三角群を巡って

植田 一石

1　5つの正多面体

各頂点において同じ数の合同な正多角形が交わっているような多面体を正多面体 (Platonic solid) と呼ぶ．正多面体が 5 つしか無い事は少なくともギリシャ時代まで遡る古い事実であるが，この証明を思い出してみよう．

正多面体の面の数を n とし，各頂点で p 個の q 角形が交わっているとする．この時，Euler の定理

$$(\text{面の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数}) = 2 \tag{1.1}$$

から

$$n - \frac{qn}{2} + \frac{qn}{p} = 2 \tag{1.2}$$

となる．両辺を qn で割って

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{qn} \tag{1.3}$$

となり，両辺に 1 を加えて

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{2}{qn} \tag{1.4}$$

を得る．$qn > 0$ なので，

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} > 1 \tag{1.5}$$

である．

この式は p と q に関して対称であるが，これは偶然ではない．実際，正多面体に対して双対 (dual) を取ることによって，再び正多面体を得る．これによって正 6 面体 (すなわち立方体) は正 8 面体と双対であり，正 12 面体は正 20 面体と双対であり，正 4 面体は自己双対 (self-dual) である．

さて，それでは (1.5) の整数解を全て求めよう．まず，p も q も 3 以上でなければならないことに注意する．必要であれば双対多面体を取って p と q を入れ替えることによって，$p \leq q$ と仮定して良い．$p \geq 4$ の時

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \tag{1.6}$$

(p,q)	(3,3)	(3,4)	(4,3)	(3,5)	(5,3)
正多面体	正四面体	立方体	正八面体	正十二面体	正二十面体

表 1.1: 正多面体

(p,q,r)	$(p,q,1)$	$(p,2,2)$	$(2,3,3)$	$(2,3,4)$	$(2,3,5)$
Lie 環	A_{p+q}	D_{p+2}	E_6	E_7	E_8

表 1.2: Lie 環

なので，(1.5) は決して満たされない．従って $p=3$ である．この時，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}+\frac{1}{q}>1 \tag{1.7}$$

の解は $q=3,4,5$ である．すなわち，(1.5) の解は

$$(p,q)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3) \tag{1.8}$$

で与えられ，それぞれ表 1.1 にあるように正多面体と対応している．双対な正多面体は本質的に同一だと考えると，正多面体は 3 つあることになる．これは，simply-laced な例外型 Lie 群 E_6, E_7, E_8 と 1 対 1 に対応している．これらは Dynkin 図形で分類され，その足の長さがちょうど (2,3,3), (2,3,4), (2,3,5) で与えられる．より一般に，simply-laced な単純 Lie 群は

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1 \tag{1.9}$$

を満たす (p,q,r) と，表 1.2 のようにして (ほぼ 1 対 1 に) 対応している．これらの Lie 環は数学や物理の様々な分野に現れ，極めて重要である．

Platon は自然界が火，土，空気，水の 4 つの元素からなると考え，それらを正多面体と表 1.3 のように対応付けた．正 12 面体は天空と解釈されたが，それは Platon の後継者である Aristotle によって天空を構成する第 5 元素へと変更された．一方，Kepler は惑星の軌道を基にしたある種の数秘術によって，当時知られていた地球以外の惑星が表 1.4 のようにしてちょうど正多面体と対応すると主張した．これらは神秘学 (occultism) に属するが，正多面体と Dykin 図形や Lie 環との関係は単なる偶然ではない．

正多面体	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
元素	火	土	空気	エーテル	水

表 1.3: 正多面体と元素

正多面体	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
惑星	木星	土星	水星	火星	金星

表 1.4: 正多面体と惑星

2 多面体群

集合とその上の結合律を満たす 2 項演算で，単位元と逆元を持つものを群 (group) と呼ぶ．これは代数方程式の冪根による可解性の研究の過程で Galois によって導入された概念であり，その後の数学で非常に大きな役割を果たす事になった．[1)]

3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換からなる集合 $E(3)$ は群をなすが，これを Euclid 群 (Euclidean group) と呼ぶ．この群は平行移動からなる群 $\mathbb{R}^3$ と回転からなる群 $O(3)$ の半直積である;

$$E(3) \cong O(3) \ltimes \mathbb{R}^3. \tag{2.1}$$

向きを保つ合同変換たちは $E(3)$ の指数 2 の部分群をなし，特殊 Euclid 群 $E^+(3)$ と呼ばれる;

$$E^+(3) \cong SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3. \tag{2.2}$$

正多面体を集合として保つ合同変換からなる $E(3)$ の部分群を Δ と書き，充満多面体群 (full polyhedral group) と呼ぶ．向きを保つ変換のなす指数 2 の部分群 $\overline{\Gamma} := \Delta \cap E^+(3)$ は多面体群 (polyhedral group) と呼ばれる．

双対な正多面体は同型な多面体群を持つので，正多面体としては各面が正三角形であるもの (即ち，正 4 面体，正 8 面体及び正 20 面体) を考えれば十分である．重心細分によって正多面体の面は 6 つに分割されるが，その内の 1 つが Δ の正多面体への作用の基本領域である．$\overline{\Gamma}$ は Δ の指数 2 の部分群なので，$\overline{\Gamma}$ の作用の基本領域は Δ の 2 つの基本領域の和集合になる．

正 n 面体の代わりに半径 1 の球面を n 個の球面 3 角形に分割し，それをさらに重心細分したものを考えると，それぞれの 3 角形の内角は π/p, π/q 及び π/r になる．この三角形の辺 (より正確には，辺を延長して得られる大円) に関する鏡映を a, b, c とおくと，Δ は

$$\Delta = \left\langle a, b, c \;\middle|\; a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ca)^r = 1 \right\rangle \tag{2.3}$$

と表示される．

一般に，正の自然数の 3 つ組 (p, q, r) に対し (2.3) で定義される群 Δ を三角群 (triangle group) と呼び，この時の (p, q, r) を Δ の符号 (signature) と呼ぶ．また，偶数個の鏡映の積からなる Δ の部分群は von Dyck 群と呼ばれ，次の表示を持つ:

$$\overline{\Gamma} = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle . \tag{2.4}$$

[1)] Galois の劇的な生涯は数学史の中でもとりわけ印象的である．彼は学問的にも政治的にも革命家であり，数学では時代の遥か先を行っていたにも関わらず，

Ne pleure pas, j'ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans!

という言葉を残して，決闘という野蛮な方法で 20 年の短すぎる生涯を閉じた．彼の仕事は 30 年後に Liouville によって始めて理解されることになる．

充満多面体群の位数は，球面を敷き詰めるのに必要な基本領域の数と同じである．各々の面は6つの基本領域からなるので，これは$6n$で与えられる．多面体群の位数はその半分の$3n$である．

正4面体群の符号は$(2,3,3)$である．充満正4面体群の元は正4面体の4つの頂点の置換と1対1に対応するので，Δは4次対称群$\mathfrak{S}_4$と同型であり，この同型で正四面体群$\overline{\Gamma}$は4次交代群$A_4 \subset \mathfrak{S}_4$に写る．

正8面体群の符号は$(2,3,4)$である．正8面体群の元は，正8面体の互いに平行な面の4つの組の置換と1対1に対応するので，正8面体群$\overline{\Gamma}$は4次対称群$\mathfrak{S}_4$と同型である．

正20面体群の符号は$(2,3,5)$である．正20面体の30本の辺は，互いに平行であるか直交する時に同値であると定義すると，5つの同値類に分かれる．正20面体群の生成元はこれらの同値類の偶置換を引き起こし，しかもそれらの偶置換が5次交代群A_5を生成する事が容易に検証できる．これは全射準同型$\overline{\Gamma} \to A_5$の存在を意味するが，$\overline{\Gamma}$と$A_5$はともに位数60の群なので，これらは同型でなければならない．[2)]

球面三角法 (spherical trigonometry) における Girard の定理から，半径1の球面の上の三角形の内角をα, β, γ, 面積をAとおくと，

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A \tag{2.5}$$

が成立する．[3)] 球面が$6n$個の三角形に分割されていることから，

$$6nA = 4\pi \tag{2.6}$$

となるが，これは (1.4) で$q = 3$とおいて得られる

$$A = \frac{2\pi}{3n} \tag{2.7}$$

と確かに整合的になっている．

Girard の定理は19世紀になって Gauss-Bonnet の定理

$$\int_M K + \int_{\partial M} k = 2\pi\chi(M) \tag{2.8}$$

に一般化される．ここでKは Gauss 曲率であり，kは測地曲率 (geodesic curvature) である．Mが測地的な多角形の時は，kは∂Mの滑らかな点で0であり，$\int_{\partial M} k$は外角の和になる．従って，球面上の測地的な多角形の外角の和と面積を足すと2πになる．Mが境界を持たない時，Gauss-Bonnet の定理は

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K = \chi(M) \tag{2.9}$$

となる．左辺は計量から定まる微分幾何的な量であり，右辺は位相不変量であることに注意せよ．これは20世紀に入って，偶数次元多様体に対する Gauss-Bonnet-Chern の定理

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_M \mathrm{Pf}(\Omega) = \chi(M) \tag{2.10}$$

に一般化される．但し，Mは$2n$次元の Riemann 多様体であり，ΩはMの曲率形式，$\mathrm{Pf}(\Omega)$はΩの Pfaffian である．これはさらに一般化されて Atiyah-Singer の指数定理を生む．

[2)] A_5は単純群であるが，この事実が一般の5次方程式は四則演算と冪根では解けない事の根源的な理由なのであった．

[3)] Albert Girard(1595-1632) はフランスの数学者である．

符号	$(1,p,q)$	$(2,2,p)$	(2,3,3)	(2,3,4)	(2,3,5)
群	巡回群	2 項 2 面体群	2 項 4 面体群	2 項 8 面体群	2 項 20 面体群

表 3.1: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群

3 Klein 特異点

多面体群 $\overline{\Gamma}$ は $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{PSU}(2)$ の部分群であるが，これを 2 重被覆 $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ に引き戻したものを Γ で表し，2 項多面体群 (binary polyhedral group) と呼ぶ．一般に，SU(2) の部分群が SO(3) の部分群の引き戻しになっているための必要十分条件は $-1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3))$ を含んでいることであり，そのような部分群を SU(2) の 2 項部分群と呼ぶ．

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群に対し，群作用に関して平均することによって，群作用で不変な Hermite 内積が必ず存在するので，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の任意の有限部分群は SU(2) の部分群に共役である．SO(3) の有限部分群が巡回群，2 面体群，多面体群のいずれかである事 (これは本質的には一点の軌道が正多角形もしくは正多面体になることから従う) から，SU(2) の有限部分群が巡回群，2 項 2 面体群，2 項多面体群のいずれかになることが容易に分かる．($-1 \in \Gamma$ なら Γ は $\overline{\Gamma} = \Gamma/\langle \pm 1 \rangle \subset \mathrm{PSU}(2)$ に付随する SU(2) の 2 項部分群である．$-1 \notin \Gamma$ なら $\overline{\Gamma} \cong \Gamma$ だが，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の位数 2 の元は -1 のみなので，$\overline{\Gamma}$ は位数 2 の元を持たないことが分かる．位数 2 の元を持たない SO(3) の有限部分群は奇数位数の巡回群のみなので，2 項部分群でない $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群も奇数位数の巡回群に限ることが分かる．)

符号 (p,q,r) が (1.9) を満たす時，球面的 (spherical) と呼ばれる．球面的な符号は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群の共役類と表 3.1 のように対応している．

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 Γ は自然に $\mathbb{C}^2$ に作用し，この作用による商空間

$$X \coloneqq \mathbb{C}^2/\Gamma \coloneqq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]^\Gamma \tag{3.1}$$

は原点に特異点を持つ．こうして得られる 2 次元の特異点を Klein 特異点 (Kleinian singularity) と呼ぶ．これは du Val 特異点とも呼ばれ，単純特異点，有理 2 重点，有理 Gorenstein 特異点，標準特異点など，様々な特徴付けを持っている．Klein 特異点はクレパントな特異点解消 $Y \to X$ を持ち，その例外因子の双対グラフは対応する Dynkin 図形で与えられる．これに関しては，McKay 対応と呼ばれる重要な事実がある．その究極の定式化の 1 つは導来圏の同値

$$D^b \operatorname{coh} Y \cong D^b \operatorname{coh}^\Gamma \mathbb{C}^2 \tag{3.2}$$

であり，ミラー対称性と深く関わるが，ここでは深入りしない．Lie 環との関わりは，いわゆる Grothendieck-Brieskorn-Slodowy 理論 [Bri71, Slo80] によって与えられる．[4)]

球面的な符号 (p,q,r) に対し，環

$$T = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^p + Y^q + Z^r) \tag{3.3}$$

4) 日本語で読める文献としては

松澤淳一，『特異点とルート系』，朝倉書店，2002 年

がある．

は階数 1 の Abel 群

$$L = \mathbb{Z}\vec{X} \oplus \mathbb{Z}\vec{Y} \oplus \mathbb{Z}\vec{Z} \oplus \mathbb{Z}\vec{c}/(p\vec{X} - \vec{c}, q\vec{Y} - \vec{c}, r\vec{Z} - \vec{c}) \tag{3.4}$$

による自然な次数付けを持つ;

$$T = \bigoplus_{\vec{k} \in L} T_{\vec{k}}. \tag{3.5}$$

T の L による次数付けは，$K \coloneqq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[L]$ の $\operatorname{Spec} T$ への作用を誘導する．この作用による $\operatorname{Spec} T \setminus \mathbf{0}$ の商として得られる軌道体 (あるいは商スタック) を

$$\mathbb{X} \coloneqq [(\operatorname{Spec} T \setminus \mathbf{0})/K] \tag{3.6}$$

とおく．$\mathbb{X}$ の Picard 群は L と自然に同型になる．この同型によって $\mathbb{X}$ の正準束は L の双対化元 (dualizing element)

$$\vec{\omega} \coloneqq -\vec{x} - \vec{y} - \vec{z} + \vec{c} \tag{3.7}$$

に移り，$\mathbb{X}$ の反正準環 (anticanonical ring) は

$$R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R_k, \qquad R_k \coloneqq T_{-k\vec{\omega}} \tag{3.8}$$

で与えられる．$\mathbb{X}$ の基本群は von Dyck 群 $\overline{\Gamma}$ と同型になり，反正準環 R は Klein 特異点の座標環と同型になる;

$$R \cong \mathbb{C}[x, y, z]^{\Gamma}. \tag{3.9}$$

E 型の Klein 特異点は $\mathbb{C}^3$ の中の超平面として

$$E_6 \colon x^4 + y^3 + z^2 = 0, \tag{3.10}$$

$$E_7 \colon x^3 + xy^3 + z^2 = 0, \tag{3.11}$$

$$E_8 \colon x^5 + y^3 + z^2 = 0 \tag{3.12}$$

で与えられる．この超曲面と 5 次元球面

$$S^5 \coloneqq \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1 \right\} \tag{3.13}$$

の共通部分は特異点の絡み目 (link) と呼ばれ，$S^3 \big/ \overline{\Gamma}$ と (微分) 同相な 3 次元多様体になる;

$$W \coloneqq X \cap S^5 \cong S^3 \big/ \overline{\Gamma}\,. \tag{3.14}$$

S^3 は単連結であり，$\overline{\Gamma}$ の S^3 への作用は自由なので，W の基本群は $\overline{\Gamma}$ と同型になる;

$$\pi_1(W) \cong \overline{\Gamma}. \tag{3.15}$$

Hurewicz の定理により，1 次のホモロジー群は基本群の可換化と同型になることに注意せよ;

$$H_1(W;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(W)/[\pi_1(W), \pi_1(W)]. \tag{3.16}$$

特に符号が (2,3,5) の場合には，5 次交代群 A_5 が単純なので，交換子群は全体になり，E_8 特異点の絡み目がホモロジー球面である事が分かる．これは「ホモロジー球面は球面と同相である」というもともとの Poincaré 予想の反例として Poincaré 自身によって発見され，これを受けて Poincaré は予想を「ホモトピー球面は球面と同相である」と修正した．この修正された Poincaré 予想は 5 次元以上では Smale [Sma61] によって，4 次元では Freedman [Fre82] によって，そして 3 次元では Perelman によって証明された．

7 次元球面と同相だが微分同相でない多様体を異種 7 次元球面 (exotic 7-sphere) と呼ぶ．異種 7 次元球面の最初の例は Milnor [Mil56] によって発見された．これは微分位相幾何学における Poincaré 予想の類似である「ホモトピー球面は球面と同相か」という問題に否定的な解決を与えたと解釈できる．7 次元球面に入る微分構造の集合は連結和によって可換群をなすが，この群が位数 28 の巡回群である事が Kervaire-Milnor [KM63] によって示された．これらの 28 個の微分構造は，$\mathbb{C}^5$ の中の超曲面

$$x^{6k-1} + y^3 + z^2 + w^2 + u^2 = 0 \tag{3.17}$$

と

$$S^9 \coloneqq \left\{ (x,y,z,w,u) \in \mathbb{C}^5 \;\middle|\; |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |w^2| + |u|^2 = 1 \right\} \tag{3.18}$$

の共通部分として得られることを Brieskorn [Bri66] が示した．この Brieskorn の仕事およびそれに先立つ Pham の仕事 [Pha65] から，

$$X(a_1, \ldots, a_n) \tag{3.19}$$

の原点の特異点を Brieskorn-Pham 特異点と呼び，その絡み目

$$W(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq X(a_1, \ldots, a_n) \cap S^{2n-1} \tag{3.20}$$

を Brieskorn 多様体と呼ぶ．

その後 Donaldson [Don83] によって，ゲージ理論を用いて 4 次元の Euclid 空間が異種微分構造を持つ事が示された．4 次元球面が異種微分構造を持つかどうかはまだ分かっていない．

4　単純楕円型特異点

符号 (p,q,r) が

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \tag{4.1}$$

を満たす時，Euclid 的 (Euclidean) であると言う．対応する三角形は平面三角形になり，三角群 Δ は $E(2) \cong O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ の離散部分群を与える．(4.1) の解が

$$(p,q,r) = (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6) \tag{4.2}$$

の 3 つしか無いことは直ちに分かる．これに付随して，$\mathbb{C}^3$ の超曲面 X が

$$\widetilde{E}_6\colon x^3 + y^3 + z^3 = 0, \tag{4.3}$$

$$\widetilde{E}_7\colon x^2 + y^4 + z^4 = 0, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{E}_8\colon x^2 + y^3 + z^6 = 0 \tag{4.5}$$

で定義される．$\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ 特異点の最小特異点解消 Y は，原点を中心とした重み $(1,1,1), (2,1,1), (3,2,1)$ の重み付き爆発によって得られ，その全空間は楕円曲線上の次数が $-3, -2, -1$ の直線束を与える．例外因子 E は重み付き射影空間内の滑らかな楕円曲線であり，E の Y における法束 $\mathcal{N}$ は重み付き射影空間の同義直線束 $\mathcal{O}(-1)$ を E に制限したものになっている．X の座標環は $\mathcal{N}$ の切断環 (section ring) と同型である;

$$T \coloneqq \mathbb{C}[x,y,z]/(x^p + y^q + z^r) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0\left(\mathcal{N}^{\otimes k}\right). \tag{4.6}$$

階数 1 の Abel 群を

$$L = \mathbb{Z}\vec{X} \oplus \mathbb{Z}\vec{Y} \oplus \mathbb{Z}\vec{Z} \oplus \mathbb{Z}\vec{c}/(p\vec{X} - \vec{c}, q\vec{Y} - \vec{c}, r\vec{Z} - \vec{c}) \tag{4.7}$$

で定義すると，T は

$$\deg x \coloneqq \vec{x}, \quad \deg y \coloneqq \vec{y}, \quad \deg z \coloneqq \vec{z} \tag{4.8}$$

によって L による次数付けを持つ．また，全射準同型 $\varphi\colon L \to \mathbb{Z}$ を

	$\varphi(\vec{x})$	$\varphi(\vec{y})$	$\varphi(\vec{z})$
$\widetilde{E}_6$	1	1	1
$\widetilde{E}_7$	2	1	1
$\widetilde{E}_8$	3	2	1

(4.9)

で定義する．

- $\widetilde{E}_6$ に対し，$\operatorname{Ker}\varphi$ は $\vec{x} - \vec{y}$ および $\vec{x} - \vec{z}$ で生成され，$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ と同型である．
- $\widetilde{E}_7$ に対し，$\operatorname{Ker}\varphi$ は $\vec{x} - 2\vec{y}$ および $\vec{x} - 2\vec{z}$ で生成され，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ と同型である．
- $\widetilde{E}_8$ に対し，$\operatorname{Ker}\varphi$ は $\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}$ で生成され，$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と同型である．

T の L による次数付けは代数群 $K \coloneqq \operatorname{Spec}\mathbb{C}[L]$ の $\operatorname{Spec} T$ への作用を定める．これは $G \coloneqq (\operatorname{Ker}\varphi)^\vee$ の $E \coloneqq [(\operatorname{Spec} T \setminus \mathbf{0})/\mathbb{G}_m]$ への作用を誘導し，軌道体の同型

$$\mathbb{X} \coloneqq [(\operatorname{Spec} T \setminus \mathbf{0})/K] \cong [E/G] \tag{4.10}$$

を引き起こす．

一般に，最小特異点解消の例外因子が楕円曲線になるような 2 次元の正規特異点を単純楕円型特異点 (simple elliptic singularity) と呼ぶ．単純楕円型特異点の深い研究，特に Lie 環との関わりについては，未だ発展途上である．

5 Fuchs 特異点

符号 (p,q,r) が

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1 \tag{5.1}$$

を満たす時，双曲的 (hyperbolic) であると言う．双曲的な符号を持つ von Dyck 群 $\overline{\Gamma}$ は Fuchs 群である．[5)] 2 重被覆 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ による $\overline{\Gamma}$ の引き戻しを Γ とおく．

一般に，Fuchs 群 $\overline{\Gamma}$ は上半平面 $\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}\mid\mathfrak{Im}\,z>0\}$ に真性不連続 (properly discontinuous) に作用する．商空間 $\mathbb{H}/\overline{\Gamma}$ がコンパクトの時，$\overline{\Gamma}$ をココンパクト (cocompact) と呼ぶ．ココンパクトな Fuchs 群 $\overline{\Gamma}$ と自然数 k に対し，$\overline{\Gamma}$ に付随する重み (weight) k の保型形式 (automorphic form) とは，上半平面上の正則関数 $f\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ で，任意の $z\in\mathbb{H}$ と $\gamma\in\Gamma$ に対し

$$f(\gamma z)=j_\gamma(z)^k f(z) \tag{5.2}$$

を満たすものを指す．[6)] ここで保型因子 (factor of automorphy) $j_\gamma(z)$ は

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma \text{ と } z\in\mathbb{H} \text{ に対し } j_\gamma(z)=cz+d \tag{5.3}$$

で定義される．保型因子がコサイクル条件

$$j_{\gamma\gamma'}(z)=j_\gamma(z)j_{\gamma'}(\gamma z) \tag{5.4}$$

を満たすことから，Γ の $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ への作用

$$\Gamma\ni\gamma\colon(z,v)\mapsto(\gamma\cdot z,j_\gamma(z)) \tag{5.5}$$

が定まる．この作用による $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ の商を $\mathbb{H}\times_\Gamma\mathbb{C}$ と書く．自然な射影

$$\mathbb{H}\times_\Gamma\mathbb{C}\to\mathbb{H},\quad [z,v]\mapsto[z] \tag{5.6}$$

は $\mathbb{H}/\Gamma$ 上の直線束を与え，保型形式はこの直線束の切断と 1 対 1 に対応する．

[5)] $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 及び $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の離散部分群をそれぞれ Klein 群，Fuchs 群と呼ぶのであった．$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ は非 Euclid 幾何における合同群である．

[6)] 三角群やそれに付随する保型形式についてさらに知りたい場合は

難波誠，『複素関数 三幕劇』，朝倉書店，1990 年

や

吉田正章，『私説 超幾何関数』，共立出版，1997 年

がお薦めである．また，保型形式の歴史については

ジェレミー・J・グレイ著，関口次郎・室政和訳，『リーマンからポアンカレにいたる線型微分方程式と群論』，丸善出版，2012 年

で読める．

変換

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{5.7}$$

によって微分形式は

$$\begin{aligned} dw &= \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}dz \quad (5.8)\\ &= \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}dz \quad (5.9)\\ &= \frac{1}{(cz+d)^2}dz \quad (5.10)\end{aligned}$$

と変換されるので，f が重み $2k$ の保型形式の時，

$$\begin{aligned} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\left(d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)^{\otimes k} &= (cz+d)^{2k}f(z)\cdot\frac{1}{(cz+d)^{2k}}\,(dz)^{\otimes k} \quad (5.11)\\ &= f(z)\,(dz)^{\otimes k} \quad (5.12)\end{aligned}$$

となり，$f(z)\,(dz)^{\otimes k}$ は $\mathbb{H}/\Gamma$ 上の k 重微分形式を定める事が分かる．重み k の保型形式のなすベクトル空間を $A_k(\Gamma)$ と書く．重み k の保型形式と重み k' の保型形式の積は明らかに重み $k+k'$ の保型形式を与えるので，

$$A(\Gamma) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(\Gamma) \tag{5.13}$$

は次数付き環の構造を持つ．これを Γ に付随する保型形式環 (ring of automorphic forms) と呼ぶ．

Fuchs 群 $\overline{\Gamma} \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ に対して，Γ の保型形式環の偶数次部分 $\bigoplus_{k\in 2\mathbb{N}} A_k(\Gamma)$ のスペクトルは 2 次元の正規環であり，一般には原点に特異点を持つ．これを Fuchs 特異点 (Fuchsian singulatiry) と呼ぶ．

双曲的な符号 (p,q,r) に対し，環

$$T = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^p+Y^q+Z^r) \tag{5.14}$$

は階数 1 の Abel 群

$$L = \mathbb{Z}\vec{X}\oplus\mathbb{Z}\vec{Y}\oplus\mathbb{Z}\vec{Z}\oplus\mathbb{Z}\vec{c}/(p\vec{X}-\vec{c}, q\vec{Y}-\vec{c}, r\vec{Z}-\vec{c}) \tag{5.15}$$

による自然な次数付けを持つ;

$$T = \bigoplus_{\vec{k}\in L} T_{\vec{k}}. \tag{5.16}$$

T の L による次数付けは，$K \coloneqq \operatorname{Spec}\mathbb{C}[L]$ の $\operatorname{Spec} T$ への作用を誘導する．この作用による $\operatorname{Spec} T\setminus\mathbf{0}$ の商として得られる軌道体 (あるいは商スタック) を

$$\mathbb{X} \coloneqq [(\operatorname{Spec} T\setminus\mathbf{0})/K] \tag{5.17}$$

とおく．$\mathbb{X}$ の Picard 群は L と自然に同型になる．この同型によって $\mathbb{X}$ の正準束は L の双対化元 (dualizing element)

$$\vec{\omega} := -\vec{x} - \vec{y} - \vec{z} + \vec{c} \tag{5.18}$$

に移り，$\mathbb{X}$ の正準環 (canonical ring) は

$$R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R_k, \qquad R_k := T_{k\vec{\omega}} \tag{5.19}$$

で与えられる．$\mathbb{X}$ の基本群は双曲的 von Dyck 群 $\overline{\Gamma}$ と同型になるので，$\mathbb{X}$ は上半平面 $\mathbb{H}$ によって

$$\mathbb{X} \cong \mathbb{H}/\overline{\Gamma} \tag{5.20}$$

と一意化 (uniformize) され，正準環は保型形式環と同型になる;

$$R \cong A(\Gamma). \tag{5.21}$$

保型形式環は有限生成であること知られている．これは一般の代数多様体に対して成り立つ正準環の有限生成性 (の軌道体への拡張) の特別な場合でもある．生成元の数がちょうど 3 つの時，保型形式環は超曲面 (hypersurface) であると言う．

定理 5.1 ([Dol75], cf. also [Mil75, Wag80])**.** 保型形式環 R が超曲面になるための必要十分条件は，(p, q, r) が表 5.1 にある 14 個のどれかになっていることである．

証明は初等的であるが，ここでは証明の代わりに例を与える．

例 5.2. $(p, q, r) = (4, 4, 4)$ の時，

$$4\vec{x} = 4\vec{y} = 4\vec{z} = \vec{c} \tag{5.22}$$

なので，

$$\vec{\omega} = -\vec{x} - \vec{y} - \vec{z} + \vec{c}, \tag{5.23}$$

$$2\vec{\omega} = -2\vec{x} - 2\vec{y} - 2\vec{z} + 2\vec{c}, \tag{5.24}$$

$$3\vec{\omega} = -3\vec{x} - 3\vec{y} - 3\vec{z} + 3\vec{c} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}, \tag{5.25}$$

$$4\vec{\omega} = -4\vec{x} - 4\vec{y} - 4\vec{z} + 4\vec{c} = \vec{c} \tag{5.26}$$

であり，

$$R_0 = \mathbb{C},\ R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ R_3 = \mathbb{C} \cdot XYZ,\ R_4 = \mathbb{C} \cdot X^4 \oplus \mathbb{C} \cdot Y^4 \tag{5.27}$$

となる．R は $(x, y, z) = (X^4, Y^4, XYZ)$ で生成されており，それらの関係式は

$$x^2y + xy^2 + z^4 = X^8Y^4 + X^4Y^8 + X^4Y^4Z^4 = X^4Y^4(X^4 + Y^4 + Z^4) \tag{5.28}$$

で与えられる．

符号	生成元	重み	関係式
$(2,3,7)$	(X,Y,Z)	$(21,14,6;42)$	$x^2+y^3+z^7$
$(2,3,8)$	(XZ,Y,Z^2)	$(15,8,6;30)$	$x^2+y^3z+z^5$
$(2,3,9)$	(X,YZ,Z^3)	$(9,8,6;24)$	$x^2z+y^3+z^4$
$(2,4,5)$	(XY,Y^2,Z)	$(15,10,4;30)$	$x^2+y^3+yz^5$
$(2,4,6)$	(XYZ,Y^2,Z^2)	$(11,6,4;22)$	$x^2+y^3z+yz^4$
$(2,4,7)$	(XY,Y^2Z,Z^3)	$(7,6,4;18)$	$x^2z+y^3+yz^3$
$(2,5,5)$	(Y^5,X,YZ)	$(10,5,4;20)$	$x^2+xy^2+z^5$
$(2,5,6)$	(Y^4,XZ,YZ^2)	$(6,5,4;16)$	$xy^2+x^2z+z^4$
$(3,3,4)$	(X^3,XY,Z)	$(12,8,3;24)$	$x^2+xz^4+y^3$
$(3,3,5)$	(X^3Z,XY,Z^2)	$(9,5,3;18)$	$x^2+xz^3+y^3z$
$(3,3,6)$	(X^3,XYZ,Z^3)	$(6,5,3;15)$	$x^2z+xz^3+y^3$
$(3,4,4)$	(XY^4,X^2,YZ)	$(8,4,3;16)$	$x^2+xy^2+yz^4$
$(3,4,5)$	(XY^3,X^2Z,YZ^2)	$(5,4,3;13)$	$xy^2+x^2z+yz^3$
$(4,4,4)$	(X^4,Y^4,XYZ)	$(4,4,3;12)$	$x^2y+xy^2+z^4$

表 5.1: 超曲面保型形式環

例 5.3. $(p,q,r)=(5,5,5)$ の時,

$$5\vec{x}=5\vec{y}=5\vec{z}=\vec{c} \tag{5.29}$$

なので,

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= -\vec{x}-\vec{y}-\vec{z}+\vec{c}, && (5.30)\\
2\vec{\omega} &= -2\vec{x}-2\vec{y}-2\vec{z}+2\vec{c}, && (5.31)\\
3\vec{\omega} &= -3\vec{x}-3\vec{y}-3\vec{z}+3\vec{c}=2\vec{x}+2\vec{y}+2\vec{z}, && (5.32)\\
4\vec{\omega} &= \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}+\vec{c}, && (5.33)\\
5\vec{\omega} &= 2\vec{c} && (5.34)
\end{aligned}$$

であり,

$$R_0=\mathbb{C},\ R_1=0,\ R_2=0,\ R_3=\mathbb{C}\cdot XYZ, \tag{5.35}$$

$$R_4=\mathbb{C}\cdot X^6YZ\oplus\mathbb{C}\cdot XY^6Z,\ R_5=\mathbb{C}\cdot X^{10}\oplus\mathbb{C}\cdot X^5Y^5\oplus\mathbb{C}\cdot Y^{10}, \tag{5.36}$$

となる．R_5 の元を次数の低い元の積の線形結合で表すことは出来ないので，R は 3 つの元で生成されていない.

これらの話の高次元化を考えることもできる [HLU].

6　モジュラー群

モジュラー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は

$$S\colon z \mapsto -1/z, \tag{6.1}$$
$$T\colon z \mapsto z+1 \tag{6.2}$$

で生成されており，その基本関係式は

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \left\langle S, T \;\middle|\; S^2 = (ST)^3 = I \right\rangle \tag{6.3}$$

で与えられる．従って，モジュラー群は符号 $(2,3,\infty)$ に対する von Dyck 群と同型である．モジュラー群の基本領域 [7)]

$$R = \left\{ z \in \mathbb{H} \;\middle|\; |z| > 1 \text{ かつ } |\mathfrak{Re}(z)| < \frac{1}{2} \right\} \tag{6.4}$$

は，虚軸 $\mathfrak{Re}(z) = 0$ を境にして内角が $\pi/2$, $\pi/3$ および 0 であるような三角形 2 つの和集合に分かれる．

モジュラー群はココンパクトではないので，対応する保型形式の定義には，保型性 (5.2) の他に，尖点における正則性も必要である．モジュラー形式は数論において重要な役割を果たす．

7　奇妙な双対性とミラー対称性

表 5.1 は，Arnold [Arn75] によって分類された重み付き斉次な例外型 unimodal 特異点のリストと一致する．この文脈で，von Dyck 群の符号は例外型 unimodal 特異点の Dolgachev 数と呼ばれる．Dolgachev 数に加えて，例外型 unimodal 特異点の Milnor 格子を特徴付ける Gabrielov 数と呼ばれる自然数の 3 つ組が存在する [Gab74]．Arnold は，例外型 unimodal 特異点は必ず対で存在して，それらの間では Dolgachev 数と Gabrielov 数が入れ替わる (すなわち，一方の Dolgachev 数が他方の Gabrielov 数になり，一方の Gabrielov 数が他方の Dolgachev 数になる) 事に気付き，奇妙な双対性 (strange duality) と呼んだ．奇妙な双対性は Dolgachev-Nikulin [Dol83, Nik79] と Pinkham [Pin77] によって K3 曲面の代数格子と超越格子の間の交換として解釈し直され，現在ではミラー対称性の一種として理解されている．これに関しては [Ued] やその参考文献を見よ．

参考文献

[Arn75] V. I. Arnol′d, *Critical points of smooth functions*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 19–39. MR 0431217 (55 #4218)

[Bri66] Egbert Brieskorn, *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Invent. Math. **2** (1966), 1–14. MR 0206972 (34 #6788)

[7)] この図が Gauss の遺稿にあったことはよく知られている．

[Bri71] E. Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 279–284. MR 0437798 (55 #10720)

[Dol75] I. V. Dolgačev, *Automorphic forms and quasihomogeneous singularities*, Funkcional. Anal. i Priložen. **9** (1975), no. 2, 67–68. MR 0568895 (58 #27958)

[Dol83] Igor Dolgachev, *Integral quadratic forms: applications to algebraic geometry (after V. Nikulin)*, Bourbaki seminar, Vol. 1982/83, Astérisque, vol. 105, Soc. Math. France, Paris, 1983, pp. 251–278. MR 728992 (85f:14036)

[Don83] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315. MR 710056 (85c:57015)

[Fre82] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 357–453. MR 679066 (84b:57006)

[Gab74] A. M. Gabrièlov, *Dynkin diagrams of unimodal singularities*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 1–6. MR 0367274 (51 #3516)

[HLU] Kenji Hashimoto, Hwayoung Lee, and Kazushi Ueda, *On a certain generalization of triangle singularities*, arXiv:1501.07086.

[KM63] Michel A. Kervaire and John W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537. MR 0148075 (26 #5584)

[Mil56] John Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399–405. MR 0082103 (18,498d)

[Mil75] ______, *On the* 3*-dimensional Brieskorn manifolds* $M(p, q, r)$, Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1975, pp. 175–225. Ann. of Math. Studies, No. 84. MR 0418127 (54 #6169)

[Nik79] V. V. Nikulin, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 111–177, 238. MR 525944 (80j:10031)

[Pha65] Frédéric Pham, *Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 333–367. MR 0195868 (33 #4064)

[Pin77] Henry Pinkham, *Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces* $K-3$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977), no. 11, A615–A618. MR 0429876 (55 #2886)

[Slo80] Peter Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 815, Springer, Berlin, 1980. MR 584445 (82g:14037)

[Sma61] Stephen Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 391–406. MR 0137124 (25 #580)

[Ued] Kazushi Ueda, *Mirror symmetry and K3 surfaces*, arXiv:1407.1566.

[Wag80] Philip Wagreich, *Algebras of automorphic forms with few generators*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), no. 2, 367–389. MR 586722 (82e:10044)