

# Divide link に沿う例外的デー手術と 4次元多様体

山田 裕一<sup>1</sup> (電気通信大学 大学院)

松本幸夫 先生の 80 歳のお祝いの機会に

## 1 序. Framed link と デー手術

多様体は滑らかで向きつけ可能なものを考える. 4次元多様体はハンドル分解によって整数係数の **framed link** (Kirby 図式) で表すことができる. 3次元多様体は必ず 4次元多様体の境界となることから framed link で表すことができる. 図式はデー手術と対応する. 筆者は framed link を用いて“手作り”で 4, 3次元の多様体を研究し, 具体的な handle calculus, Kirby 計算を楽しんできた.

3次元多様体は幾何化予想に基づいて次のように分析される: 球面とトーラスをじゅうぶん多く埋め込んで切断すれば, 双曲構造をもつ断片と Seifert 断片 ( $S^1$  fibration をもつ) に分割できる. その上で, 絡み目の外部などトーラスの境界をもつ多様体について, 内部が双曲的であったとしても solid torus を境界に沿って接着 (Dehn filling) することで双曲的でない多様体が生じることがある. しかし, 1つのトーラスに対してそのような接着 (トーラスの間の同相写像の同値類) は有限個しか存在しないことが知られており, **例外的デー手術 (exceptional Dehn surgery)** と呼ばれる.

例外的デー手術には, 自発的には思いつけないような具体例が多い. 筆者はそれらを用いて“意外な 4次元多様体”を構成できないか? という研究を続けてきた. 1つは**レンズ空間手術**,  $S^3$  内の双曲結び目に沿うデー手術でレンズ空間が生じる現象である. そのような双曲結び目は族をなし, Berge knots として, しくみで大まかに 3分類, 細かくは 12 の Types に分類されている. 筆者はそれらの結び目が up to mirror image ですべて N. A'Campo 氏によるディバイド結び目 (**divide knots**) であることを個別に証明した ([Y1-3]). このとき, それらのディバイド表示が特殊な形状 ordered Morse (後述) であることは気になっていた. なお, レンズ空間手術が Berge knots で尽きるかどうかは未解決であるが, J. Greene 氏の Heegaard Floer 理論を利用した手法で 4次元多様体論の成果も利用して, 特に Donaldson の対角化定理が根本的に効いて, “up to HF” では解決している ([Gr]).

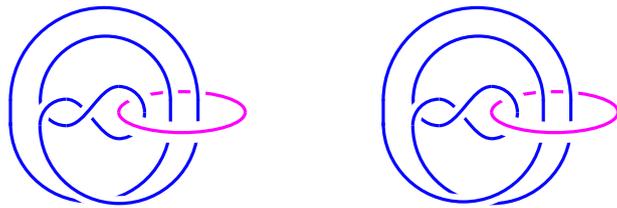


図 1: Mazur link  $Mz$  と false Mazur link ([Mat])

一方, 筆者はある日, 係数をうまく選べば **Mauzr link** からレンズ空間を生じることに気がついた: 例  $(Mz; 4, 5) = L(19, 8)$ . 4次元多様体論の観点で Mazur link は最初に証明された cork (可縮な 4次元多様体で, 非自明な切り貼りでエキゾチック構造を生じる) の図式を与える link であり, 双曲的 link で

<sup>1</sup>Supported by KAKENHI (Grant-in-Aid for Scientific Research No.16K05143, No.21K03221).  
〒 182-8585 東京都調布市 調布ヶ丘 1-5-1 電気通信大学 数学教室 yyyamadaATe-one.uec.ac.jp

ある。その後筆者は、Mazur link の整数係数の例外的デー手術の分布を調べ、地誌学 geography になぞらえて発表した ([Y4])。なお、松本先生が論文 [Mat] で 4次元多様体の spine の観点から注意喚起された false Mazur link (図 1) は例外的デー手術としても興味深く、(0,0)-surgery は逆向きの  $\Sigma(2, 5, 7)$  を生じる例外的デー手術である ([AkK])。残念ながら Mazur link はディバイド絡み目ではない。

本研究は、絡み目のディバイド表示を利用して、4次元多様体論に関する例外的デー手術について探りたい、という試みである。

## 2 ディバイド絡み目 (Divide link)

**定義 1.** ディバイド絡み目 (**divide link**) は特異点論に由来する手法で、単位円板  $D^2$  内に proper で generic にはめ込まれた曲線「ディバイド曲線」 $P$  に対して  $S^3$  内の絡み目  $L(P)$  を定める構成法である。定義は次の通り ([AC])：まず  $S^3$  を、次のように  $D$  の接束  $TD$  の部分空間とみなす。

$$S^3 = \{(u, v) \in D \times T_u D \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}.$$

その部分集合として曲線  $P$  から定まる  $L(P)$  を、次のように構成する。

$$L(P) = \{(u, v) \in D \times T_u D \mid u \in P, v \in T_u P, |u|^2 + |v|^2 = 1\} \subset S^3.$$

$P$  は generic で自己接点をもたないとするため  $L(P)$  は  $S^3$  内の単純閉曲線で、向きを持つ。ディバイド表示できる絡み目をディバイド絡み目という。

由来に戻って具体例を考える：複素  $xy$ -平面内の、原点に孤立特異点をもつ代数曲線  $C : f(x, y) = 0$  に対して、特異点の link  $C \cap S_\varepsilon^3$  を考えるために、「必要な情報 (交点, 実部の  $f$  の鞍点) が曲線上に残るように摂動「実 Morse 化」して  $C$  と実部  $xy$ -平面との交わりの曲線を描いたもの」がディバイド表示の由来である。

**例 1.** (1)  $P : y = 0$  のとき  $L(P)$  は unknot. (2)  $P : xy = 0$  のとき  $L(P)$  は (正の) Hopf link. (3)  $P : y^2 - x^{2n+1} = 0$  は  $y^2 - x(x - \varepsilon)^2(x - 2\varepsilon)^2 \cdots (x - n\varepsilon)^2 = 0$  として  $L(P)$  は  $T(2, 2n + 1)$ .

より広い典型例として次を紹介したい ([合田-平澤-Y])。以下では、曲線の大きさは相似変形で調節し、 $P$  が円板  $D$  内の曲線であることはいったん忘れて  $P$  の平面曲線としての形に注目する。

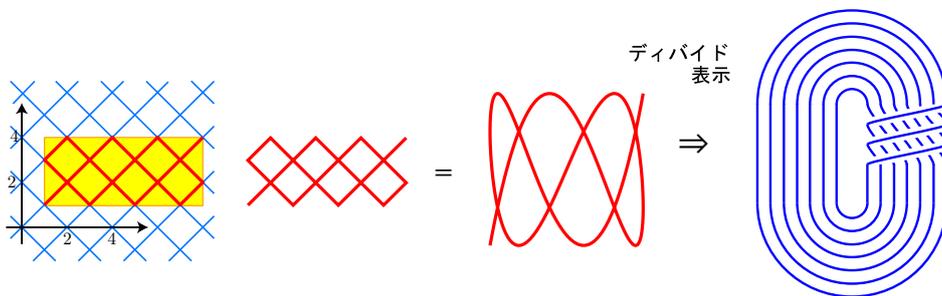


図 2: トーラス結び目  $T(7, 3)$  のディバイド表示

**事実 1.** [GHY]  $xy$  平面内で  $\{\cos \pi x = \cos \pi y\}$  の定める斜めの格子を  $\mathcal{X}$  で表す. 自然数の組  $(a, b)$  に対して,  $R(a, b)$  を格子点  $(\mathbb{Z}^2)$  に頂点をもち, 辺が  $x$ -軸または  $y$ -軸に並行な  $a \times b$  の長方形とする. 格子  $\mathcal{X}$  と  $R(a, b)$  との共通部分として得られる折れ線の曲線は (Lissajous 曲線  $(\cos a\theta, \cos b\theta)$  と同相で), **トーラス絡み目**  $T(a, b)$  のダイバイド表示となる (図 2).

ダイバイド結び目は, fibered であり, strongly quasi-positive な braid 表示をもつ, など代数曲線の孤立特異点の link がもつ性質を共有する. また, 曲線  $P$  の自己交点の個数が  $L(P)$  の種数および 4 次元種数に一致する. 特に, スライス結び目はダイバイド結び目ではない. ダイバイド表示  $P$  は自己接点を生じない regular isotopy (3 重点の経過を許す) で変形しても対応する絡み目  $L(P)$  は変化しない.

例外的デー手術に関わる結び目を系統的に考えるために次の補題を活用した.

**補題 1.** [Y2] ダイバイド曲線  $P$  について, 直線  $l$  に関する下記の操作は, 式でいうと  $l$  を  $y$  軸とみて  $x = X, y = Y/X$  とする変数変換 blow-down であり, 絡み目  $L(P)$  の unknot  $L(l)$  に沿う **右手 full-twist** に対応する.

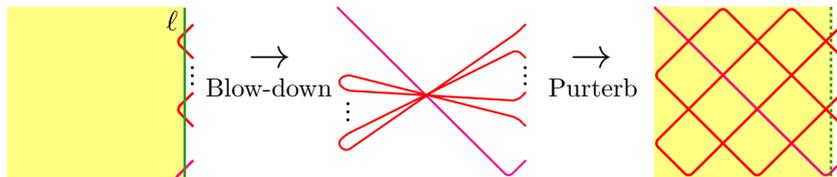


図 3: 曲線の Blow-down.  $S^3$  内の右手 twist に対応する

右手 twist しかできないことがダイバイド結び目の弱点と考えていた.

**定義 2.** ダイバイド曲線  $P (\subset D)$  は,  $P$  を円板  $D$  内の自己接点を生じない regular isotopy で変形して,  $D$  からの 1 次元射影  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  を高さ関数とみて 曲線  $P$  への制限  $h|_P$  の極大値, 極小値をそれぞれ 1 つの値に揃えることができること **ordered Morse** という.

Ordered Morse なダイバイド結び目は positive braid で表示される. レンズ空間手術をもつ Berge knots のうち, 筆者が調べたものはすべて事実 1 の長方形を L 字型, 階段型の領域に拡張して得られるダイバイド表示をもった ([Y1-3]). この構成法によるダイバイド曲線は自動的に ordered Morse となる.

非 ordered Morse なダイバイド曲線として 図 5 の例がある.

### 3 例外的デー手術 (Exceptional Dehn surgery)

レンズ空間以外の多様体を生じる例外的デー手術として, 2 橋結び目の例外的デー手術を分類・決定した Brittenham-Wu 氏の結果を引用する. 2 橋結び目は,  $T(2, 2n + 1)$  以外は, ダイバイド結び目ではない.

**命題 1.** [Brittenham-Wu] 2橋結び目を連分数を用いて  $K[b_1, b_2, \dots, b_n]$  のように表す (各  $b_i \in \mathbb{Z}$ ).<sup>2</sup> 双曲的2橋結び目の例外的デー手術は, up to mirror image で以下のものに限られる.

- (1) 連分数の長さが3以上の2橋結び目は例外的デー手術を持たない.
- (2) 連分数の長さが2 ( $K[b_1, b_2]$  とする) で  $|b_1|, |b_2| > 2$  のとき, ただ1つの例外的デー手術 (toroidal) を持つ.
- (4) Figue-eight knot  $K[2, 2]$  の例外的デー手術の係数は9つ.  $[-4, 4] \cap \mathbb{Z}$ . ( $0, \pm 4$  は toroidal, 他は small Seifert)
- (3)  $K[2n, 2]$  で  $|n| > 1$  の例外的デー手術の係数は5つ.  $[0, 4] \cap \mathbb{Z}$ . ( $0, 4$  は toroidal,  $1, 2, 3$  は small Seifert) Seifert 手術の結果を書いておく

$$\begin{aligned} (K[2n, 2]; 1) &= S(-2; (2, 1), (3, 2), (6n + 1, 5n + 1)) \\ (K[2n, 2]; 2) &= S(-2; (2, 1), (4, 3), (4n + 1, 3n + 1)) \\ (K[2n, 2]; 3) &= S(-2; (3, 2), (3, 2), (3n + 1, 2n + 1)) \end{aligned}$$

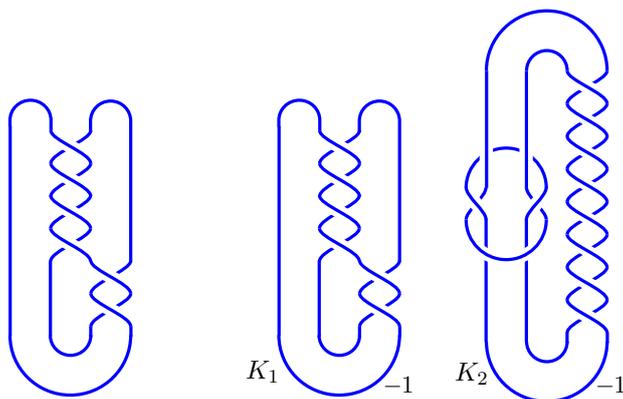


図 4: 2橋結び目  $K[-4, 2]$ , エキゾチック対  $(K_1, -1)$  vs  $(K_2, -1)$

念のため  $K[2n, 2]$  の  $n = -2$  を図示しておく (図 4 左). この機会に, 4次元多様体論で筆者がたびたび振り返る S. Akbulut 氏の例 ([Ak]) を紹介したい. (図 4 右) の2つの framed links  $(K_1, -1), (K_2, -1)$  が表す4次元多様体の対について, 境界の3次元多様体は同相で, 4次元の内部はエキゾチック (同相であるが可微分同相ではない) であることが示されている.  $K_1$  は  $K[-4, 2]$  であって例外的デー手術をもつが,  $-1$  は例外的デー手術の係数ではない. 一方,  $K_2$  はリボン結び目で  $Pr(-3, 3, -8)$  である. これに似た knot  $Pr(-3, 3, -3)$  の  $(+1)$ -手術は Mazur 多様体の境界  $(Mz; 0, 0)$  と逆向きで同相であるが,  $(-1)$ -手術は  $\Sigma(2, 5, 7)$  を生じる例外的デー手術である. どれもディバイド結び目ではない.

<sup>2</sup>ここでの記号は, 一番上で極大値を左右に並べて, 捻りを中央と右で縦方向に配置し, 最初に中央縦に右手半捻りを+として  $b_1$  回, 次に右縦の捻りは左手半捻りを+として  $b_2$  回, と交互に上から数える.

## 4 研究成果

**定理 3.** 図 5 左の非 ordered Morse なディバイド曲線  $N_n$  は、次の Montesinos knots を表す.

$$L(N_n) = \text{Mont} \left( -\frac{2}{5}, \frac{n+1}{2n+1}, -\frac{n}{2n+1} \right)$$

特に、これらの knots は fibered であり、 $T(2, 2n+1)$  からの blow-down で得られ、種数は  $n+1$ , strongly quasi positive braid で表される.

$n = 1$  のとき、 $M_1 = L(N_1) = \text{Mont}(-2/5, 2/3, -1/3)$  は下記の例外的デーモン手術をもつ (Meier [Me]).  $D$  は円板上の Seifert 多様体を表し、2つの断片の境界トーラスを  $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  で貼合せてグラフ多様体を得る.

$$\begin{aligned} (M_1; 4) &= D(-1; (2, 1), (5, 4)) \cup_H D(2; (2, 1), (2, 1)) \\ (M_1; 5) &= S(-2; (4, 3), (5, 3), (5, 3)) \\ (M_1; 6) &= D(-2; (2, 1), (3, 2)) \cup_H D(-2; (3, 1), (3, 1)) \end{aligned}$$

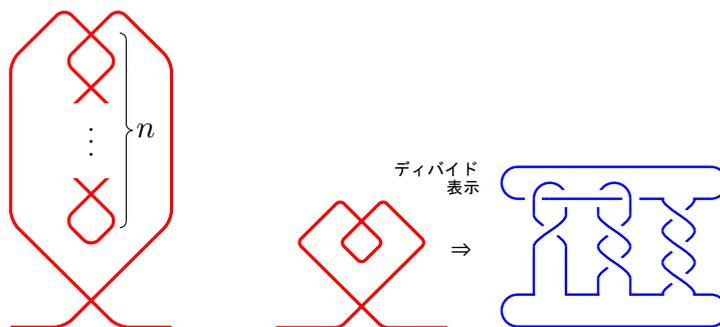


図 5: 非 ordered Morse なディバイド曲線  $N_n$ ,  $N_1$  と  $L(N_1) = \text{Mont}(-2/5, 2/3, -1/3)$

Divide knot  $M_1 = L(N_1)$  が結び目  $10_{145}$  であることは、ディバイド結び目論の初期に平澤氏と S. Chmutov 氏が独立に指摘している<sup>3</sup>. 非 ordered Morse なディバイド曲線が表す結び目は、代数曲線の孤立特異点として現れる結び目が iterated torus knot に限られることと対照的で、ディバイド結び目の多様さを実感させる例である. 難易度は高い.

筆者が、ディバイド表示の弱点に対する工夫として逆向きの blow-down (左手 twist) を取り入れながら、定理 3 の例外的デーモン手術の handle calculus を地道に追ったところ、図 1 に始まりこれまでに学び研究した 4次元多様体がいくつか現れ、総復習のようでした. 松本幸夫 先生のご健康と「多様体のトポロジーの進展」、特に 3次元・4次元多様体論のより一層の発展を祈念しつつ、講演したいと思います.

## 参考文献

[AC] N A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularité isolées de courbes planes I*, Math. Ann. **213** (1975), 1–32.

<sup>3</sup>平澤氏は  $L(N_n)$  について既知のようでした (2024 年 9 月 11 日)

- [Ak] S Akbulut, “*An exotic 4-manifold*”, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 357–361.
- [AkK] S Akbulut and R Kirby, “*Mazur manifolds*”, Michigan Math. J. **26** (1979), no. 3, 259–284
- [BW] M Brittenham and Y-Q Wu, *The classification of exceptional Dehn surgeries on 2-bridge knots* Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no.1, 97–113.
- [GHY] H Goda, M Hirasawa and Y Yamada, *Lissajous curves as A’Campo divides, torus knots and their fiber surfaces*, Tokyo J. Math. **25** No.2 (2002) 485–491.
- [Gr] J E Greene, *The lens space realization problem*, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 2, 449–511.
- [Mat] Y Matsumoto, *A 4-manifold which admits no spine*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 467–470.
- [Me] J Meier *Small Seifert fibered surgery on hyperbolic pretzel knots*, Algebr. Geom. Topol. **14**(2014), no.1, 439–487.
- [Y1] Y Yamada, *Berge’s knots in the fiber surfaces of genus one, lens spaces and framed links*, J. of Knot Theory and its Ramifications **14** No.2 (2005), 177–188.
- [Y2] Y Yamada, *Lens space surgeries as A’Campo’s divide knots*, Algebraic & Geometric Topology **9** (2009) 397–428.
- [Y3] Y Yamada, *Divide knot presentation of sporadic knots of Berge’s lens space surgery*, Kyungpook Math. J. **60**(2) (2020), 255–277.
- [Y4] Y Yamada, *Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link*, J. Gokova Geom. Topol. GGT **12** (2018), 40–70.