

Frobenius 多様体とモノドロミー保存変形

植田一石

1 はじめに

体 k 上の Frobenius 代数とは、線形空間 A と A 上の可換で結合的な積

$$\circ: A \otimes A \rightarrow A, \quad (1.1)$$

それに対称かつ双線型な内積

$$g: A \otimes A \rightarrow k \quad (1.2)$$

からなる 3 つ組 $(A, \circ, g)$ で、積と内積が Frobenius 関係式

$$g(a \cdot b, c) = g(a, b \cdot c) \quad (1.3)$$

を満たすようなものを指す。Frobenius 多様体とは、複素多様体 M の各点 p における接空間 T_p に $\mathbb{C}$ 上の Frobenius 代数の構造が与えられていて、積と内積はどちらも p に正則に依存し、しかも適当な整合性条件を満たすようなものを指す。この整合性条件は非常に強いので、Frobenius 多様体は存在自体がそもそも自明ではないが、原始形式の理論や、量子コホモロジーの理論によって、実は例が豊富に存在することが分かる。こうして得られる 2 つのクラスの Frobenius 多様体の間にはミラー対称性と呼ばれる不思議な関係があるが、ここではその話題ではなく、Frobenius 多様体とモノドロミー保存変形の関係について紹介したい。^{*1}

2 $\mathbb{P}^2$ 上の有理曲線

$\mathbb{P}^2$ 上の d 次曲線は 3 変数 d 次式で定義されるので、

$$\binom{d+2}{2} - 1 = \frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1 \quad (2.1)$$

個のパラメーターを持つ。ここで、 -1 は定義方程式を定数倍しても得られる曲線が変わらないことから来る。また、いわゆる次数-種数公式 (degree-genus formula) によって、滑らかな d 次曲線の種数は

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad (2.2)$$

で与えられる。

次数-種数公式の証明には様々なものが知られている。おそらく最も古典的なものは、次数 d の平面曲線 C を $C' = \mathbb{P}^1$ の分岐被覆 $f: C \rightarrow C'$ として表して、Riemann-Hurwitz の公式

$$\chi(C) = \deg f \cdot \chi(C') - \sum_{p \in C} e_p \quad (2.3)$$

^{*1} この原稿は、東京大学大学院数理科学研究科における 2016 年度夏学期の講義録に加筆・修正を行ったものである。

を用いる方法である。ここで、 $\chi(C) = 2 - 2g(C)$ は Euler 数であり、 e_p は p における f の分岐指数 (ramification index、すなわち、 f を局所的に $z \mapsto w = z^k$ と表した時の k) である。Riemann-Hurwitz の公式は、分岐点を含むように C' の三角形分割を取ることで容易に証明される。 C が $[1 : 0 : 0]$ を通らなければ、射影 $[x : y : z] \mapsto [y : z]$ が $\mathbb{P}^1$ の d 重被覆を与え、その分岐集合 (branch locus) は、 C の定義方程式を x に関する d 次式

$$\prod_{i=1}^d (x - \alpha_i(y, z)) \quad (2.4)$$

とみなした時の判別式

$$D = \prod_{i \neq j} (\alpha_i(y, z) - \alpha_j(y, z)) \quad (2.5)$$

の零点集合で与えられる。ここで $\alpha_i(y, z)$ は y, z に関する多価の代数的な関数であるが、 D は $\mathbb{C}[y, z]$ の元であって、 C の定義方程式とその x 微分に関する終結式 (resultant) として Sylvester 行列式による具体的な表示を持ち、その次数は $d^2 - d$ で与えられる。 C を一般に取れば、判別式は重根を持たず、 f は分岐指数が 2 の分岐点を $d^2 - d$ 個持つので、

$$\chi(C) = d \cdot 2 - (d^2 - d)(2 - 1) = -d^2 + 3d \quad (2.6)$$

となる。あるいは、種数が位相不変量であり、従って変形不変であることを使って、Fermat 曲線

$$x^d + y^d + z^d = 0 \quad (2.7)$$

から直線

$$x + y + z = 0 \quad (2.8)$$

への射影 $[x : y : z] \mapsto [x^d : y^d : z^d]$ を考えると、その次数は d^2 であり、その分岐点は $[0 : y : z]$, $[x : 0 : z]$, $[x : y : 0]$ の $3d$ 個あって、分岐指数は d なので、

$$\chi(C) = d^2 \cdot 2 - 3d(d - 1) = -d^2 + 3d \quad (2.9)$$

となる。

次数-種数公式を証明する別の方法として、直線配置への退化を用いることもできる。一般の位置にある d 本の直線は、

$$\binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2} \quad (2.10)$$

個の交点を持つが、これらの交点を全て解消したものが滑らかな d 次曲線になる。 d 本の直線は、交点が $d - 1$ 個の時に解消すると種数 0 になり、そこからは交点が 1 つ増えるごとに種数が 1 つ増えるので、種数は

$$\frac{d(d-1)}{2} - (d-1) \quad (2.11)$$

となる。

また、直線が d 本のところにもう 1 本足すと種数が $d - 1$ 増えるということから、

$$g = 1 + 2 + \cdots + (d-2) \quad (2.12)$$

と計算することもできる。これと密接に関係するが、トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上で考えて、適当な極限でアメーバはトロピカル曲線になり、Newton 多角形の三角形分割の dual になることに着目すると、種数は Newton 多角形の内点の個数になり、やはり (2.12) で与えられる。

次数–種数公式を証明するさらに別の方法として、

$$h^1(\mathcal{O}_C) = h^0(\omega_C) = g \quad (2.13)$$

を用いる方法がある。実際、

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

に付随する長完全列から

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \cong H^0(\mathcal{O}_C) \quad (2.15)$$

及び

$$h^1(\mathcal{O}_C) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)) = \binom{d-1}{2} \quad (2.16)$$

が直ちに分かる。

また、

$$0 \rightarrow TC \rightarrow T\mathbb{P}^2 \rightarrow N_{C/\mathbb{P}^2} \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

および

$$N_{C/\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|_C \quad (2.18)$$

から従う添加公式

$$\omega_C \cong \omega_{\mathbb{P}^2}(d)|_C \quad (2.19)$$

より

$$\deg \omega_C = C \cdot \mathcal{O}(d-3) = d(d-3) \quad (2.20)$$

であり、これと Riemann–Roch の公式

$$\chi(\mathcal{E}) = (1-g) \operatorname{rank} \mathcal{E} + \deg \mathcal{E} \quad (2.21)$$

で $\mathcal{E} = \omega_C$ とおいて得られる

$$g-1 = (1-g) + \deg \omega_C \quad (2.22)$$

から従う

$$\deg \omega_C = 2g-2 \quad (2.23)$$

から

$$2g = d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2) \quad (2.24)$$

とも求まる。ちなみに、Serre 双対性から

$$\chi(\omega_C) = -\chi(\mathcal{O}_C) = g-1 \quad (2.25)$$

である。

さて、曲線が通常 2 重点^{*2}を持つという条件は余次元 1 であり、曲線が通常 2 重点を 1 つ持つ度に幾何種数^{*3}は 1 つ減るので、 d 次の有理曲線の変形の自由度の次元は

$$\frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 3d - 1 \quad (2.26)$$

となる。従って、数を数えるには、一般の位置にある $3d - 1$ 点を与えて、そこを通る d 次の有理曲線を考えれば良い。その本数を N_d とおく。

$d = 3$ の時、滑らかな 3 次曲線は楕円曲線であり、Weierstrass 標準形を持っていて、 $\mathbb{P}^1$ の 4 点で分岐する 2 重被覆である。 $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある 8 点 $p_1, \dots, p_8$ を取り、線形系 $\mathfrak{d} := |3H - p_1 - \dots - p_8|$ を取ると、これは 1 次元である。その一般の元を $\mu f + \lambda g$ で表すと、 $f = g = 0$ は 9 点である。9 つ目の点を p_9 と置くと、これは線形系 $\mathfrak{d}$ の自発的な基点 (unassigned base locus) になる。言い換えると、 $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある 8 点 $p_1, \dots, p_8$ に対し、ある点 $p_9 \in \mathbb{P}^2$ が存在して、 $p_1, \dots, p_8$ を通る 3 次曲線は必ず p_9 も通る。これを Cayley–Bacharach の定理と呼び、様々な一般化が知られている。究極の一般化の一つは「体上の多項式環は Gorenstein である」というものであるが、これについては例えば [EGH96] を見よ。

さて、 $p_1, \dots, p_8$ を通る有理曲線の数は、この線形系 $\mathfrak{d}$ の元で特異点を持つものの個数と一致する。この線形系の定める有理写像

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1, \quad [x : y : z] \mapsto [f(x, y, z) : g(x, y, z)] \quad (2.27)$$

は、 $p_1, \dots, p_9$ で爆発することによって正則写像 (regular map, morphism) $X := \text{Bl}_{p_1, \dots, p_9} \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ になる。この射の一般のファイバーは滑らかな楕円曲線であり、特異ファイバーは有理曲線になっている。 $p_1, \dots, p_8$ を一般に取れば、これらの特異ファイバーは通常 2 重点のみを持つ。 X は楕円曲面であり、特異ファイバーは小平の記号で I_1 型である。特異ファイバーはトーラス上の円周を一点に潰して得られるので、特異ファイバーが 1 つある毎に全空間の Euler 数は一つ増える (円周の Euler 数は 0 であり、一点の Euler 数は 1 である)。楕円曲線の Euler 数が 0 なので、特異ファイバーが無ければ、楕円曲面の Euler 数は 0 である。一方、1 点を中心とした爆発は 1 点を $\mathbb{P}^1$ に置き換えるので、1 点を中心とした爆発で Euler 数は 1 増える。 X は $\mathbb{P}^2$ の 9 点爆発なので、Euler 数は $3+9=12$ である。従って、特異ファイバーの本数は 12 であり、 $N_3 = 12$ となる。

一方、

$$\mu f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 0 \quad (2.28)$$

が特異点を持つ条件を直接見るによっても、 $N_3 = 12$ を得ることができる。実際、 $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$ に対し、適当な $[\mu : \lambda]$ が存在して (2.28) が特異点を持つ条件は、その点における行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

^{*2} 局所座標で $xy = 0$ と表される最も穏やかな特異点を通常 2 重点 (ordinary double point) と呼ぶ。

^{*3} 特異点を持つ曲線が与えられた時、それを解消 (resolve) (あるいは正規化 (normalize)) して得られる滑らかな曲線の種数を幾何種数 (geometric genus)、それを変形 (deform) して得られる滑らかな曲線の種数を算術種数 (arithmetic genus) と呼ぶ。

の階数が 1 以下であることである。これは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \right) \neq (0, 0) \quad (2.30)$$

で与えられる。ここで、 $p_1, \dots, p_8$ が一般の位置にあって、その上で f と g を一般に取れば、 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ を満たす点は $\mu f + \lambda g = 0$ の特異点にはならない事に注意せよ。(2.30) の左の条件を満たす点 $[x : y : z]$ は $4 \times 4 = 16$ 個あり、その中で右の条件を満たさない点は $2 \times 2 = 4$ 個あるので、結局 $N_3 = 12$ が分かる。

N_4 は一般の位置にある 11 点を通り、通常 2 重点を 3 つ持つ 4 次曲線の本数であり、620 であることがやや長い計算ののち分かる (例えば [DFI95] を見よ)。さらに、 $N_5 = 87304$ など初等的に計算されているが、その計算は d が大きくなるにつれて急速に難しくなる。しかし後述するように、Gromov–Witten 不変量 (より正確には量子コホモロジーの結合律、あるいは Frobenius 多様体に対する WDVV 方程式) を使うと、漸化式

$$N_d = \sum_{d=d_1+d_2} N_{d_1} N_{d_2} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) \quad (2.31)$$

を得ることができ、ここから小さな d に対する N_d は容易に計算される。ここで、和は $d_1 + d_2 = d$ となるような全ての $(d_1, d_2) \in (\mathbb{Z}^{>0})^2$ について取る。

3 Gromov–Witten 不変量

$\mathbb{P}^2$ の $3d - 1$ 点を通る d 次の有理直線の本数を一般化して得られるのが Gromov–Witten 不変量であり、次のように定義される。

高々通常二重点のみを持つ射影曲線を前安定曲線 (pre-stable curve) と呼ぶ。また、前安定曲線とその上の相異なる n 点の組 $(C, (p_1, \dots, p_n))$ で、どの p_i も C の特異点ではないようなものを n 点付き前安定曲線 (n -pointed pre-stable curve) と呼ぶ。前者は $n = 0$ の特別な場合として後者に含まれる事に注意せよ。 C の算術種数を $(C, (p_1, \dots, p_n))$ の種数と呼ぶ。 n 点付き安定曲線 $(C, (p_1, \dots, p_n))$ から $(C', (p'_1, \dots, p'_n))$ への同型写像とは、代数多様体の同型写像 $\varphi: C \rightarrow C'$ で、任意の $i = 1, \dots, n$ に対し $\varphi(p_i) = p'_i$ を満たすものを指す。自己同型写像の集合 $\text{Aut}(C, (p_1, \dots, p_n))$ は群をなし、これが有限群になる時に $(C, (p_1, \dots, p_n))$ は安定 (stable) と呼ばれる。安定曲線のモジュライが滑らかかつ固有な Deligne–Mumford スタックになることが、Deligne–Mumford によって証明され、Knudsen によって点付きの場合に拡張された。

X を代数多様体とする時、 n 点付き前安定曲線 $(C, (p_1, \dots, p_n))$ と写像 $f: C \rightarrow X$ の組 $((C, (p_1, \dots, p_n)), f)$ を n 点付き前安定写像 (n -pointed pre-stable map) と呼ぶ。 n 点付き前安定曲線の同型 $\varphi: (C, (p_1, \dots, p_n)) \rightarrow (C', (p'_1, \dots, p'_n))$ で、 f との可換性 $f' \circ \varphi = f$ を満たすものを n 点付き前安定写像の同型と呼ぶ。 n 点付き前安定写像は、自己同型群が有限群の時に安定 (stable) と呼ばれる。 C の算術種数を $((C, (p_1, \dots, p_n)), f)$ の種数といい、 C の基本類 $[C] \in H_2(C; \mathbb{Z})$ の f による押し出し $f_*[C] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ を $((C, (p_1, \dots, p_n)), f)$ の次数 (degree) と呼ぶ。 X が滑らかな射影多様体の時、任意の $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ に対し、次数 d の安定写像のモジュライは (滑らかとは限らない) 固有な Deligne–Mumford スタックになる。

f が埋め込み写像であれば、 (C, f) の変形の接空間は $H^0(\mathcal{N}_{C/X})$ であり、変形の障害類は $H^1(\mathcal{N}_{C/X})$ の元になる。これは、短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_C \rightarrow f^* \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{N}_{C/X} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

に付随する長完全列

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{T}_C) \rightarrow H^0(f^*\mathcal{T}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{N}_{C/X}) \quad (3.2)$$

$$\rightarrow H^1(\mathcal{T}_C) \rightarrow H^1(f^*\mathcal{T}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{N}_{C/X}) \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

において、 $H^0(\mathcal{T}_C)$ が C の自己同型の接空間、 $H^0(f^*\mathcal{T}_X)$ が C を固定した時の f の変形の接空間、 $H^1(\mathcal{T}_C)$ が C の変形の接空間であることから理解できる。点付きの場合には、法層 $\mathcal{N}_{C/X}$ を

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_C(-p_1 - \cdots - p_n) \rightarrow f^*\mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{N}'_{C/X} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

で定義される $\mathcal{N}'_{C/X}$ で置き換えれば良い。 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d)$ の仮想次元 (virtual dimension, 期待次元 (expected dimension) と呼ばれる) は Euler 数

$$\text{vdim } \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d) := \chi(\mathcal{N}_{C/X}) \quad (3.5)$$

として定義され、Riemann-Roch の定理によって

$$\chi(f^*\mathcal{T}_X) - \chi(\mathcal{T}_C(-p_1 - \cdots - p_n)) = (\dim X(1-g) + \langle c_1(X), d \rangle) - ((1-g) + (2-2g-n)) \quad (3.6)$$

$$= (\dim X - 3)(1-g) + \langle c_1(X), d \rangle + n \quad (3.7)$$

で与えられる。 $\dim X = 3$ の時にこれは種数 g に依らず、 $c_1(X) = 0$ の時に次数 d に依らないことに注意せよ。この意味で、Calabi–Yau 3-fold は安定写像の研究において特別な地位を占めている。

モジュライ空間の真の次元は仮想次元よりも一般には大きい。これが交叉過多 (excess intersection) の問題であり、これを解決するために仮想基本類 (virtual fundamental class) の概念が導入された。これは次数がちょうど仮想次元と一致するようなモジュライ空間のホモロジー類

$$[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d)]^{\text{virt}} \in H_{\text{vdim } \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d)}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d); \mathbb{Q}) \quad (3.8)$$

であり、これを用いて Gromov–Witten 不変量が、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^*(X; \mathbb{Q})$ に対し、

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n,d}^X := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d)]^{\text{virt}}} \text{ev}_1^* \alpha_1 \cup \cdots \cup \text{ev}_n^* \alpha_n \quad (3.9)$$

で定義される。考えている X が明らかなき時には、しばしば X を省略する。仮想基本類に対しては、Gromov–Witten 不変量が良い性質を満たすように幾つかの公理を課す。まず、同変性公理 (equivariance axiom) から

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n,d}^X = (-1)^{\deg \alpha_i \deg \alpha_{i+1}} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n,d}^X \quad (3.10)$$

が導かれる。次に、次数公理 (degree axiom) から、 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n,d}^X$ は

$$\text{vdim } \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta) = \deg \alpha_1 + \cdots + \deg \alpha_n \quad (3.11)$$

でない限り 0 になることが従う。また、基本類公理 (fundamental class axiom) から、 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n-1}$ が空集合にならないような (g, n) に対し

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1 \rangle_{g,n,d} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle_{g,n-1,d} \quad (3.12)$$

となる。これは直感的には、 $1 \in H^0(X; \mathbb{Q})$ が $[X] \in H_{\dim X}(X; \mathbb{Q})$ の Poincaré 双対であることから、1 を挿入しても写像に条件が付かないことから来ている。ここで (3.12) の左辺と右辺に次数公理を使うと、コホモロジーの次数は同じなのにモジュライ空間の仮想次元は点の数の分 (すなわち 1) だけ違うので、両辺とも 0 になることが分かる。因子公理 (divisor axiom) からは、 $p \in H^2(X; \mathbb{Q})$ に対して

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, p \rangle_{g,n,d} = \langle d, p \rangle \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle_{g,n-1,d} \quad (3.13)$$

が従う。これは、次数 d の曲線は p と Poincaré 双対なサイクル C と $\langle d, p \rangle$ 点で交わり、 n 番目の点 p_n としてこれらの $\langle d, p \rangle$ 点のうちの 1 点を取る自由度があることから来ている。また、定値写像公理 (point mapping axiom) から、 $g = 0$ の時に

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n,0} = \begin{cases} \int_X \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 & n = 3, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (3.14)$$

となることが従う。これは $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; d) = X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ に注意すると自然に理解できる。 $g \neq 0$ の時には、モジュライ空間の仮想次元と実際の次元がずれるため、仮想基本類を用いる必要があり、そのために定値写像に対して Gromov–Witten 不変量は非自明になる。例えば、 $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Q})$ に対し

$$\langle \alpha \rangle_{1,1,0} = -\frac{1}{24} \int_X c_{\dim X - 1}(X) \cup \alpha \quad (3.15)$$

となる ([CK99, (7.55)] を見よ)。

以下では種数 0 の Gromov–Witten 不変量のみを考えるので、種数 g はしばしば省略する。また、点の個数 n はコホモロジー類の個数から見て取れるのでこれもしばしば省略し、

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_d := \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n,d}^X \quad (3.16)$$

と書く (d が次数公理から決まるときには、 d を省略することも可能である)。さらに、符号の問題を回避するために、偶数次のコホモロジーのみを扱う。種数 0 の Gromov–Witten 不変量の母関数を

$$\Phi(t) := \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle t, \dots, t \rangle_{n,d} \quad (3.17)$$

と書き、Gromov–Witten ポテンシャル (Gromov–Witten potential) と呼ぶ。 $t \in H^*(X; \mathbb{C})$ を次数が 0 の部分 $t_0 \in H^0(X; \mathbb{C})$ と次数が 2 の部分 $t_1 \in H^2(X; \mathbb{C})$ 、それに残りの部分 t_2 に $t = t_0 + t_1 + t_2$ と分けると、定値写像公理から

$$\Phi(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_0! n_1! n_2!} \langle t_0, \dots, t_0, t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2 \rangle_{n_0+n_1+n_2,d} \quad (3.18)$$

$$= \int_X t \cup t \cup t + \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! n_2!} \langle t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2 \rangle_{n_1+n_2,d} \quad (3.19)$$

となる。ここでさらに因子公理を使うと

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} \langle t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2 \rangle_{n_1+n_2,d} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} \langle t_1, d \rangle^{n_1} \langle t_2, \dots, t_2 \rangle_{n_2,d} \quad (3.20)$$

$$= e^{\langle t_1, d \rangle} \langle t_2, \dots, t_2 \rangle_{n_2,d} \quad (3.21)$$

となるので、

$$\Phi(t) = \int_X t \cup t \cup t + \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\langle t_1, d \rangle} \frac{1}{n!} \langle t_2, \dots, t_2 \rangle_{n,d} \quad (3.22)$$

となる。 $H^0(X; \mathbb{C})$ の基底を $T_0 = 1$, $H^2(X; \mathbb{C})$ の基底を $(T_a)_{a=1}^r$, 残りの部分の基底を $(T_b)_{b=r+1}^s$ とおき、対応する座標を $(t^i)_{i=0}^s$ と書くと、Gromov–Witten ポテンシャルは形式的冪級数環 $\mathbb{Q}[[t^0, q^1, \dots, q^r, t^{r+1}, \dots, t^s]]$

の元になる。但し、 $H^2(X; \mathbb{C})$ の基底 $(T_a)_{a=1}^r$ を、任意の a と X 内の任意の代数曲線 C に対して $\langle C, T_a \rangle \geq 0$ となるように取り、 $q^i = e^{t^i}$ とおいた。次数公理から、 $\langle t_2, \dots, t_2 \rangle_{n,d}$ を展開して得られる項

$$(t^{i_1})^{a_1} \dots (t^{i_k})^{a_k} \quad (3.23)$$

の係数が 0 にならないのは、

$$\frac{1}{2} (a_1 \deg T_{i_1} + \dots + a_k \deg T_{i_k}) = \dim X - 3 + \langle c_1(X), d \rangle + n \quad (3.24)$$

すなわち

$$a_1(1 - \deg T_{i_1}) + \dots + a_k(1 - \deg T_{i_k}) + \langle c_1(X), d \rangle = 3 - \dim X \quad (3.25)$$

の場合である。これは、 $a = 1, \dots, r$, $b = r + 1, \dots, s$ に対して

$$\deg q^a := \langle c_1(X), T_a \rangle, \quad \deg t^b := 1 - \frac{\deg T^b}{2} \quad (3.26)$$

と置くと、Gromov–Witten ポテンシャルが次数 $3 - \dim X$ の同次式であることを示している。

(3.22) が収束するなら、 $H^*(X; \mathbb{C})$ にこれを Frobenius ポテンシャルとする Frobenius 多様体の構造が入る事が知られている (収束性の問題を脇に置けば、形式的 Frobenius 多様体と呼ぶべきものになる)。Frobenius 多様体はモノドロミー保存変形と深く関わるが、次節以降でその理論を紹介する。

4 Frobenius 多様体

Segal による共形場理論の公理に触発されて、Atiyah と Witten によって位相的場の理論 (topological field theory) の公理が与えられた。この意味での d 次元の位相的場の理論は、向き付けられた $(d - 1)$ 次元多様体を対象とし、 $\partial M = M \amalg (-N)$ となるような M から N へのボルディズム (すなわち、 d 次元の向き付けられた境界付き多様体 X であって、その境界 ∂M が M と N の向きを逆にしたもの $-N$ の非交和 (disjoint union) $M \amalg (-N)$ になるようなもの) のホモトピー類を射とするような対称モノイダル圏 Bord_d からベクトル空間のなす対称モノイダル圏への対称モノイダル関手 $\text{Bord}_d \rightarrow \text{Vect}$ と言い換えることが出来る。従って、 d 次元の位相的場の理論 H は、 $(d - 1)$ 次元の向き付けられた多様体 M に対してベクトル空間 $H(M)$ を対応させ、 M から N へのボルディズム X に対して線形写像 $H(X): H(M) \rightarrow H(N)$ を対応させる。 $M \times [0, 1]$ を M から M への射と見たものは恒等写像 $H(M) \rightarrow H(M)$ を与え、 $M \amalg (-M)$ から空集合への射と見たものは内積 $H(M) \otimes H(-M) \rightarrow \mathbb{C}$ を与える。 S 字型のボルディズムが $M \times [0, 1]$ とホモトピックであることから、この内積は非退化で無ければならない。

良く知られているように、2 次元の位相的場の理論は可換な Frobenius 代数 (Frobenius algebra) と同値である。Frobenius 代数とは、非退化双線型形式 $g: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ を持つ単位的結合代数 (unital associative algebra) であり、Frobenius 関係式

$$g(a \circ b, c) = g(a, b \circ c) \quad (4.1)$$

を満たすものを指す。

複素多様体 M の接層 $\mathcal{T}_M$ に $\mathcal{O}_M$ 上の可換な次数付き Frobenius 代数の構造が与えられており、適当な整合性条件を満たすものを Frobenius 多様体 (Frobenius manifold) と呼ぶ:

定義 4.1. Frobenius 多様体は、

- 複素多様体 M
- 計量 (metric) と呼ばれる M の接層 $\mathcal{T}_M$ 上の対称 $\mathcal{O}_M$ 双線型形式 $g: \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$
- $\mathcal{T}_M$ 上の可換な $\mathcal{O}_M$ 結合代数の構造 $\circ: \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$
- 単位ベクトル場 (unit vector field) $e \in \Gamma(\mathcal{T}_M)$
- Euler ベクトル場 (Euler vector field) $E \in \Gamma(\mathcal{T}_M)$

からなる 5 つ組 $(M, \circ, e, E, g)$ であって、計量 g に関する Levi-Civita 接続を ∇ と書いた時に、適当な複素数 D に対して次の条件を満たすものを指す:

- Frobenius 条件: $g(X \circ Y, Z) = g(X, Y \circ Z)$.
- ポテンシャル条件: $\nabla_X(Y \circ Z)$ は ∇ 平坦なベクトル場 X, Y, Z の入れ替えに関して完全対称.
- 計量の平坦性: $[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} = 0$.
- 単位ベクトル場 e の平坦性: $\nabla_X e = 0$.
- Euler ベクトル場 E の線形性: $\nabla_X \nabla_Y E = 0$.
- 積の斉次性: $\text{Lie}_E(\circ) = \circ$.
- 計量の斉次性: $\text{Lie}_E(g) = Dg$.

注意 4.2. [Dub98] では計量の斉次性の定義として

$$g(X + [E, X], Y) + g(X, Y + [E, Y]) - E g(X, Y) = d g(X, Y) \quad (4.2)$$

を採用している。この d と上の D の関係は $D = 2 - d$ で与えられる。

Frobenius 多様体の計量 g に関する Levi-Civita 接続は、Riemann 多様体の場合と同様に、計量接続条件

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - X g(Y, Z) = 0 \quad (4.3)$$

及び零振率条件

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \quad (4.4)$$

から一意的に決まる。計量の平坦性から、平坦座標 (flat coordinate) と呼ばれる座標 $(t^\alpha)_{\alpha=1}^n$ がアファイン変換を除いて一意に決まり、この座標に関する計量の成分

$$\eta_{\alpha\beta} := g(\partial_\alpha, \partial_\beta) \quad (4.5)$$

は定数になる。単位ベクトル場の平坦性から、 ∂_1 が単位ベクトル場になるように平坦座標を選ぶことが出来る。積の構造定数を

$$\partial_\alpha \circ \partial_\beta = \sum_{\gamma=1}^n A_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (4.6)$$

とおき、計量を用いて

$$A_{\alpha\beta\gamma} := \sum_{\delta=1}^n \eta_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta}^\delta \quad (4.7)$$

とおく。Frobenius 条件から、 $A_{\alpha\beta\gamma}$ は $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ の入れ替えに関して完全対称である。平坦座標を用いると、ポテンシャル条件は $\partial_\alpha A_{\beta\gamma\delta}$ が $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ の入れ替えに関して完全対称であるという主張になる。このことから、 M 上の正則関数 Φ が存在して、

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \Phi \quad (4.8)$$

となる。これは、任意の ∇ 平坦なベクトル場 X, Y, Z に対して

$$XYZF = g(X \circ Y, Z) \quad (4.9)$$

が成り立つと言い換えることもできる。この Φ を Frobenius 多様体のポテンシャルと呼ぶ。ポテンシャル条件は、任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\nabla_X(Y \circ Z) - Y \circ \nabla_X(Z) - \nabla_Y(X \circ Z) + X \circ \nabla_Y(Z) - [X, Y] \circ Z = 0 \quad (4.10)$$

が成立することと同値である。 $Y \circ \in \mathcal{E}nd(\mathcal{T}_M)$ の共変微分を

$$\nabla_X(Y \circ)Z := \nabla_X(Y \circ Z) - Y \circ \nabla_X(Z) \quad (4.11)$$

で定義すると、(4.10) は

$$\nabla_X(Y \circ)Z - \nabla_Y(X \circ)Z = [X, Y] \circ Z \quad (4.12)$$

とも書ける。

積の斉次性を頭わに書くと

$$[E, X \circ Y] - [E, X] \circ Y - X \circ [E, Y] = X \circ Y \quad (4.13)$$

となるが、これは

$$X \circ Y + [E, X \circ Y] = X \circ Y + [E, X] \circ Y + X \circ Y + X \circ [E, Y] = (X + [E, X]) \circ Y + X \circ (Y + [E, Y]) \quad (4.14)$$

と書き直され、写像

$$X \mapsto X + [E, X] \quad (4.15)$$

が $(\mathcal{T}_M, \circ)$ の導分になっている事を示している。

Levi-Civita 接続の計量接続条件 (4.3) と計量の斉次性

$$g([E, X], Y) + g(X, [E, Y]) - E g(X, Y) + D g(X, Y) = 0 \quad (4.16)$$

の差を取って得られる

$$g\left(\nabla_E X - [E, X] - \frac{D}{2}X, Y\right) + g\left(X, \nabla_E Y - [E, Y] - \frac{D}{2}Y\right) = 0 \quad (4.17)$$

は、

$$\mathcal{V}: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M, \quad X \mapsto \nabla_E X - [E, X] - \frac{D}{2}X \quad (4.18)$$

が計量に関して歪対称であることを意味する;

$$g(\mathcal{V}(X), Y) + g(X, \mathcal{V}(Y)) = 0. \quad (4.19)$$

Levi-Civita 接続の零振率条件 (4.4) から、 $\mathcal{V}(X)$ は

$$\mathcal{V}(X) = \nabla_X E - \frac{D}{2}X \quad (4.20)$$

とも書けるので、 $\mathcal{V}$ は微分を含まず、 $\Gamma(\mathcal{E}nd \mathcal{T})$ の元を与えることが分かる。Euler ベクトル場 E による積を $\mathcal{U} \in \text{End}(TM)$ と書く；

$$\mathcal{U}(X) = E \circ X. \quad (4.21)$$

$\pi: M \times \mathbb{C}^\times \rightarrow M$ を M 上の自明な $\mathbb{C}^\times$ 束とする。この時、 M の第 1 構造接続 (**first structure connection**)

$$\hat{\nabla}^{(s)}: \pi^* \mathcal{T}_M \rightarrow \pi^* \mathcal{T}_M \otimes \Omega_{M \times \mathbb{C}^\times}^1 \quad (4.22)$$

を

$$\hat{\nabla}_X^{(s)} Y = \nabla_X Y + zX \circ Y, \quad (4.23)$$

$$\hat{\nabla}_{\partial_z}^{(s)} Y = \frac{\partial}{\partial z} Y + \frac{1}{z} \left(\mathcal{V} + \frac{1}{2} + s \right) (Y) + \mathcal{U}(Y) \quad (4.24)$$

で定義する。

定理 4.3. $\hat{\nabla}^{(s)}$ は平坦である。

Proof. $\mathcal{T}_M$ の ∇ 平坦な切断の引き戻しとして得られる $\pi^* \mathcal{T}_M$ の切断 X, Y, Z に対して

$$\hat{\nabla}_X^{(s)} \hat{\nabla}_Y^{(s)} Z = \hat{\nabla}_X^{(s)} (\nabla_Y Z + zY \circ Z) \quad (4.25)$$

$$= \hat{\nabla}_X^{(s)} (zY \circ Z) \quad (4.26)$$

$$= z \hat{\nabla}_X^{(s)} (Y \circ Z) \quad (4.27)$$

$$= z (\nabla_X (Y \circ Z) + zX \circ Y \circ Z) \quad (4.28)$$

となるが、ポテンシャル条件より (4.28) の第 1 項は X と Y の入れ替えについて対称であり、積 $\circ$ の可換性より第 2 項も X と Y の入れ替えについて対称である。従って、

$$\hat{\nabla}_X^{(s)} \hat{\nabla}_Y^{(s)} Z = \hat{\nabla}_Y^{(s)} \hat{\nabla}_X^{(s)} Z \quad (4.29)$$

となる。

一方、 X, Y が $\mathcal{T}_M$ の平坦な切断の引き戻しである時、 $\partial_z Y = 0$ かつ $\partial_z (X \circ Y) = 0$ であり、しかも $\nabla \nabla E = 0$ から $\mathcal{V}(Y) = \nabla_Y E - \frac{D}{2} Y$ も平坦になる。従って、

$$\hat{\nabla}_X^{(s)} \hat{\nabla}_{\partial_z}^{(s)} Y = X \circ \mathcal{V}(Y) + \nabla_X (\mathcal{U}(Y)) + \left(\frac{1}{2} + s \right) X \circ Y + zX \circ \mathcal{U}(Y), \quad (4.30)$$

$$\hat{\nabla}_{\partial_z}^{(s)} \hat{\nabla}_X^{(s)} Y = \hat{\nabla}_{\partial_z}^{(s)} (z(X \circ Y)) \quad (4.31)$$

$$= X \circ Y + \left(\mathcal{V} + \frac{1}{2} + s \right) (X \circ Y) + z\mathcal{U}(X \circ Y) \quad (4.32)$$

となるが、

$$X \circ \mathcal{U}(Y) = X \circ E \circ Y = E \circ X \circ Y = \mathcal{U}(X \circ Y) \quad (4.33)$$

から、(4.30) と (4.32) の最後の項は一致する。ポテンシャル条件 (4.10) から

$$\nabla_X (E \circ Y) - E \circ \nabla_X Y - \nabla_E (X \circ Y) - X \circ \nabla_E Y - [X, E] \circ Y = 0 \quad (4.34)$$

となり、

$$\nabla_X (E \circ Y) - \nabla_E (X \circ Y) - [X, E] \circ Y = 0 \quad (4.35)$$

を得ることに注意すると、

$$X \circ \mathcal{V}(Y) + \nabla_X(\mathcal{U}(Y)) = X \circ \left(\nabla_E Y - [E, Y] - \frac{D}{2} Y \right) + \nabla_X(E \circ Y) \quad (4.36)$$

$$= -X \circ [E, Y] - \frac{D}{2} X \circ Y + \nabla_X(E \circ Y) \quad (\because \nabla Y = 0) \quad (4.37)$$

$$= -[E, X \circ Y] + [E, X] \circ Y + X \circ Y - \frac{D}{2} X \circ Y + \nabla_X(E \circ Y) \quad (\because \text{Lie}_E(\circ) = \circ) \quad (4.38)$$

$$= X \circ Y + \nabla_X(E \circ Y) + [E, X] \circ Y - [E, X \circ Y] - \frac{D}{2} X \circ Y \quad (4.39)$$

$$= X \circ Y + \nabla_E(X \circ Y) - [E, X \circ Y] - \frac{D}{2} X \circ Y \quad (\because (4.35)) \quad (4.40)$$

$$= X \circ Y + \mathcal{V}(X \circ Y) \quad (4.41)$$

となり、(4.30) と (4.32) の最初の 2 項も一致する。 $\square$

5 量子コホモロジー

滑らかな射影多様体 X に対し、Gromov-Witten 不変量の母関数を Φ とおく。これは形式的冪級数環 $\mathbb{Q}[[t^0, q^1, \dots, q^r, t^{r+1}, \dots, t^s]]$ の元であるが、これが $t^0 = q^1 = \dots = q^r = t^{r+1} = \dots = t^s = 0$ の近傍 M で収束していると仮定すると、 M に Φ を Frobenius ポテンシャルとし、 $(t^i)_{i=0}^s$ を平坦座標とするような Frobenius 多様体の構造が入る。単位ベクトル場は

$$e = \partial_0 \quad (5.1)$$

であり、Euler ベクトル場は $t^a(c_1(X)) \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$E := \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{\deg T_i}{2} \right) t^i \partial_i + \sum_{a=1}^r t^a(c_1(X)) \partial_a \quad (5.2)$$

で与えられる ((3.26) を見よ)。ベクトル場の次数を

$$(\deg \partial_i) \partial_i := [E, \partial_i] = \left(\frac{\deg T_i}{2} - 1 \right) \partial_i \quad (5.3)$$

で定義すると、積の斉次性 $\text{Lie}_E(\circ) = \circ$ から

$$X \circ Y = X(\text{Lie}_E(\circ))Y \quad (5.4)$$

$$= [E, X \circ Y] - [E, X] \circ Y - X \circ [E, Y] \quad (5.5)$$

$$= (\deg(X \circ Y) - \deg X - \deg Y) X \circ Y \quad (5.6)$$

即ち

$$\deg(X \circ Y) = \deg X + \deg Y + 1 \quad (5.7)$$

となる。また、計量の斉次性 $\text{Lie}_E g = Dg$ から、平坦かつ斉次なベクトル場 X, Y に対し

$$Dg(X, Y) = (\text{Lie}_E g)(X, Y) \quad (5.8)$$

$$= Eg(X, Y) - g([E, X], Y) - g(X, [E, Y]) \quad (5.9)$$

$$= -(\deg(X) + \deg(Y))g(X, Y) \quad (5.10)$$

が成り立つので、

$$g(\partial_i, \partial_j) \neq 0 \quad (5.11)$$

となるのは

$$-\deg \partial_i - \deg \partial_j = \left(1 - \frac{\deg T_i}{2}\right) + \left(1 - \frac{\deg T_j}{2}\right) \quad (5.12)$$

$$= D := 2 - \dim X \quad (5.13)$$

となる場合に限られる。(4.20) から

$$\mathcal{V}(\partial_i) = \nabla_{\partial_i} E - \frac{D}{2} \partial_i \quad (5.14)$$

$$= \left(1 - \frac{\deg T_i}{2}\right) \partial_i - \left(1 - \frac{\dim X}{2}\right) \partial_i \quad (5.15)$$

$$= -\left(\frac{\deg T_i}{2} - \frac{\dim X}{2}\right) \partial_i \quad (5.16)$$

なので、 $\mu = -\mathcal{V}$ とおくと、 $T_i \in H^{2p}(X; \mathbb{C})$ に対し

$$\mu(\partial_i) = \left(p - \frac{\dim X}{2}\right) \partial_i \quad (5.17)$$

となる。

Frobenius 多様体の公理のうち、Frobenius 条件、ポテンシャル条件、計量の平坦性、単位ベクトル場の平坦性、それに Euler ベクトル場の線形性などは定義から容易に従い、最も自明でないのは積の結合率である。これは、 $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ の境界をなす 4 点のうちの 2 点を取り、それを結ぶ鎖 (chain) を $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X; \beta)$ に引き戻して得られるコボルディズムを用いて示される Gromov–Witten 不変量の関係式から来るが、詳細は [KM94] を見よ。

全ての $a = 1, \dots, r$ に対して $q^a = 0$ とおくと、 $d = 0$ の項のみが寄与し、定値写像公理によって積 $\circ$ は古典的なカップ積に一致する。従って、Frobenius 多様体 M の積 $\circ$ は、 $H^*(X; \mathbb{C})$ でパラメトライズされた $(H^*(X; \mathbb{C}), \cup)$ の変形を与えている。こうして得られる可環の族は X の量子コホモロジー (quantum cohomology) と呼ばれる。

例として $\mathbb{P}^2$ の場合を考えよう。 $H^*(\mathbb{P}^2)$ の座標を

$$t^0 = [\mathbb{P}^2], \quad t^1 = [l], \quad t^2 = [\text{pt}] \quad (5.18)$$

とおくと、Gromov–Witten ポテンシャルは

$$\Phi(t^0, t^1, t^2) = \frac{1}{2} \left((t^0)^2 t^2 + t^0 (t^1)^2 \right) + \sum_{d=1}^{\infty} N_d e^{dt^1} \frac{(t^2)^{3d-1}}{(3d-1)!} \quad (5.19)$$

となる。座標 (t^0, t^1, t^2) に関する計量は

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

となり、その逆行列 g^{ab} も同じ行列で表される。 $(i, j, k, l) = (1, 1, 2, 2)$ に対して WDVV 方程式を書くと、左辺は

$$\Phi_{11a} g^{ab} \Phi_{b22} = \Phi_{110} \Phi_{222} + \Phi_{111} \Phi_{122} + \Phi_{112} \Phi_{022} \quad (5.21)$$

$$= 1 \cdot \Phi_{222} + \Phi_{111} \Phi_{122} + \Phi_{112} \cdot 0 \quad (5.22)$$

$$= \Phi_{222} + \Phi_{111} \Phi_{122} \quad (5.23)$$

右辺は

$$\Phi_{12a}g^{ab}\Phi_{b12} = \Phi_{120}\Phi_{212} + \Phi_{121}\Phi_{112} + \Phi_{122}\Phi_{012} \quad (5.24)$$

$$= 0 \times \Phi_{212} + \Phi_{112}\Phi_{112} + \Phi_{122} \times 0 \quad (5.25)$$

$$= \Phi_{112}^2 \quad (5.26)$$

となる。

$$\Phi_{222} = \sum_{d=1}^{\infty} N_d e^{dt^1} \frac{(t^2)^{3d-4}}{(3d-4)!} \quad (5.27)$$

なので、 Φ_{222} における $(t^2)^{3d-4}e^{dt^1}$ の係数は $\frac{1}{(3d-4)!}N_d$ である。一方、

$$\Phi_{111} = \sum_{d=1}^{\infty} N_d d^3 e^{dt^1} \frac{(t^2)^{3d-1}}{(3d-1)!}, \quad (5.28)$$

$$\Phi_{122} = \sum_{d=1}^{\infty} N_d d e^{dt^1} \frac{(t^2)^{3d-3}}{(3d-3)!} \quad (5.29)$$

なので、 $\Phi_{111}\Phi_{122}$ における $(t^2)^{3d-4}e^{dt^1}$ の係数は

$$\sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^3 d_2 \frac{1}{(3d_1-1)!} \frac{1}{3(d_2-3)!} \quad (5.30)$$

である。同様に、

$$\Phi_{112} = \sum_{d=1}^{\infty} N_d d^2 e^{dt^1} \frac{(t^2)^{3d-2}}{(3d-2)!}, \quad (5.31)$$

なので、 Φ_{112}^2 における $(t^2)^{3d-4}e^{dt^1}$ の係数は

$$\sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^2 d_2^2 \frac{1}{(3d_1-2)!} \frac{1}{(3d_2-2)!} \quad (5.32)$$

である。これらを合わせると、(2.31) で言及した

$$N_d = \sum_{d=d_1+d_2} N_{d_1} N_{d_2} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) \quad (5.33)$$

が得られる。

量子コホモロジーにおいて、パラメーター $(t^0, q^1, \dots, q^r, t^{r+1}, \dots, t^s)$ のうち $q^1, \dots, q^r$ のみを残して残りを 0 にしたものを小量子コホモロジー (small quantum cohomology) と呼ぶ。また、これとの対比で、全ての方向の変形を考えたものを大量子コホモロジー (big quantum cohomology) と呼ぶ。 $\mathbb{P}^2$ の小量子コホモロジーは環として

$$\mathbb{C}[x]/(x^3 - q) \quad (5.34)$$

と同型になる。

6 半単純 Frobenius 多様体

$\mathbb{C}$ 上の可換環は、 $\mathbb{C}$ の直和になっている時に半単純 (semisimple) と呼ばれる。Frobenius 多様体 M に対し、 $\mathcal{O}_M$ 代数 $(\mathcal{T}_M, \circ)$ が M 上で局所的に直和 $\mathcal{O}_M^{\oplus n}$ と $\mathcal{O}_M$ 代数として同型である時、 M は半単純 (semisimple) であるという。半単純 Frobenius 多様体に対し、直和分解 $\mathcal{T}_M \cong \mathcal{O}_M^{\oplus n}$ に対応する冪等元を $(e_i)_{i=1}^n$ とおく；

$$e_i \circ e_j = \delta_{ij} e_i. \quad (6.1)$$

$(e_i)_{i=1}^n$ を $\mathcal{T}_M$ の局所枠として、対応する Christoffel 記号を Γ_{ij}^k とおく；

$$\nabla_{e_i}(e_j) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k. \quad (6.2)$$

また、 $(e_i)_{i=1}^n$ に関する Lie 括弧の構造定数を f_{ij}^k とおく；

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n f_{ij}^k e_k. \quad (6.3)$$

ポテンシャル条件 (4.10) で $X = e_i, Y = e_j, Z = e_k$ と置いて得られる

$$\nabla_{e_i}(e_j \circ e_k) + e_i \circ \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j}(e_i \circ e_k) - e_j \circ \nabla_{e_i} e_k = [e_i, e_j] \circ e_k \quad (6.4)$$

の左辺は

$$\sum_{l=1}^n (\delta_{jk} \Gamma_{ik}^l + \delta_{ij} \Gamma_{jk}^l - \delta_{ik} \Gamma_{jl}^l - \delta_{jl} \Gamma_{ik}^l) e_l \quad (6.5)$$

であり、右辺は

$$f_{ij}^k e_k \quad (6.6)$$

であるので、両辺の e_k の係数を比較することによって

$$f_{ij}^k = \delta_{jk} \Gamma_{ik}^k + \delta_{ij} \Gamma_{jk}^k - \delta_{ik} \Gamma_{jl}^k - \delta_{jl} \Gamma_{ik}^k = 0 \quad (6.7)$$

を得る。すなわち e_i たちは可換であり、適当な局所座標 $(u_i)_{i=1}^n$ に対して

$$e_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (6.8)$$

となる。

局所枠 $(e_i)_{i=1}^n$ を用いて Euler ベクトル場を

$$E = \sum_{j=1}^n E^j e_j \quad (6.9)$$

と表すと、積の斉次性 (4.13) で $X = Y = e_i$ と置いて得られる

$$\left[\sum_{j=1}^n E^j e_j, e_i \right] - \left[\sum_{j=1}^n E^j e_j, e_i \right] \circ e_i - e_i \circ \left[\sum_{j=1}^n E^j e_j, e_i \right] = e_i \quad (6.10)$$

の左辺の e_j の係数が

$$-e_i(E^j) + e_i(E^j)\delta_{ij} + e_i(E^j)\delta_{ij} = -e_i(E^j) + 2e_i(E^j)\delta_{ij} \quad (6.11)$$

であることから、

$$-e_i(E^j) + 2e_i(E^j)\delta_{ij} = \delta_{ij} \quad (6.12)$$

すなわち

$$e_i(E^j) = \delta_{ij} \quad (6.13)$$

となる。従って、必要ならば u_i を平行移動することによって

$$E = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (6.14)$$

とできる。こうして得られる座標を M の正準座標 (canonical coordinate) と呼ぶ。これはシンプレクティック幾何における Darboux 座標とは無関係である。正準座標が積構造を用いて特徴付けられるのは、平坦座標が計量 (あるいはそれに付随した Levi-Civita 接続) で特徴付けられるのと対照的である。Frobenius 条件から、

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \circ \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \quad (6.15)$$

$$= g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_i} \circ \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \quad (6.16)$$

$$= \delta_{ij} g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \quad (6.17)$$

$$(6.18)$$

となるので、

$$\Delta_i = g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.19)$$

とおくと、 $\left(\Delta_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{i=1}^n$ が $\mathcal{T}_M$ の正規直交枠をなす。Euler ベクトル場 E の線形性から、 $\mathcal{V}$ を平坦枠 $\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)_{\alpha=1}^n$ で表示したものは定数行列になる。一方、正規化された正準枠 $\left(\Delta_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{i=1}^n$ に関して $\mathcal{V}$ を表示したものを V とおくと、 $\mathcal{V}$ の反対称性 (4.19) から

$$V \in \mathfrak{so}(N, \mathbb{C}) \quad (6.20)$$

となる。 $\mathcal{V}$ を平坦枠で表示したものが定数であり、 V はそこから座標変換で得られているので、 M 上の点を動かした時、 V は固定された随伴軌道上を動く。Killing 形式を用いて $\mathfrak{so}(N, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{so}(N, \mathbb{C})^*$ を同一視すると、これは余随伴軌道と見做せ、自然にシンプレクティック多様体の構造が入る。

(6.14) から、 $\mathcal{U}$ を正規化された正準枠で書くと

$$U = \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha E_\alpha \quad (6.21)$$

となる。但し、 E_α は (α, α) 成分が 1 で、残りが 0 であるような行列である；

$$(E_\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma}. \quad (6.22)$$

定理 6.1. V の正準座標 $u = (u_1, \dots, u_n)$ に関する依存性は、時間に依存する Hamilton 関数

$$H_i(V; u) = \sum_{i \neq j} \frac{V_{ij}^2}{u_i - u_j} \quad (6.23)$$

による Hamilton 流

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = \{V, H_i(V; u)\} \quad (6.24)$$

として表される。また、任意の u に対し $V(u)$ が相異なる n 個の固有値を持っている時には、 V から Frobenius 多様体 M が再構成できる。

Proof. Frobenius 多様体の積構造 $\circ: \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$ に対応する $\text{End}(\mathcal{T}_M)$ 値 1 形式を正準座標と正規化された正準枠で表示すると、

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \circ \left(\Delta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) = \delta_{ij} \left(\Delta_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \quad (6.25)$$

から

$$C = \sum_{i=1}^N E_i du_i \quad (6.26)$$

となる。第一構造接続の平坦性

$$\left[\nabla + zC, \frac{\partial}{\partial z} + U + \frac{V}{z} \right] = 0 \quad (6.27)$$

の z に関して 0 次の項から

$$\nabla U + [C, V] - C = 0 \quad (6.28)$$

を得る (z に関して 1 次の項から得られる

$$[C, U] = 0 \quad (6.29)$$

は (6.21) と (6.26) から直ちに従い、 -1 次の項から得られる

$$\nabla V = 0 \quad (6.30)$$

は ∇ が平坦枠に関して定数であることから分かる)。 $A_i \in \text{End}(\mathcal{T}_M)$ を

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} = \frac{\partial}{\partial u_i} + A_i \quad (6.31)$$

で定義すると、(6.28) は

$$E_i + [A_i, U] + [E_i, V] - E_i = 0 \quad (6.32)$$

となり、

$$[U, A_i] = [E_i, V] \quad (6.33)$$

を得る。

$$U = \sum_{i=1}^n u_i E_i \quad (6.34)$$

より、

$$((\text{ad } U)(A))_{jk} = \sum_{i=1}^n (u_i E_i A - u_i A E_i)_{jk} \quad (6.35)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\delta_{ij} u_i A_{ik} - \delta_{ik} u_i A_{ji}) \quad (6.36)$$

$$= (u_j - u_k) A_{jk} \quad (6.37)$$

なので、 A_i が歪対称であることに注意すると、

$$A_i = (\text{ad } U)^{-1}(\text{ad } E_i)V \quad (6.38)$$

となる。さらに、 $[U, E_i] = 0$ から $(\text{ad } U)^{-1}(\text{ad } E_i) = (\text{ad } E_i)(\text{ad } U)^{-1}$ であり、

$$Z_{ij} := (\text{ad } U)^{-1}V = \frac{V_{ij}}{u_i - u_j} \quad (6.39)$$

とおくと

$$A_i = (\text{ad } E_i)Z \quad (6.40)$$

となる。 $\nabla \nabla E = 0$ から

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} + [A_i, V] = 0 \quad (6.41)$$

であり、 V が (余) 随伴軌道上を動くことが分かる。

$$H_i(V) := \sum_{j \neq i} \frac{V_{ij}^2}{u_i - u_j} \quad (6.42)$$

とおくと、

$$dH_i(V) = 2 \sum_{j \neq i} \frac{V_{ij}}{u_i - u_j} dV_{ij} = 2 \sum_{j \neq i} Z_{ij} dV_{ij} \quad (6.43)$$

となる。(余) 随伴軌道の接ベクトルを $X = [A, V], Y = [B, V] \in T_V \text{so}(N, \mathbb{C})$ と書くと、

$$\omega(X, Y) = \text{tr}(V[A, B]) = \text{tr}(AY) \quad (6.44)$$

なので、 $X = -[A_i, V]$ の時、

$$\iota_X \omega(Y) = -\text{tr}(A_i Y) \quad (6.45)$$

$$= -\text{tr}([E_i, Z]Y) \quad (6.46)$$

$$= -\sum_{j=1}^N (Z_{ij} Y_{ji} - Z_{ji} Y_{ij}) \quad (6.47)$$

$$= 2 \sum_{j=1}^N Z_{ij} Y_{ij} \quad (\because Z_{ij} = Z_{ji} \text{ かつ } Y_{ij} = -Y_{ji}) \quad (6.48)$$

となり、 $dH_i = \iota_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \omega$ が分かる。逆に、 V が与えられた時、Levi-Civita 接続を

$$A_i = (\text{ad } E_i)(\text{ad } U)^{-1}V \quad (6.49)$$

で再構成することが出来る。積構造は正準なので、計量が分かれば良い。単位ベクトル e は

$$\nabla_e E = \nabla_E e - [E, e] = -[E, e] \quad (6.50)$$

と

$$[E, e \circ X] = [E, e] \circ X + e \circ X + e \circ [E, X] \quad (6.51)$$

を満たすので、

$$\nabla_e E = e \quad (6.52)$$

となり、

$$\mathcal{V}(e) = \left(1 - \frac{D}{2}\right) e \quad (6.53)$$

となる。すなわち、 e を V から M 上の関数を掛ける任意性を除いて一意的に決める。 e の平坦性から、この関数倍は定数倍を除いて一意的に決まる。 e を正準正規直交基底を用いて

$$e = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^N \Delta_i^{-1} \left(\Delta_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \quad (6.54)$$

と書くことによって、計量

$$g \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) = \delta_i^{-2} \delta_{ij} \quad (6.55)$$

が求まる。 $\square$

7 半単純 Frobenius 多様体のモノドロミーデータによるパラメーター付け

C をコンパクトな Riemann 面とし、 $p_1, \dots, p_n$ をその上の点とする。 $p_1, \dots, p_n$ に極を持つ C 上の N 階線型常微分方程式が与えられた時、そのモノドロミーデータとしては、まず基本群の表現 $\pi_1(C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の共役に関する同型類

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}), \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})) / \mathrm{GL}_N(\mathbb{C}) \quad (7.1)$$

が挙げられる。常微分方程式が Frobenius 多様体の第一構造接続の z 方向の平坦切断を定義する方程式である時、 $C = \mathbb{P}^1$, 特異点は $\{0, \infty\}$ であり、 N は Frobenius 多様体の次元である。この時 $\pi_1(C \setminus \{0, \infty\}) \cong \mathbb{Z}$ であり、 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の共役類、すなわち固有値 (あるいはより精密に Jordan 分解) のみがモノドロミーデータになるように思われる。しかし、これは 2 つの理由で正しくない。まず、第一構造接続は無限遠では確定特異点を持つが、原点では不確定特異点を持ち、そこでのモノドロミーデータは、単なる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の元一つよりも細かい情報を持っている。次に、モノドロミー保存変形が Frobenius 多様体から来ているので、モノドロミーデータも Frobenius 多様体の構造から来る余分の情報を持っている。

無限遠でのモノドロミーデータは $(H, \langle -, - \rangle, \mu, e_1, \rho)$ である。ただし、 H は N 次元の複素ベクトル空間、 $\langle -, - \rangle$ は H 上の非退化複素双線型写像、 $\mu: H \rightarrow H$ は $\langle -, - \rangle$ に関して歪対称な線形写像、 $e_1 \in H$ は μ の固有値 $-\frac{D}{2}$ の固有ベクトル、 $\rho: H \rightarrow H$ は $\{x, y\} := \left\langle e^{\pi\sqrt{-1}\mu} x, y \right\rangle$ に関して歪対称 $\{\rho x, y\} + \{x, \rho y\} = 0$ であって、しかも H の μ に関する固有空間分解を $H = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec} \mu} H_\lambda$ と書いた時に $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots$ なる分解があって、

$$\rho_k(H_\lambda) \subset H_{\lambda+k} \quad (7.2)$$

を満たす。

第一構造接続は原点で 2 位の極を持っており、半単純 Frobenius 多様体に対しては、正規化された正準座標で

$$\nabla_{\partial_z} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{U}{z^2} + \frac{V}{z} \quad (7.3)$$

と書かれる。常微分方程式の一般論により、形式的なゲージ変換

$$R(z) = 1 + R_1 z + R_2 z^2 + \cdots \in \text{End}(\mathbb{C}^N) \llbracket z \rrbracket \quad (7.4)$$

によって

$$R^* \nabla_{\partial_z} := R^{-1} \nabla_{\partial_z} R = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{U}{z^2} \quad (7.5)$$

とできる。従って、形式解は

$$R(z) e^{-U/z} \quad (7.6)$$

となる。

原点が不確定特異点であることの帰結として、形式解は通常発散する。しかし、第一構造接続を (逆)Laplace 変換して得られる第二構造接続は無限遠点と、それ以外の (高々) N 個の点に確定特異点を持つ。一般に、第一構造接続の平坦接続は、第二構造接続の平坦接続を Laplace 変換して得られる。

一方、原点でのモノドロミーデータは、対角成分が 1 であるような上半三角行列 $S = (S_{ij})_{i,j=1}^N$ であり、Stokes 行列と呼ばれる；

$$S_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (7.7)$$

これに加えて、原点と無限遠点の接続行列がある。これは線形同型 $C: \mathbb{C}^N \rightarrow H$ であり、任意の $a, b \in \mathbb{C}^N$ に対して

$$a^T S b = \left\langle C a, e^{\pi\sqrt{-1}\mu} e^{\pi\sqrt{-1}\rho} C b \right\rangle \quad (7.8)$$

を満たす。

Stokes 行列 S と接続行列 C は、対角行列 $D = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ による変換

$$(S, C) \mapsto (D S D, C D) \quad (7.9)$$

を除いて定義されている。

半径 $R > 0$ と偏角 $\varphi \in [0, 2\pi]$ を 1 つ選んで固定する。 $\ell := \ell_+ \cup \ell_-$ を $\ell_+ := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \arg z = \varphi\}$ および $\ell_- := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \arg z = \varphi + \pi\}$ で定義する。 ℓ は $\mathbb{C}^\times$ を 2 つの領域 $\Pi_{\text{left}} := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \varphi < \arg z < \varphi + \pi\}$ と $\Pi_{\text{right}} := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \varphi + \pi < \arg z < \varphi\}$ に分割する。与えられた $u = (u_1, \dots, u_N)$ で $i \neq j$ なら $u_i \neq u_j$ となるものに対して、

- (i) $\{z \in \Pi_{\text{left}} \mid |z| > R\}$ および $\{z \in \Pi_{\text{right}} \mid |z| > R\}$ で定義された $N \times N$ 行列値の正則関数 Φ_{left} と Φ_{right} で、境界 $|z| = R$ および ℓ で連続であり、無限遠で $\Phi_{\text{left/right}}(z) = 1 + O(1/z)$ を満たすものと、
- (ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ で正則な $\text{Hom}(H, \mathbb{C}^N)$ 値の関数 Φ_0 で、 $|z| = R$ で連続であり、 $\det \Phi_0(0) \neq 0$ を満たすもの

の組で、

$$z \in \ell_+ \text{ かつ } |z| > R \text{ の時 } \Phi_{\text{right}}(z)e^{zU} = \Phi_{\text{left}}(z)e^{zU}S, \quad (7.10)$$

$$z \in \ell_- \text{ かつ } |z| > R \text{ の時 } \Phi_{\text{right}}(z)e^{zU} = \Phi_{\text{left}}(z)e^{zU}S^T, \quad (7.11)$$

$$|z| = R \text{ かつ } z \in \Pi_{\text{left}} \text{ の時 } \Phi_{\text{left}}(z)e^{zU} = \Phi_0(z)z^\mu z^\rho C, \quad (7.12)$$

$$|z| = R \text{ かつ } z \in \Pi_{\text{right}} \text{ の時 } \Phi_{\text{right}}(z)e^{zU} = \Phi_0(z)z^\mu z^\rho C \quad (7.13)$$

を満たすようなものを探す問題を Riemann-Hilbert 境界値問題 (Riemann-Hilbert boundary value problem) と呼ぶ。与えられた φ に対し、

$$\mathcal{R}_{jk} := \{ \sqrt{-1}r(\bar{u}_j - \bar{u}_k) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0 \} \quad (7.14)$$

とおき、

$$\mathcal{U}(\varphi) := \{ u \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta \mid \text{任意の } j < k \text{ に対し } \mathcal{R}_{jk} \subset \Pi_{\text{left}} \} \quad (7.15)$$

とする。但し、 $\Delta = \bigcup_{i \neq j} \{ u \in \mathbb{C}^N \mid u_i = u_j \}$ は $\mathbb{C}^N$ の大きな対角集合 (the big diagonal) である。

$$\mathcal{U}_0(\varphi) := \{ u \in \mathcal{U}(\varphi) \mid \text{Riemann-Hilbert 境界値問題が解を持ち、} \Phi_0(0)e_1 \in \mathbb{C}^N \text{ のどの成分も } 0 \text{ ではない} \} \quad (7.16)$$

とおく。 $\Phi_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_p(u)z^p$ とおき、 $(-, -)$ を $\mathbb{C}^N$ の標準内積とする。 $e_1, \dots, e_N$ を μ の固有ベクトルとする；

$$\mu(e_i) = \mu_i e_i, \quad \mu_1 = -\frac{D}{2}. \quad (7.17)$$

さらに、

$$\eta_{\alpha\beta} = \langle e_\alpha, e_\beta \rangle, \quad (\eta^{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\beta})^{-1} \quad (7.18)$$

とする。

定理 7.1 ([Dub98, Theorem 1] 及びその参考文献を見よ)。

$$t_i(u) = (\phi_0(u)e_i, \phi_1(u)e_1), \quad t^i = \eta^{ij}e_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.19)$$

$$F = \frac{1}{2}((\phi_0 t, \phi_1 t) - 2(\phi_0 t, \phi_1 e_1) + (\phi_1 e_1, \phi_2 e_1) - (\phi_3 e_1, \phi_0 e_1)), \quad (7.20)$$

$$E(t) = \sum_{i=1}^N (1 + \mu_1 - \mu_i) t^i \frac{\partial}{\partial t^i} + \sum_{i=1}^N (R_1)_1^\alpha \frac{\partial}{\partial t^i} \quad (7.21)$$

によって $\mathcal{U}_0$ に半単純 Frobenius 多様体の構造が入る。任意の半単純 Frobenius 多様体はこのようにしてモノドロミーデータから得られる。

モノドロミーデータには組紐群

$$B_N = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-2 \rangle \quad (7.22)$$

が、

$$K_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 1 & j = k \neq i, i+1 \text{ または } (j, k) = (i, i+1), (i+1, i) \\ -S_{i, i+1} & (j, k) = (i, i), \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (7.23)$$

と置いた時、

$$\sigma_i: (S, C) \mapsto (K^{(i)}SK^{(i)}, CK^{(i)}) \quad (7.24)$$

で作用する。この組紐群の作用によって $\mathcal{U}_0(\varphi)$ を貼り合わせることによって任意の半単純 Frobenius 多様体は構成される。

例: $X = \mathbb{P}^d$ の時、 $H = H^*(X) = \text{span}\{p_1, \dots, p_{d+1}\}$ であり、 $\langle p_\alpha, p_\beta \rangle = \delta_{\alpha+\beta+2, d}$ である。 $\rho(-) = c_1(X) \cup (-)$ なので、

$$\rho(p_\alpha) = \begin{cases} (d+1)e_{\alpha+1} & \alpha \leq d, \\ 0 & \alpha = d+1 \end{cases} \quad (7.25)$$

かつ

$$\mu = \frac{1}{2} \text{diag}(-d, -d+2, \dots, d-2, d) \quad (7.26)$$

である。Stokes 行列は

$$s_{ij} = \begin{cases} \binom{d+1}{j-i} & i \leq j, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (7.27)$$

であり、接続行列は

$$C = C' C'', \quad C' = (C'^\alpha_\beta), \quad C'' = (C''^\beta_j), \quad (7.28)$$

$$C'^\alpha_\beta = \frac{(-1)^{d+1}}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}} \sqrt{-1}^{\bar{d}}} \begin{cases} A_{\alpha-\beta(d)} & \alpha \geq \beta, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases} \quad (7.29)$$

$$C''^\beta_\alpha = \frac{(2\pi\sqrt{-1}(j=1))^{\beta-1}}{(\alpha-1)!} \quad (7.30)$$

である。ここで

$$\bar{d} = \begin{cases} 1 & d:\text{偶数}, \\ 0 & d:\text{奇数}, \end{cases} \quad (7.31)$$

であり、 $A_0(d), A_1(d), \dots, A_d(d) \in \mathbb{C}$ は Laurent 展開の係数

$$(-1)^{d+1} \Gamma(-x)^{d+1} e^{\pi\sqrt{-1}\bar{d}x} = \frac{1}{x^{d+1}} + \frac{A_1(d)}{x^d} + \dots + \frac{A_d(d)}{x} + O(1) \quad (7.32)$$

として定義される。Stokes 行列が $\mathbb{P}^d$ の完備例外列

$$(E_1, \dots, D_{d+1}) := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(d)) \quad (7.33)$$

の Euler 形式

$$\chi(E, F) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim \text{Ext}^k(E, F) \quad (7.34)$$

に関する Gram 行列になっていることに注意せよ;

$$s_{ij} = \chi(E_i, E_j). \quad (7.35)$$

Dubrovin は、

1. 射影多様体 X の量子コホモロジーが半単純であるための必要十分条件は X が完備例外列を持つ Fano 多様体であり、
2. その時の Stokes 行列は完備例外列の Euler 形式に関する Gram 行列であり、
3. 中心接続行列は $C = C'C''$ なる分解を持っていて、 C'' の列は $\text{ch}(E_j) \in H^*(X)$ の成分であり、 $C': H^*(X) \rightarrow H^*(X)$ は $c_1(X)$ によるカップ積と可換、すなわち任意の $a \in H^*(X)$ に対して $C'(c_1(X)a) = c_1(X)C'(a)$ である

と予想した [Dub98]。これを精密化したものが Γ 予想である [GGI16, GI, Iri16]。

8 無分散 n KdV 階層

Kadomtsev–Petviashvili 方程式は、 (x, y) を空間変数、 t を時間変数、 v を未知関数とする 4 階の非線形偏微分方程式

$$(v_t + 6vv_x + v_{xxx})_x + 3\sigma^2 v_{yy} = 0 \quad (8.1)$$

であり、擬微分作用素

$$M = \partial_x + \sum_{m=1}^{\infty} v_m \partial_x^{-m} \quad (8.2)$$

に対する Lax 方程式

$$\frac{\partial M}{\partial t_i} = [(M^i)_+, M], \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.3)$$

と

$$v_1 = v, \quad t_1 = x, \quad t_2 = \sigma y, \quad t_3 = -4t \quad (8.4)$$

によって対応している。(8.3) において i を全ての正の自然数に渡って走らせることによって得られる方程式系を KP 階層 (KP hierarchy) と呼ぶ。

正の整数 n に対し、 M^n が微分作用素の時 (すなわち、 n 階の微分作用素

$$L = \partial_x^n + u_{p-2}(x)\partial_x^{p-2} + \cdots + u_0(x), \quad (8.5)$$

が存在して

$$M = L^{1/n} \quad (8.6)$$

となる時)、対応する KP 階層を n KdV 階層と呼ぶ。 n の倍数 i に対して $(L^i)_+ = L^i$ は L と明らかに可換なので、 n KdV 階層の t_i 依存性は自明になる。2KdV 階層において

$$u_0 = u, \quad t_1 = x, \quad t_3 = -4t \quad (8.7)$$

と置いて得られる最初の自明でない方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (8.8)$$

を Korteweg–de Vries 方程式と呼ぶ。

微分作用素の表象を取って

$$M := p + \sum_{m=1}^{\infty} v_m p^{-m}, \quad (8.9)$$

$$H_i := (M^i)_+, \quad (8.10)$$

と置き、交換子を Poisson 括弧

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (8.11)$$

で置き換えて得られる方程式系

$$\frac{\partial M}{\partial t_i} = \{(M^i)_+, M\} \quad (8.12)$$

を無分散 (dispersionless) KP 階層と呼ぶ。また、 n KdV 階層の無分散極限を無分散 n KdV 階層と呼ぶ。式を簡単にするために、 p をスケール変換して

$$L(p, x) = \frac{1}{n} p^n + u_{n-2} p^{n-2} + \cdots + u_0 \quad (8.13)$$

とおくと、無分散 n KdV 階層の時間変数 t_i に対応する Hamilton 関数は

$$H_i(p, x) := (L(p, x)^{i/n})_+ \quad (8.14)$$

$$= \begin{cases} p & i = 1, \\ p^2 + 2u_{n-2} & i = 2, \\ p^3 + 3u_{n-2}p + 3u_{n-3} & i = 3, \\ p^4 + 4u_{n-2}p^2 + 4u_{n-3}p + (4u_{n-4} - (2n-8)u_{n-2}^2) & i = 4, \\ \vdots & \end{cases} \quad (8.15)$$

で与えられる。

9 A_{n-1} 特異点

正の整数 n を一つ選んで固定し、

$$F(x, \mathbf{s}) := \frac{1}{n} x^n + \sum_{i=0}^{n-2} s_i x^i \quad (9.1)$$

とおく。但し、 $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{n-2})$ は $M := \mathbb{C}^{n-1}$ に値を取るパラメーターである。この M に以下のようにして Frobenius 多様体の構造が入る。

まず、Laurent 級数

$$H(x, \mathbf{s}) = x + a_0 + \frac{a_1(\mathbf{s})}{x} + \frac{a_2(\mathbf{s})}{x^2} + \cdots \quad (9.2)$$

を

$$F(x, \mathbf{s}) = \frac{1}{n} H(x, \mathbf{s})^n \quad (9.3)$$

で定義すると、

$$H(x, \mathbf{s}) = x + \frac{s_{n-2}}{x} + \frac{s_{n-3}}{x^2} + \frac{s_{n-4} - \frac{n-1}{2} s_{n-2}^2}{x^3} + \cdots \quad (9.4)$$

となる。これを用いて、 $\mathbb{C}[x, \mathbf{s}]/(\partial_x F(x, \mathbf{s}))$ の $\mathbb{C}[\mathbf{s}]$ 上の基底を

$$\phi_i(x, \mathbf{s}) := \left(H(x, \mathbf{s})^i \partial_x H(x, \mathbf{s}) \right)_+, \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (9.5)$$

$$= \begin{cases} 1 & i = 0, \\ x & i = 1, \\ x^2 + s_{n-2} & i = 2, \\ x^3 + 2s_{n-2}x + s_{n-3} & i = 3, \\ x^4 + 3s_{n-2}x^2 + 2s_{n-3}x + \left(s_{n-4} - \frac{n-5}{2}s_{n-2}^2 \right) & i = 4, \\ \vdots & \end{cases} \quad (9.6)$$

と定義する。 $\mathbf{s}$ から $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_{n-2})$ への座標変換を

$$\frac{\partial F(x, \mathbf{s}(\mathbf{t}))}{\partial t_i} = \phi_i(x, \mathbf{s}(\mathbf{t})), \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (9.7)$$

で定義すると、

$$\phi_i(x, \mathbf{s}(\mathbf{t})) := \det \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{n-2} & x & -1 & \cdots & 0 \\ t_{n-3} & t_{n-2} & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-i} & t_{n-i+1} & t_{n-i+2} & \cdots & x \end{vmatrix} \quad (9.8)$$

$$= x^i + (\text{lower order terms}) \quad (9.9)$$

となることが知られている。以下では記号を濫用して $F(x, \mathbf{t}) = F(x, \mathbf{s}(\mathbf{t}))$, $\phi_i(x, \mathbf{t}) = \phi_i(x, \mathbf{s}(\mathbf{t}))$ などと書く。

例 9.1. $F(x, \mathbf{t})$ は $n = 7$ の時

$$\frac{1}{7}x^7 + t_5x^5 + t_4x^4 + (t_3 + 2t_5^2)x^3 + (t_2 + 3t_4t_5)x^2 + (t_1 + t_4^2 + 2t_3t_5 + t_5^3)x + (t_0 + t_3t_4 + t_2t_5 + t_4t_5^2), \quad (9.10)$$

$n = 6$ の時

$$\frac{1}{6}x^6 + t_4x^4 + t_3x^3 + \left(t_2 + \frac{3}{2}t_4^2 \right) x^2 + (t_1 + 2t_3t_4)x + \left(t_0 + \frac{1}{2}t_3^2 + t_2t_4 + \frac{1}{3}t_4^3 \right), \quad (9.11)$$

$n = 5$ の時

$$\frac{1}{5}x^5 + t_3x^3 + t_2x^2 + \left(t_1 + \frac{1}{2}t_3^2 \right) x + (t_0 + t_2t_3), \quad (9.12)$$

$n = 4$ の時

$$\frac{1}{4}x^4 + t_2x^2 + t_1x + \left(t_0 + \frac{1}{2}t_2^2 \right) \quad (9.13)$$

で与えられる。

変数の次数を

$$\deg x := \frac{1}{n}, \quad \deg t_i := 1 - \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (9.14)$$

と置くと、 $F(x, \mathbf{t})$ は 1 次の同次式になる。Euler ベクトル場を

$$E = \sum_{i=0}^{n-2} \left(1 - \frac{i}{n} \right) t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \quad (9.15)$$

で導入すると、 $F(x, \mathbf{t})$ の同次性は

$$\left(\frac{1}{n} x \frac{\partial}{\partial x} + E \right) F(x, \mathbf{t}) = F(x, \mathbf{t}) \quad (9.16)$$

と表される。

任意の $\varphi(x, \mathbf{t}) \in \mathbb{C}[x, \mathbf{t}]$ を Jacobi 環 $\mathbb{C}[x, \mathbf{t}]/(\partial_x F(x, \mathbf{t}))$ の $\mathbb{C}[\mathbf{t}]$ 上の基底 $(\phi_i(x, \mathbf{t}))_{i=0}^{n-2}$ を用いて

$$\varphi(x, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-2} c_k(\mathbf{t}) \phi_k(x, \mathbf{t}) + K(x, \mathbf{t}) \partial_x F(x, \mathbf{t}) \quad (9.17)$$

と書いた時、

$$K(x, \mathbf{t}) = \left(\frac{\varphi(x, \mathbf{t})}{\partial_x F(x, \mathbf{t})} \right)_+ \quad (9.18)$$

となるので、 $K_{ij}(x, \mathbf{t})$ を

$$K_{ij}(x, \mathbf{t}) := \left(\frac{\phi_i(x, \mathbf{t}) \phi_j(x, \mathbf{t})}{\partial_x F(x, \mathbf{t})} \right)_+ \quad (9.19)$$

で定義すると、

$$\phi_i(x, \mathbf{t}) \phi_j(x, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-2} c_{ij}^k(\mathbf{t}) \phi_k(x, \mathbf{t}) + K_{ij}(x, \mathbf{t}) \partial_x F(x, \mathbf{t}) \quad (9.20)$$

が成立する。

$\mathbb{C}[x, \mathbf{t}]$ 上の $\mathbb{C}[\mathbf{t}]$ 双線型形式 g を

$$g(\varphi(x, \mathbf{t}), \psi(x, \mathbf{t})) := -\text{Res}_{x=\infty} \frac{\varphi(x, \mathbf{t}) \psi(x, \mathbf{t})}{\partial_x F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.21)$$

で定義すると、これは $\mathbb{C}[x, \mathbf{t}]/(\partial_x F(x, \mathbf{t}))$ 上の $\mathbb{C}[\mathbf{t}]$ 双線型形式に降下し、

$$\eta_{ij} := g(\phi_i(x, \mathbf{t}), \phi_j(x, \mathbf{t})) \quad (9.22)$$

$$:= -\text{Res}_{x=\infty} \frac{(H^i \partial_x H) (H^j \partial_x H)}{\partial_x \left(\frac{1}{n} H^n \right)} dx \quad (9.23)$$

$$= -\text{Res}_{x=\infty} \frac{(H^i \partial_x H) (H^j \partial_x H)}{H^{n-1} \partial_x H} dx \quad (9.24)$$

$$= -\text{Res}_{x=\infty} \frac{H^{i+j} \partial H}{H^{n-1}} dx \quad (9.25)$$

$$= -\text{Res}_{H=\infty} \frac{H^{i+j}}{H^{n-1}} dH \quad (9.26)$$

$$= \delta_{i+j, n-2} \quad (9.27)$$

となる (x と H の関係は、 $x = \infty$ の近傍における (収束)Laurent 級数 (9.2) で与えられた事に注意せよ)。従って、 g は基底 $(\phi_i(x, \mathbf{t}))_{i=0}^{n-2}$ に関して平坦な非退化計量を与える。計量 g の次数は

$$D = \deg \phi_i + \deg \phi_{n-2-i} \quad (9.28)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{n} \right) + \left(1 - \frac{n-2-i}{n} \right) \quad (9.29)$$

$$= 2 - \frac{n-2}{n} \quad (9.30)$$

である。

注意 9.2. 射影多様体 X の量子コホモロジーから来る Frobenius 多様体に対しては $D = 2 - \dim X$ となるので、 A_{n-1} 特異点の「次元」が $\frac{n-2}{n}$ であるとも考えることも出来る。これは、 A_{n-1} 特異点に付随する三角圏 (A_{n-1} 型の Dynkin 籠の表現の導来圏と同値になる) が $\frac{n-2}{n}$ 次元の分数 Calabi–Yau 圏 (fractional Calabi–Yau category) になる事と整合的である。一般に、Gorenstein パラメーターが a の次数付き Gorenstein 環 R の次数付き安定導来圏 $D_{\text{sing}}^b(\text{gr } R)$ の Serre 関手 S は $[\dim R - 1](-a)$ で与えられる (例えば [KST09, Theorem 3.8] を見よ)。 $R = \mathbb{C}[x]/(x^n)$ にこれを適用して $S = [-1](n-1)$ を得るが、 $[2] = (n)$ より $S^n = [-n + 2n - 2] = [n - 2]$ となる。

重要な関係式

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \phi_i(x, \mathbf{t}) = \frac{\partial}{\partial t_j} \left(H(x, \mathbf{t})^i \frac{\partial}{\partial x} H(x, \mathbf{t}) \right)_+ \quad (9.31)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t_j} H(x, \mathbf{t})^i \frac{\partial}{\partial x} H(x, \mathbf{t}) \right)_+ \quad (9.32)$$

$$= \frac{1}{i+1} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x} (H(x, \mathbf{t})^{i+1}) \right)_+ \quad (9.33)$$

$$= \frac{1}{i+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t_j} (H(x, \mathbf{t})^{i+1}) \right)_+ \quad (9.34)$$

$$= \frac{1}{i+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} (H(x, \mathbf{t})^{i+1}) \right)_+ \quad (9.35)$$

$$= \frac{1}{i+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (H(x, \mathbf{t})^{i+1})}{\partial (F(x, \mathbf{t}))} \frac{\partial (F(x, \mathbf{t}))}{\partial t_j} \right)_+ \quad (9.36)$$

$$= \frac{1}{i+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial_x (H(x, \mathbf{t})^{i+1})}{\partial_x F(x, \mathbf{t})} \phi_j(x, \mathbf{t}) \right)_+ \quad (9.37)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_i(x, \mathbf{t})}{\partial_x F(x, \mathbf{t})} \phi_j(x, \mathbf{t}) \right)_+ \quad (9.38)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} K_{ij}(x, \mathbf{t}) \quad (9.39)$$

が成立する。ここで、急減少ホモロジーの元 Γ に対してベクトル値関数

$$I^\Gamma(\mathbf{t}, z) = (I_i^\Gamma(\mathbf{t}; z))_{i=0}^{n-2} \quad (9.40)$$

を

$$I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) := \int_\Gamma \phi_i(x, \mathbf{t}) e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.41)$$

で定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial t_j} I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) = \int \frac{\partial \phi_i(x, \mathbf{t})}{\partial t_j} e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx - \int \phi_i(x, \mathbf{t}) \frac{1}{z} \frac{\partial F(x, \mathbf{t})}{\partial t_j} e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.42)$$

$$= \int \frac{\partial K_{ij}(x, \mathbf{t})}{\partial x} e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx - \frac{1}{z} \int \phi_i(x, \mathbf{t}) \phi_j(x, \mathbf{t}) e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.43)$$

$$= \int \frac{\partial K_{ij}(x, \mathbf{t})}{\partial x} e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-2} c_{ij}^k \int \phi_k(x, \mathbf{t}) e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.44)$$

$$- \frac{1}{z} \int K_{ij}(x, \mathbf{t}) \frac{\partial F(x, \mathbf{t})}{\partial x} e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.45)$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-2} c_{ij}^k I_k^\Gamma(\mathbf{t}, z) + \int \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{ij}(x, \mathbf{t}) e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} \right) dx \quad (9.46)$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-2} c_{ij}^k I_k^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.47)$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t_j} I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-2} c_{ij}^k I_k^\Gamma(\mathbf{t}, z) = 0 \quad (9.48)$$

となる。 $M \times \mathbb{C}^\times$ 上の $(\phi_i)_{i=1}^{n-2}$ を基底とする自明なベクトル束の切断 $s^\Gamma(\mathbf{t}, z)$ を

$$g(\phi_i, s^\Gamma(\mathbf{t}, z)) = I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.49)$$

で定義すると、

$$g\left(\phi_i, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_j}} s + \frac{1}{z} \phi_j \circ s\right) = \frac{\partial}{\partial t_j} g(\phi_i, s) + \frac{1}{z} g(\phi_i \circ \phi_j, s) \quad (9.50)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_j} g(\phi_i, s) + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-2} c_{ij}^k g(\phi_k, s) \quad (9.51)$$

より、(9.48) は s^Γ が M 方向の構造接続 $\hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t_i}}$ の平坦接続になる事を示している。従って零曲率条件

$$\left[\hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t_i}}, \hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t_j}} \right] = 0 \quad (9.52)$$

が成り立ち、 $(g, \circ)$ がポテンシャル条件を満たすことが分かる。また、 $\phi_0(x, \mathbf{t}) = 1$ であることから、

$$z \frac{\partial}{\partial z} I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) = \frac{1}{z} \int_\Gamma F(x, \mathbf{t}) e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.53)$$

$$= \frac{1}{z} \int_\Gamma \left(\frac{1}{n} x \frac{\partial F(x, \mathbf{t})}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(1 - \frac{i}{n} \right) t_i \frac{\partial F(x, \mathbf{t})}{\partial t_i} \right) e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.54)$$

$$= -\frac{1}{n} \int_\Gamma x \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} \right) dx - \sum_{i=0}^{n-2} \left(1 - \frac{i}{n} \right) t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \int_\Gamma e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx \quad (9.55)$$

$$= \frac{1}{n} \int_\Gamma e^{-\frac{1}{z} F(x, \mathbf{t})} dx - E I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.56)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - E \right) I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.57)$$

となり、

$$z \frac{\partial}{\partial z} I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) = z \frac{\partial}{\partial z} \left(-z \frac{\partial}{\partial t_i} \right) I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.58)$$

$$= -z \frac{\partial}{\partial t_i} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.59)$$

$$= -z \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{1}{n} - E + 1 \right) I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.60)$$

$$= -z \left(\frac{1}{n} - E + 1 \right) \frac{\partial}{\partial t_i} I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) + z \left[\frac{\partial}{\partial t_i}, E \right] I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.61)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - E + 1 \right) I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) - \left(1 - \frac{i}{n} \right) \frac{\partial}{\partial t_i} I_0^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.62)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - E + \frac{i}{n} \right) I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.63)$$

$$= \left(-E + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{i+1}{n} \right) \right) I_i^\Gamma(\mathbf{t}, z) \quad (9.64)$$

$$(9.65)$$

を得る。

$$\mathcal{V} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} E - \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial t_i} \quad (9.66)$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} \left(1 - \frac{j}{n} \right) t_j \frac{\partial}{\partial t_j} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial}{\partial t_i} \quad (9.67)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{n} \right) \frac{\partial}{\partial t_i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial}{\partial t_i} \quad (9.68)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{i+1}{n} \right) \frac{\partial}{\partial t_i} \quad (9.69)$$

だが、これは $(\phi_i)_{i=0}^{n-2}$ を基底として $\mathcal{V}$ を行列表示すると、

$$\mu := \text{diag} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \quad (9.70)$$

となることを示している。計量 g に関する μ の転置を

$$\mu^* := \eta \mu^T \eta^{-1} = -\mu \quad (9.71)$$

とおくと、

$$g(\phi_i, \mathcal{V}(s)) = g((\mu^*)\phi_i, s) \quad (9.72)$$

$$= -g(\mu\phi_i, s) \quad (9.73)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{i+1}{n} \right) g(\phi_i, s) \quad (9.74)$$

となることと

$$Eg(\phi_i, s) = g(\phi_i, \nabla_E s) \quad (9.75)$$

$$= g\left(\phi_i, -\frac{1}{z} E \circ s\right) \quad (9.76)$$

$$= -\frac{1}{z} g(\phi_i, \mathcal{U}(s)) \quad (9.77)$$

に注意すると、

$$z \frac{\partial}{\partial z} s^\Gamma = \left(\frac{1}{z} \mathcal{U} + \frac{1}{2} + \mathcal{V} \right) s^\Gamma \quad (9.78)$$

を得る。Dubrovin の z と Givental の z が逆数の関係にあり、従って第一構造接続 $\hat{\nabla}^{(s)}$ の平坦切断に対する z 方向の方程式が Givental の記号では

$$-z \frac{\partial}{\partial z} Y + \left(\mathcal{V} + \frac{1}{2} + s \right) Y + \frac{1}{z} \mathcal{U}(Y) = 0 \quad (9.79)$$

となることに注意すると、これは $s^\Gamma(t, z)$ が $\hat{\nabla}^{(0)}$ の平坦切断であることを示している。

10 行列因子化に対する Hirzebruch–Riemann–Roch の定理

A_n 特異点に対する Gromov–Witten 理論の類似は [Wit93] で導入され、その数学的な定式化は様々な人々の寄与によって為された。例えば [FJR13] とその参考文献を見よ。一般に可換群 A がアフィン空間 $\mathbb{A}^N$ に作用している時、

$$\text{Nar} := \left\{ g \in A \mid (\mathbb{A}^N)^g = \{0\} \right\} \quad (10.1)$$

と定義されるが、 A_n 特異点の場合には

$$A := \{ z \in \mathbb{C}^\times \mid z^n = 1 \} \quad (10.2)$$

の $\mathbb{A}^1$ への自然な作用に関して、

$$\text{Nar} = \{ \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1} \} \quad (10.3)$$

となる。ここで、 $\zeta := \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ は 1 の原始 n 乗根であり、これを通して A は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と自然に同一視される。この場合の状態空間 (state space) は狭域 (narrow sector) のみを持ち、直和

$$H = \bigoplus_{i \in \text{Nar}} H_i, \quad H_i = \mathbb{C} \phi_{i-1} \quad (10.4)$$

で与えられる。次数付き行列因子化

$$E = \left\{ \dots \xrightarrow{\delta^{-1}} E^0 \xrightarrow{\delta^0} E^1 \xrightarrow{\delta^1} E^2 = E^0(d) \xrightarrow{\delta^2 = \delta^0(d)} \dots \right\} \quad (10.5)$$

に対し、その Chern 類が

$$\text{ch}(E) := \bigoplus_{k=1}^{n-1} \text{ch}(E)_k \phi_{k-1}, \quad \text{ch}(E)_k := \text{str} \zeta^k \quad (10.6)$$

で定義される。ここで $\text{str} \zeta^k$ は、 $\zeta^k \in A$ の E^0 に対する作用の跡から E^1 に対する作用の跡を引いたものである。 $R = \mathbb{C}[x]$ と $q \in \mathbb{Z}$ に対し、 E が

$$E^0 = R(q), \quad E^1 = R(q + n - j), \quad \delta^0 = x^{n-j}, \quad \delta^1 = x^j \quad (10.7)$$

で与えられている時、

$$\text{ch}(E) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} \left(\zeta^{qk} - \zeta^{(q+n-j)k} \right) \phi_{k-1} \quad (10.8)$$

となる。この時、Hirzebruch–Riemann–Roch の定理は

$$\chi(E, F) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \zeta^k} \operatorname{ch}(E)_k \operatorname{ch}(F)_{n-k} \quad (10.9)$$

で与えられる ([Wal05, Section 5], [PV12, Theorem 4.2.1])。一方、ガンマ類 $\widehat{\Gamma} \in \operatorname{End} H$ は

$$\bigoplus_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) \operatorname{id}_{H_k} \quad (10.10)$$

で定義される [CIR14, Definition 2.17]。

11 停留位相積分

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad (11.1)$$

と置くと、

$$F(x, \mathbf{t}) = \frac{1}{n} x^n + x, \quad (11.2)$$

$$\phi_i = x^i, \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (11.3)$$

となる。Jacobi イデアル

$$\partial_x F(x, \mathbf{t}) = x^{n-1} + 1 \quad (11.4)$$

で定義される F の臨界点は -1 の $n-1$ 乗根

$$\zeta_i := \exp((-2i+1)\pi\sqrt{-1}/(2(n-1))), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (11.5)$$

であり、Jacobi 環

$$\mathbb{C}[x]/(x^{n-1} + 1) = \mathbb{C}[x] \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x - \zeta_i) \right) \quad (11.6)$$

の冪等基底 (idempotent basis) $(\psi_i)_{i=1}^{n-1}$ は

$$\psi_i := \frac{\prod_{j \neq i} (x - \zeta_j)}{\prod_{j \neq i} (\zeta_i - \zeta_j)} \quad (11.7)$$

で与えられる。冪等基底の代わりにその定数倍

$$\varphi_i := \prod_{j \neq i} (x - \zeta_j) = \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_i^{n-k-2} x^k = \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_i^{n-k-2} \phi_k \quad (11.8)$$

を考えると (等式

$$\prod_{j \neq i} (x - \zeta_j) = \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_i^{n-k-2} x^k \quad (11.9)$$

は、 $x - \zeta_i$ を掛けると右辺も左辺も共に $x^{n-1} + 1$ を与えることから分かる)、その長さの 2 乗は

$$g(\varphi_i, \varphi_i) = \text{Res} \frac{\prod_{j \neq i} (x - \zeta_j) \prod_{j \neq i} (x - \zeta_j)}{\prod_j (x - \zeta_j)} \quad (11.10)$$

$$= \text{Res} \frac{\prod_{j \neq i} (x - \zeta_j)}{x - \zeta_i} \quad (11.11)$$

$$= F''(\zeta_i) = (n-1)\zeta_i^{n-2} \quad (11.12)$$

で与えられるので、正規化された冪等基底 (normalized idempotent basis) $(\Psi_i)_{i=1}^{n-1}$ は

$$\Psi_i := \frac{1}{\sqrt{(n-1)\zeta_i^{n-2}}} \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_i^k \phi_{n-k-2} \quad (11.13)$$

となる。

急減少チェイン (rapid decay chain) C が正の実数による定数倍の作用で (up to boundary で) 不変な時、

$$I^C(z) := \int_C x^k e^{-\frac{1}{z}(\frac{1}{n}x^n + x)} dx \quad (11.14)$$

は変数変換により

$$I^C(z) = \int_C \left(z^{1/n}x\right)^k e^{-\frac{1}{z}(\frac{1}{n}(z^{1/n}x)^n + z^{1/n}x)} d(z^{1/n}x) \quad (11.15)$$

$$= z^{(k+1)/n} \int_C x^k e^{-\frac{1}{n}x^n - z^{-(n-1)/n}x} dx \quad (11.16)$$

$$= z^{(k+1)/n} \int_C x^k e^{-\frac{1}{n}x^n - \alpha(z)x} dx \quad (11.17)$$

と表される。但し、

$$\alpha(z) := z^{-(n-1)/n} \quad (11.18)$$

と置いた。1 の原始 n 乗根を

$$\zeta := \exp(2\pi\sqrt{-1}/n) \quad (11.19)$$

とし、 $i = 0, \dots, n-1$ に対し 0 と $\zeta^i \infty$ を結ぶ直線を $C_i := [0, \zeta^i \infty)$ と置くと、

$$I^{C_i}(z) = z^{(k+1)/n} \int_0^{\zeta^i \infty} x^k e^{-\frac{1}{n}x^n - \alpha(z)x} dx \quad (11.20)$$

$$= z^{(k+1)/n} \int_0^\infty (\zeta^i r)^k e^{-\frac{1}{n}(\zeta^i r)^n - \alpha(z)\zeta^i r} \zeta^i dr \quad (11.21)$$

$$= \zeta^{(k+1)i} z^{(k+1)/n} \int_0^\infty r^k e^{-\frac{1}{n}r^n - \alpha(z)\zeta^i r} dr \quad (11.22)$$

となる。ここで変数変換 $t := \frac{1}{n}r^n$ を行うと、

$$dt = r^{n-1}dr, \quad dr = r^{-(n-1)}dt = (nt)^{-(n-1)/n}dt \quad (11.23)$$

から

$$I^{C_i}(z) = \zeta^{(k+1)i} z^{(k+1)/n} \int_0^\infty (nt)^{k/n} e^{-t - \alpha(z)\zeta^i (nt)^{1/n}} (nt)^{-(n-1)/n} dt \quad (11.24)$$

$$= \zeta^{(k+1)i} n^{(k-n+1)/n} z^{(k+1)/n} \int_0^\infty e^{-t} t^{(k-n+1)/n} e^{-\alpha(z)\zeta^i n^{1/n} t^{1/n}} dt \quad (11.25)$$

となる事が分かる。これを $z = \infty$ の周りで展開すると、

$$I^{C_i}(z) = \zeta^{(k+1)i} n^{(k-n+1)/n} z^{(k+1)/n} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(k-n+1)/n} \frac{1}{m!} \left(-\alpha(z) \zeta^i n^{1/n} t^{1/n} \right)^m dt \quad (11.26)$$

$$= \zeta^{(k+1)i} n^{(k-n+1)/n} z^{(k+1)/n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} z^{-m(n-1)/n} \zeta^{im} n^{m/n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(k-n+m+1)/n} dt \quad (11.27)$$

$$= \zeta^{(k+1)i} n^{(k-n+1)/n} z^{(k+1)/n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} z^{-m(n-1)/n} \zeta^{im} n^{m/n} \Gamma\left(\frac{k+m+1}{n}\right) \quad (11.28)$$

となる。但し、ここで Γ 関数の定義

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad (11.29)$$

を使った。この初項は

$$\zeta^{(k+1)i} n^{(k-n+1)/n} z^{(k+1)/n} \Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right) \quad (11.30)$$

で与えられる。

F の臨界点は -1 の $n-1$ 乗根

$$\zeta_i := \exp((-2i+1)\pi\sqrt{-1}/(2(n-1))), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (11.31)$$

で与えられ、対応する臨界値は

$$F(\zeta_i) = \frac{1}{n} (\zeta_i)^n + \zeta_i \quad (11.32)$$

$$= -\frac{1}{n} \zeta_i + \zeta_i \quad (11.33)$$

$$= \frac{n-1}{n} \zeta_i, \quad (11.34)$$

Hessian は

$$F''(\zeta_i) = (n-1)\zeta_i^{n-2} \quad (11.35)$$

となる。ここで、消滅サイクルの特基底の定義に沿って、臨界点は時計回りに番号付けられている事に注意せよ。 i 番目の臨界点に対応する Lefschetz thimble は $\Gamma_i := C_{-i} - C_{-i+1}$ で与えられ、これに沿った積分 $I^{\Gamma_i}(z)$ の $z = 0$ の周りにおける正の実軸に沿った漸近展開の初項は

$$\zeta_i^k e^{-\frac{1}{z}F(\zeta_i)} \int e^{-\frac{1}{2z}F''(\zeta_i)x^2} dx = \zeta_i^k e^{-\frac{1}{z}F(\zeta_i)} \sqrt{\frac{2\pi z}{F''(\zeta_i)}} \quad (11.36)$$

$$= \zeta_i^k e^{-\frac{1}{z}\frac{n-1}{n}\zeta_i} \sqrt{\frac{2\pi z}{(n-1)\zeta_i^{n-2}}} \quad (11.37)$$

で与えられる。

$$s = \sum_{k=0}^{n-2} s_k \phi_k \quad (11.38)$$

に対して I_k が

$$I_k := g(\phi_k, s) \quad (11.39)$$

で定まっている時

$$s_k = \sum_{l=0}^{n-2} (\eta^{-1})_{kl} I_l = I_{n-2-k} \quad (11.40)$$

となることに注意すると、行列値関数 $\left(s_k^{\Gamma_i}(z)\right)_{i,k}$ の $z = \infty$ の周りでの冪級数展開の初項 $B(z) = (B_{ki}(z))_{i,k}^{n-2}$ は

$$B_{ki}(z) = \left(\zeta^{(n-k-1)(-i)} - \zeta^{(n-k-1)(-(i-1))}\right) n^{((n-2-k)-n+1)/n} z^{(n-k-1)/n} \Gamma\left(\frac{n-k-1}{n}\right) \quad (11.41)$$

$$= z^{1/2+(1/2-(k+1)/n)} \left(\zeta^{(k+1)i} - \zeta^{(k+1)(i-1)}\right) n^{-(k+1)/n} \Gamma\left(\frac{n-k-1}{n}\right) \quad (11.42)$$

から

$$B(z) = z^{1/2} z^{-\mu} C' C'', \quad (11.43)$$

$$C'_{kl} := n^{-(k+1)/n} \Gamma\left(\frac{n-(k+1)}{n}\right) \delta_{kl}, \quad (11.44)$$

$$C''_{ki} := \left(\zeta^{(k+1)i} - \zeta^{(k+1)(i-1)}\right) \quad (11.45)$$

となる。ここでの k は 0 から $n-2$ までを走り、(10.10) の k と 1 つずれていることに注意すると、 C' は $\widehat{\Gamma}$ 類に $n^{-(k+1)/n}$ を掛けたものであり、 C'' は Chern 類になっている。 $n^{-(k+1)/n}$ は、相方の $n^{-((n-k-2)+1)/n}$ と組になって、Hirzebruch–Riemann–Roch の定理に現れる因子 $1/n$ を与える。

例 11.1. 古典的な Airy 関数は

$$\text{Ai}(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{x^3}{3} + tx\right) dx \quad (11.46)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{\sqrt{-1}\left(\frac{x^3}{3} + tx\right)} dx \quad (11.47)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\frac{(\sqrt{-1}x)^3}{3} - t(\sqrt{-1}x)\right)} \sqrt{-1} dx \quad (11.48)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\sqrt{-1}\infty}^{\sqrt{-1}\infty} e^{-\left(\frac{x^3}{3} - tx\right)} dx \quad (11.49)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\omega^2\infty}^{\omega\infty} e^{-\left(\frac{x^3}{3} - tx\right)} dx \quad (11.50)$$

で与えられる。ここで、 $\omega := \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ は 1 の原始 3 乗根である。これは

$$\text{Ai}(t) = \frac{1}{3^{2/3}\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{3}\right) \left(\sqrt[3]{3}t\right)^k \quad (11.51)$$

という冪級数展開を持つ。一般に、

$$I(t) := \int e^{-\frac{x^3}{3} + tx} dx \quad (11.52)$$

は

$$\frac{d^2}{dt^2} I(t) = \int x^2 e^{-\frac{x^3}{3} + tx} dx \quad (11.53)$$

$$= - \int \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^3}{3} + tx}\right) dx + \int t e^{-\frac{x^3}{3} + tx} dx \quad (11.54)$$

$$= t I(t) \quad (11.55)$$

という微分方程式を満たす。

参考文献

- [CIR14] Alessandro Chiodo, Hiroshi Iritani, and Yongbin Ruan, *Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence, global mirror symmetry and Orlov equivalence*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **119** (2014), 127–216. MR 3210178 [31](#)
- [CK99] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR MR1677117 (2000d:14048) [7](#)
- [DFI95] P. Di Francesco and C. Itzykson, *Quantum intersection rings*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, pp. 81–148. MR MR1363054 (96k:14041a) [5](#)
- [Dub98] Boris Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), no. Extra Vol. II, 1998, pp. 315–326 (electronic). MR MR1648082 (99j:32025) [9](#), [21](#), [23](#)
- [EGH96] David Eisenbud, Mark Green, and Joe Harris, *Cayley-Bacharach theorems and conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **33** (1996), no. 3, 295–324. MR 1376653 [4](#)
- [FJR13] Huijun Fan, Tyler Jarvis, and Yongbin Ruan, *The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory*, Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 1, 1–106. MR 3043578 [30](#)
- [GGI16] Sergey Galkin, Vasily Golyshev, and Hiroshi Iritani, *Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: gamma conjectures*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 11, 2005–2077. MR 3536989 [23](#)
- [GI] Sergey Galkin and Hiroshi Iritani, *Gamma conjecture via mirror symmetry*, arXiv:1508.00719. [23](#)
- [Iri16] Hiroshi Iritani, *On the gamma structure of quantum cohomology*, Sūgaku **68** (2016), no. 4, 337–360. MR 3560911 [23](#)
- [KM94] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 3, 525–562. MR MR1291244 (95i:14049) [13](#)
- [KST09] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi, *Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with $\epsilon = -1$* , Adv. Math. **220** (2009), no. 5, 1602–1654. MR MR2493621 [27](#)
- [PV12] Alexander Polishchuk and Arkady Vaintrob, *Chern characters and Hirzebruch-Riemann-Roch formula for matrix factorizations*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 10, 1863–1926. MR 2954619 [31](#)
- [Wal05] Johannes Walcher, *Stability of Landau-Ginzburg branes*, J. Math. Phys. **46** (2005), no. 8, 082305, 29. MR MR2165838 [31](#)
- [Wit93] Edward Witten, *Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity*, Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), Publish or Perish, Houston, TX, 1993, pp. 235–269. MR 1215968 (94c:32012) [30](#)