

結び目 n -カンドルの 2 次カンドルホモロジー群

田中 心 (東京学芸大学)

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto on the occasion of his eightieth birthday

本講演では, 球面結び目 (特にツイストスパン結び目) の結び目カンドルの研究 [7] から派生して得られた, 一次元結び目の結び目 n -カンドルに関する結果を紹介する. 本講演の内容は, 谷口雄大氏との共同研究であり, プレプリント [8] に基づいている. なお, 本稿の文責は筆者 (田中) にある.

1. 概要

集合 X 上の二項演算 $*$ が或る 3 種類の公理を満たすとき, その集合 X (と二項演算 $*$ のペア) をカンドル [5, 6] と呼ぶ. カンドルの公理は結び目図式の Reidemeister 変形と対応しているため結び目理論と相性が良く, 現在までに様々な結び目不変量がカンドルを用いて定義されてきた. そのような不変量の中で普遍的なものとして, 一次元結び目 $K \subset S^3$ に対して定まる結び目カンドル $Q(K)$ がある. この不変量は非常に強力であり, 一次元結び目に対して (向きの情報を除くと) 完全な不変量であることが知られている. しかし結び目カンドル自体をそのまま扱うことは難しく, そこからうまく情報を引き出す必要がある. 結び目カンドルから情報を引き出す際には, 有限カンドルへのカンドル準同型全体などの外在的情報を調べることが多いが, 今回我々はカンドルホモロジー群 [1] などの内在的情報に着目した. 例えば Eisermann [2] は結び目カンドルの二次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q(K))$ は自明な結び目を特徴づけることを示した. より正確には $H_2^Q(Q(K))$ を計算し, 結び目 K が非自明ならば $H_2^Q(Q(K)) \cong \mathbb{Z}$ であり, 自明ならば $H_2^Q(Q(K)) = 0$ であることを示した.

本講演では, $Q(K)$ の内在的情報の一種である結び目 n -カンドル $Q_n(K)$ に着目する. ここで結び目 n -カンドル $Q_n(K)$ とは $Q(K)$ の n -カンドル化であり, またカンドル X の n -カンドル化とは X を自然数 n に応じた関係式

$$(\cdots (\overbrace{(x*y)*y}^{n\text{-times}}) \cdots) * y \sim x \quad (x, y \in X)$$

が生成する同値関係で割って得られるカンドルのことである.

Joyce は論文 [5] で $Q(K)$ を導入し上述の “完全不変性” などの結果を得たが, 同論文の最終章で $Q_2(K)$ も導入していた. その中でいくつかの具体例に対する $Q_2(K)$ の計算結果が示されていたが, $Q_2(K)$ が持つ情報は未知のままであった. Winker [9] が $Q_2(K)$ を一般化する形で $Q_n(K)$ を導入し, $K \subset S^3$ に沿った n 重分岐被覆空間 M_K^n の基本群 $\pi_1(M_K^n)$ との間の関係を見いだした. Hoste–Shanahan [4] らは Winker の考察をさらに深め, $Q_n(K)$ の有限性と $\pi_1(M_K^n)$ の有限性が等価であることを示した. これにより, 例えば二橋結び目の結び目 2-カンドルが有限位数であることが従う. 一方で非自明な一次元結び目の結び目カンドルは常に無限位数であり, 一般に $Q(K)$ よりも $Q_n(K)$ の方が扱いやすい. しかし例えば $Q(4_1) \not\cong Q(5_1)$ だが $Q_2(4_1) \cong Q_2(5_1)$ となるなど, 扱いやすいが故に不変量としては弱くなる. そこで我々 [8] は $Q_n(K)$ が結び目 K の情報をどの程度保持しているのかを考察し, 二次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q_n(K))$ が持つ情報を明らかにした.

2. 主結果

我々[8] は結び目 n -カンドルの二次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q_n(K))$ を計算した. 前述したように結び目 n -カンドル $Q_n(K)$ は結び目カンドル $Q(K)$ よりも弱い³が, 不思議なことに $n = 3, 4, 5$ のときは $H_2^Q(Q_n(K))$ が $H_2^Q(Q(K))$ よりも強いことが分かった. 実際の計算結果は以下の通りである.

定理 2.1. (結び目 2-カンドル)

$$H_2^Q(Q_2(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K \equiv 0_1), \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (K \equiv M(1/2, */3, */5)), \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (K \equiv M(1/2, */3, */3)), \\ \mathbb{Z} & (K : \text{otherwise}). \end{cases}$$

記号 $\equiv$ は「二橋結び目の連結和を無視して等しい」ことを意味し, また $M(1/2, */3, */3)$ と $M(1/2, */3, */5)$ は Montesinos 結び目を表す.

定理 2.2. (結び目 3-カンドル)

$$H_2^Q(Q_3(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & (K = 5_1), \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (K = 3_1), \\ \mathbb{Z} & (K \neq 0_1, 3_1, 5_1). \end{cases}$$

定理 2.3. (結び目 4-カンドル)

$$H_2^Q(Q_4(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \\ \mathbb{Z} & (K \neq 0_1, 3_1), \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (K = 3_1), \end{cases}$$

定理 2.4. (結び目 5-カンドル)

$$H_2^Q(Q_5(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \\ \mathbb{Z} & (K \neq 0_1, 3_1), \\ \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} & (K = 3_1), \end{cases}$$

定理 2.5. (結び目 n -カンドル, $n > 5$)

$$H_2^Q(Q_n(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \\ \mathbb{Z} & (K \neq 0_1). \end{cases}$$

顕著な帰結として, 以下が従う.

系 2.6. 結び目 n -カンドルの二次カンドルホモロジー群に対して, 以下が成り立つ.

- $H_2^Q(Q_3(K))$ は $0_1, 3_1, 5_1$ を特徴づける.
- $H_2^Q(Q_4(K))$ は $0_1, 3_1$ を特徴づける.
- $H_2^Q(Q_5(K))$ は $0_1, 3_1$ を特徴づける.
- $n > 5$ のとき, $H_2^Q(Q_n(K))$ は 0_1 を特徴づける.

3. 主結果の証明の概略

証明は二段階に分かれている. まずカンドルの拡大理論と被覆理論[3]を用いて, $H_2^Q(Q_n(K))$ が「 S^3 内の結び目 K に沿った n 重巡回被覆空間」の基本群の「ある巡回部分群」と同型であることを示し, 次にその巡回部分群 (の生成元の) 位数を求めるという流れで示した.

3.1. 証明の第一段階. Eisermann [3] によって整備されたカンドルの拡大理論と被覆理論の帰結として、次が知られている。

定理 3.1. 全射カンドル準同型 $X \rightarrow Q$ と群作用 $G \curvearrowright X$ が以下の二条件を満たすならば、 $H_2(Q) \cong G^{\text{ab}}$ である。

- $G \curvearrowright X \rightarrow Q$ はカンドル拡大である。
- X は単連結である。

上の定理で $Q = Q_n(K)$ とし、二条件を満たす全射カンドル準同型 $X \rightarrow Q_n(K)$ と群作用 $G \curvearrowright X$ が発見できれば、 $H_2^Q(Q_n(K)) \cong G^{\text{ab}}$ が従うことになる。我々は、一次元結び目 $K \subset S^3$ と自然数 $n > 1$ から定まる「ツイストスパン球面結び目 $\tau^n K \subset S^4$ 」に着目した。球面結び目 $\tau^n K$ はファイバー球面結び目であり、そのファイバー (を3次元球体でフタをした多様体) は「 S^3 内の結び目 K に沿った n 重巡回被覆空間 M_K^n 」であることが知られている ([10])。ここで、 K のロンジチュードの持ち上げ ℓ_K が生成する $\pi_1(M_K^n)$ の巡回部分群を A_K^n とおくと、次が成り立つ。詳しくは、[8, Theorem 3.2 & Theorem 4.5] を参照せよ。

命題 3.2. 自然な全射 $Q(\tau^n K) \rightarrow Q_n(K)$ と群作用 $A_K^n \curvearrowright Q(\tau^n K)$ は以下を満たす。

- $A_K^n \curvearrowright Q(\tau^n K) \rightarrow Q_n(K)$ はカンドル拡大である。
- $Q(\tau^n K)$ は単連結である。

さらに、この状況に Eisermann の定理 3.1 を適用することで、 $H_2^Q(Q_n(K)) \cong A_K^n$ が従う。

3.2. 証明の第二段階. あとは、 $\ell_K \in \pi_1(M_K^n)$ の位数を計算すればよい。詳しくは、[8, Section 5] を参照せよ。まず、一次元結び目 K が素な場合を考察し、以下を得た。

命題 3.3. 素な結び目 K が $|\pi_1(M_K^n)| < \infty$ を満たすとき、次が成り立つ。

$ \pi_1(M_n(K)) < \infty$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
K	$S(\alpha, \beta)$	$M(1/2, */3, */3)$	$M(1/2, */3, */5)$	3_1	5_1
n	2	2	2	3_1 3	5_1 3
$\text{ord}(\ell_K)$	1	2	4	2	6

命題 3.4. 素な結び目 K が $|\pi_1(M_K^n)| = \infty$ を満たすとき、 $\ell_K \in \pi_1(M_K^n)$ の位数は無限。

系 3.5. 素な結び目 K に対して、以下が成り立つ。

- $\ell_K \in \pi_1(M_K^2)$ が自明である必要十分条件は、 K が二橋結び目であることである。
- $n > 2$ のとき、 $\ell_K \in \pi_1(M_K^n)$ は常に非自明である。

一次元結び目 K が合成結び目のときは以下が成り立ち、素な結び目の場合に帰着される。

命題 3.6. 一次元結び目 K_1, K_2 の合成 $K = K_1 \# K_2$ に対して、以下が成り立つ。

- $\ell_{K_2} \in \pi_1(M_{K_2}^2)$ が自明のとき、 $\ell_K \in \pi_1(M_K^2)$ の位数は $\ell_{K_1} \in \pi_1(M_{K_1}^2)$ の位数と一致。
- $n > 2$ のとき、 $\ell_{K_i} \in \pi_1(M_{K_i}^n) (i = 1, 2)$ が非自明ならば、 $\ell_K \in \pi_1(M_K^n)$ の位数は無限。

以上の命題 (命題 3.3, 命題 3.4, 命題 3.6) を組み合わせることで、一般の場合に $\ell_K \in \pi_1(M_K^n)$ の位数を計算することができる。

ACKNOWLEDGMENTS

本研究は JSPS 科研費 17K05242, 21K03220, 21J21482 の助成を受けたものである。

REFERENCES

- [1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Carter, J. Scott; Jelsovsky, Daniel; Kamada, Seiichi; Langford, Laurel; Saito, Masahico Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.
- [2] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157.
- [3] M. Eisermann, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, Fund. Math. **225** (2014), no.1, 103–168.
- [4] J. Hoste, P. D. Shanahan, *Links with finite n -quandles*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), no. 5, 2807–2823.
- [5] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.
- [6] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88.
- [7] K. Tanaka, Y. Taniguchi, *2-knots with the same knot group but different knot quandles*, preprint (arXiv:2308.07782).
- [8] K. Tanaka, Y. Taniguchi, *The second quandle homology group of the knot n -quandle*, preprint (arXiv:2308.11005).
- [9] S. K. Winker, *Quandles, knot invariants, and the N -fold branched cover*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984, 198 pp.
- [10] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.

〒184-8501 東京都小金井市貫井北町 4-1-1 東京学芸大学教育学部 自然科学系数学講座

E-mail address: kotanaka@u-gakugei.ac.jp