Toë11] ______, *Lectures on dg-categories*, Topics in algebraic and topological K-theory, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, Berlin, 2011, pp. 243–302. MR 2762557 (2012b:18022)

[Toë14] ______, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153–240. MR 3285853

[Tou68] Jean-Claude Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables. I*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), no. fasc. 1, 177–240. MR 0240826 (39 #2171)

[TS15] Atsushi Takahashi and Yuuki Shiraishi, *On the Frobenius manifolds for cusp singularities*, Adv. Math. **273** (2015), 485–522. MR 3311769

[Tu15] Junwu Tu, *Homological mirror symmetry and Fourier-Mukai transform*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 3, 579–630. MR 3340330

[TV15] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Caractères de Chern, traces équivariantes et géométrie algébrique dérivée*, Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 2, 449–554. MR 3338682

[Ued06] Kazushi Ueda, *Homological mirror symmetry for toric del Pezzo surfaces*, Comm. Math. Phys. **264** (2006), no. 1, 71–85. MR MR2212216

[UY13] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki, *Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del Pezzo surfaces*, J. Reine Angew. Math. **680** (2013), 1–22. MR 3100950

[Ver96] Jean-Louis Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque (1996), no. 239, xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. MR 1453167 (98c:18007)

[Voi03] Claire Voisin, *On some problems of Kobayashi and Lang; algebraic approaches*, Current developments in mathematics, 2003, Int. Press, Somerville, MA, 2003, pp. 53–125. MR 2132645 (2005m:32052)

[VW89] Cumrun Vafa and Nicholas Warner, *Catastrophes and the classification of conformal theories*, Phys. Lett. B **218** (1989), no. 1, 51–58. MR 983349 (90m:81135)

[Wit93] Edward Witten, *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions*, Nuclear Phys. B **403** (1993), no. 1-2, 159–222. MR MR1232617 (95a:81261)

[Wit95] E. Witten, *Chern-Simons gauge theory as a string theory*, The Floer memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 637–678. MR 1362846 (97j:57052)

[WW10] Katrin Wehrheim and Chris T. Woodward, *Functoriality for Lagrangian correspondences in Floer theory*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 2, 129–170. MR 2657646 (2011g:53193)

[Yos90] Yuji Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR 1079937 (92b:13016)