On higher group theory and its geometry

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto on the occasion of his 80th birthday

高村茂　京都大学理学研究科数学教室

2024 年 11 月 9 日 （修正版：2024 年 11 月 24 日）

概 要

本稿は、著者が考えてきた “高次群論” (higher group theory) のおおらかな解説です。眼目は群論の幾何学化。群に「高次の対象」を導入し、さらにそれらの「上部構造」（シナジー）を定めます。これは代数幾何における層に相当する役割を果たします。層からさまざまな不変量が導かれますが、シナジーからはさまざまな新しい「群の組み合わせ的公式」が導かれます。とくに、代数幾何における、代数曲線の交わりに関するベズーの定理に対応する「ベズー型定理」が定式化され示されます（一種の非可換代数幾何）。さらに、高次群論にはモース理論的な側面もあります。

1　高次群論：　「代数幾何もどき」という夢物語からの出発

Down the River Unto the Sea （流れはいつか海へと）
Walter Mosley

松本幸夫先生の言葉で印象に残っているのは、

> 「東京タワーを 1 メートル高くしても誰も気にしないけど、何もない原っぱに犬小屋を作ると、『あっ、犬小屋ができている』と誰にもわかります。」

つまり、他の研究者の結果を少し改良するような結果ではなく、オリジナルな研究を追究する、ということです。それから、世間に流布している「数学者が創造的な仕事ができるのは 30 歳 (or 40 歳）まで」という俗説がありますが、松本先生は年齢にかかわりなく創造的なご研究をされ、身をもって “反例” を示しておられます。これは後進の研究者にとって、とても励みになります。“犬小屋” と “反例” の 2 つのことは、私が研究を行うとき常に「座右」に置いています。

さて、「高次群論」というのは著者のハンドメイドな数学なので、そもそも何を対象とするのか、というところから話を始めます。**発端は、群論で出てくる対象は、「低次」のものに思えたことです。** まず、群 G の元 a は 0 次（スカラー)、部分群 H は 1 次、するとコセット aH は 1 次、両側コセット KaH は 2 次と思えます。そうすると、n 次の対象 $(n = 2, 3, 4, \dots)$ として、部分群積（**セクト**）$H_1H_2 \cdots H_n$ やコセット積（**クラン**）$a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ を考えたくなります。これらは G

の部分集合として次のように与えられます：

$$\begin{cases} H_1H_2\cdots H_n := \{h_1h_2\cdots h_n \,:\, h_i\in H_i\ (i=1,2,\ldots,n)\}, \\ a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n := \{a_1h_1a_2h_2\cdots a_nh_n \,:\, h_i\in H_i\ (i=1,2,\ldots,n)\}. \end{cases}$$

セクトは多項式 $x_1x_2\cdots x_n$ のアナロジー、クランは多項式 $c_1x_1c_2x_2\cdots c_nx_n$ (c_i はスカラー) のアナロジーですので、これらに基づいた "代数幾何もどき" の理論があるのかな、と思いつつ歳月を送っていました。もちろん、x_i は単なる記号であるのに対し、H_i はそうではなく、内部構造をもつので「多項式と似た形」と言っても内実は大いに異なります。また、セクトやクランは非可換な対象なので、たとえ "代数幾何もどき" の理論があるとしても、可換環に基づいた代数幾何のような理論とはかなり違った理論だろう、という認識でした。実際、多項式の零点は意味を持ちますが、セクトやクランの「零点集合」というのは、まったく意味がないので、この "代数幾何もどき" の理論は、まあ夢物語みたいなものでした。

もう一つの伏流水　こういった高次の対象を考え始めたきっかけは、実はずうーっとさかのぼって学生時代になります。有限群の部分群に関する基本事項として、「部分群の位数は有限群の位数を割り切る」というのがあります（ラグランジェの定理)。これより、（真の）部分群の位数は、有限群の位数の半分を決して越えないことがわかります。群論を学べば学ぶほど、このことが気になりました。群論は、部分群（やコセット）をもとに組み立てられていますが、それらの「大きさ」は半分以下です。残りの半分以上の部分の情報は打ち捨てられているのではないか、と。だとしたら、

残り半分の情報も取り込んだ理論があるのではないか。

このことが「高次の対象」であるセクトやクランを真剣に考え始めた要因のひとつです。実際、これらは「残り半分」の情報も持ち合わせています。

さて、動機があるだけでは、数学は出来ません。実際、セクトやクランを導入して「代数幾何もどき」を夢想したところでひたすら雲をつかむ状態のままです。しかしながら**「代数幾何的な何か」を感じさせる現象**に以前から気付いていました。それは両側コセット HaK の位数公式と、代数幾何の（複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線 C と D の交点に関する）ベズーの定理の特別な場合（同じ tangency で交わるとき—つまり、どの交点も同じ交差重複度を持つとき）の類似性です。並べてみましょう：

群論	代数幾何
$\lvert H\rvert\lvert K\rvert = m\lvert H\cap K^a\rvert$	$\deg C\deg D = n\lvert C\cap D\rvert$
ここで $m := \lvert HaK\rvert$,	ここで n は共通の交差重複度、
$K^a := aKa^{-1}$（共役）	$\deg C$, $\deg D$ は C, D の次数。

補足 1.1. 教科書では、両側コセットの位数公式は $\lvert HaK\rvert = \dfrac{\lvert H\rvert\lvert K\rvert}{\lvert H\cap K^a\rvert}$ と書いてあります。

上の類似性から次が気になります：

問題 1.2. 一般の場合のベズーの定理に対応する群論サイドの公式はあるか。

答えは Yes です。しかし、古典的な群論では定式化できません。高次群論の観点から定式化され、証明されるのです（後述）。

2　「上部構造」の模索：　高次群論の波打ち際

「ベズーの」定理と言うものの、ベズーは厳密にはこの定理を証明していません。むしろ、この定理を厳密に証明する努力が、代数幾何を発展させる原動力のひとつでした。ヴェイユの交点理論などがそうです。しかし、決定的なのは上部構造「層」の理論を取り入れたことです（セール、グロタンディーク）。こういう歴史に思いを馳せていると、次のことが頭に浮かびました：

> **群論においても、「上部構造」を導入すると今までの群論の射程外のことが可能になるかもしれない。**

では、群論における上部構造はいかなるものでしょうか？まずは、有限群 G の両側コセットの位数公式 $|HaK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K^a|}$ をヒントに考えていきます。これを幾何的に導出してみましょう。写像 $\pi : H \times \{a\} \times K \to HaK$ を $\pi(h, a, k) = hak$ で定めます。このとき、すべてのファイバー $\pi^{-1}(x)$ $(x \in HaK)$ は $H \cap K^a$ に（集合として）同型です（注：この同型定理は G が無限群でも成り立つ)。したがって、全空間 $H \times \{a\} \times K$ の元の個数は、ファイバーの元の個数 $|H \cap K^a|$ と底空間 HaK の元の個数 $|HaK|$ の元の個数の積になります：

$$|H \times \{a\} \times K| = |H \cap K^a||HaK|.$$

ここで、左辺は $|H||\{a\}||K|$、つまり $|H||K|$ に等しいので、これより位数公式 $|HaK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K^a|}$ が直ちに導かれます。

補足 2.1. 上の同型定理（すべてのファイバー $\pi^{-1}(x)$ $(x \in HaK)$ は $H \cap K^a$ に同型）は、エーレスマンのファイブレーション定理「コンパクトな微分可能多様体の submersion $f : M \to N$ のすべてのファイバー $f^{-1}(x)$ $(x \in M)$ は同型である」に似ています。つまり、$\pi : H \times \{a\} \times K \to HaK$ は “submersive” なのです。

位数公式の、上で与えた証明を振り返ってみると、

> 両側コセット HaK の「上部構造」$\pi : H \times \{a\} \times K \to HaK$ を介在させると、HaK の組み合わせ的な公式（位数公式）が導ける。

これは、代数多様体に「上部構造」である層を介在させて、代数多様体の不変量（コホモロジーなど）を導出するメカニズムによく似ています。これに意を強くして、群論における上部構造を模索しました。

数学における “良い公式” は、物理の基本法則に当たるものであり、その分野の象徴となるものです（たとえば幾何学だと、ガウス・ボンネの公式、リーマン・ロッホの公式、フルヴィッツの公式など）。こういった観点から、高次群論においても、基本的な “良い公式” を導出することが重要であると思っています。そのための「上部構造」の導入です。

まず、最も一般的な設定で「上部構造」を導入します。準備から始めます。以下、群 G は有限でも無限でもかまいません。$S_1, S_2, \ldots, S_m$ を G の任意の部分集合とするとき、それらの積を**フロック** (flock) と言います。具体的に書くと、

$$S_1 S_2 \cdots S_m = \{s_1 s_2 \cdots s_m \,:\, s_i \in S_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)\}. \tag{2.1}$$

これは G の（一般に非常に複雑な）部分集合です。このとき、$S_1 S_2 \cdots S_m$ 上の「上部構造」**シナジー**を次で定めます：

$$\begin{aligned} \pi :\, S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m &\longrightarrow S_1 S_2 \cdots S_m, \\ (s_1, s_2, \ldots, s_m) &\longmapsto s_1 s_2 \cdots s_m. \end{aligned} \tag{2.2}$$

シナジー自体は、‘マクロな積’ を体現していますが、そのファイバー $\pi^{-1}(x)$ $(x \in S_1 S_2 \cdots S_m)$ は ‘ミクロな積’ を体現しています—ファイバーは $x = s_1 s_2 \cdots s_m$（ミクロな積）をみたす元 $(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S_1 S_2 \cdots S_m$ からなります。シナジーにおいて、$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ は直積なので、「な〜んだ、自明束みたいなものか」と思ってしまいますが、まったくそうではなく—シンプルな外見とはうらはらに—非常に複雑な代物です。写像 π は一般にとても複雑で、そのファイバー $\pi^{-1}(x)$ $(x \in S_1 S_2 \cdots S_m)$ も複雑です。ここで、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ はパラメータ $x \in S_1 S_2 \cdots S_m$ とともに変化する “幾何的なもの” ですが（代数多様体の族のアナロジー）、“群論的な意味” も持ちます。実際、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は**表示** $x = s_1 s_2 \cdots s_m$ をみたす $(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S_1 S_2 \cdots S_m$ 全体です。したがって、

> シナジーのファイバー $\pi^{-1}(x)$ が、パラメータ $x \in S_1 S_2 \cdots S_m$ を動かしたときどのように変化するか、という**幾何的な問題**は、「x の表示全体」が x を動かしたときどのように変化するかという**群論的な問題**でもある。

これは、代数幾何の「代数多様体の族」との大きな違いです。こういった違いは、シナジーの描像と代数多様体の族の描像の本質的な違いを産み出します（比較 3.5 参照）。

シナジー $\pi : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m \to S_1 S_2 \cdots S_m$ は、“群論的なものを幾何学化する” ということに加えて、$S_1, S_2, \ldots, S_m$ のマクロな積 $S_1 S_2 \cdots S_m$ と元たち $s_1, s_2, \ldots, s_m$ のミクロな積 $s_1 s_2 \cdots s_m$ を結びつける役割も果たします。層と比較すると、

層	シナジー
多様体の局所データと大局データを結びつける	群のミクロ積とマクロ積を結びつける

さらに、シナジーはモース関数と似た側面をも持ちます。ここで、モース関数の二次の項（ヘッシアン）は、なめらかな多様体の位相型を決定する、という重要な役割を果たしますが、あとで見るように、シナジーの “二次の項”（両側コセット）もわれわれの理論で重要な役割を果たします。

以上のように、シナジーには 3 つのカウンターパートがあります—換言すると、3 つの側面があるということです：

$$\text{シナジーの 3 つの側面}: \begin{cases} \text{層的 (上部構造)}, \\ \text{モース関数的 (二次項の活躍)}, \\ \text{代数多様体の族的 (ファイバーの変形)}. \end{cases}$$

さて、シナジー $\pi : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m \to S_1 S_2 \cdots S_m$ において、$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ をフロック $S_1 S_2 \cdots S_m$ の**プラズマ**と言います（バラバラに分離した状態）。正確に言うと、これは**普遍プラズマ**で、このシナジーは**普遍シナジー**です。実は、他にもプラズマ（やシナジー）があります。普遍プラズマをつぶしていくことにより、$S_1 S_2 \cdots S_m$ のさまざまなプラズマができます。たとえば、$m = 4$ のとき次の通り：

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
S_1S_2 \times S_3 \times S_4 \arrow[d] \arrow[dr] & S_1 \times S_2S_3 \times S_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & S_1 \times S_2 \times S_3S_4 \arrow[dl] \arrow[d] \\
S_1S_2S_3 \times S_4 \arrow[dr] & S_1S_2 \times S_3S_4 \arrow[d] & S_1 \times S_2S_3S_4 \arrow[dl] \\
 & S_1S_2S_3S_4. &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

上の図式（**シナジー図式**）で、“連続する「矢」の合成” が一般のシナジーです（単独の「矢」でもよい）。たとえば、$S_1 \times S_2S_3 \times S_4 \to S_1 \times S_2S_3S_4$ や $S_1 \times S_2S_3 \times S_4 \to S_1S_2S_3S_4$ はシナジーです。

比較 2.2. (1) 普遍シナジーは、トポロジーの世界で言えば「普遍被覆」に対応しています。普遍プラズマは「普遍被覆空間」に対応。

(2) シナジー図式 (2.3) は、代数トポロジーの simplicial set に似ています。どちらも縮約してつぶしていきます。そして、どちらも不変量を生み出す母胎です。

(3) つぶしていく操作は、代数幾何のブローダウンも想起させます—プラズマの中の $\times$ の部分が「例外集合」に相当。たとえば、$S_1 \times S_2S_3 \times S_4$ は例外集合を 2 つ含み、つぶしきったフロック $S_1S_2S_3S_4$ は「極小」です。

3　シナジーの構造定理—「モース理論もどき」へ

高次群論の研究の初期には、次を羅針盤として理論構成を進めました：

基本哲学　シナジー $\pi : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m \to S_1 S_2 \cdots S_m$ を代数幾何の「族」のように扱い、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ およびパラメータ $x \in S_1 S_2 \cdots S_m$ を動かしたとき、その挙動を描写する。

と言っても、代数多様体の族と違って、シナジーのファイバーの描写は雲をつかむようなもので、とっかかりを探すことが必要です。そこで、多様体の場合を思い返してみます。圧倒的に扱いやすいのは「なめらかな」多様体です。これらに対してはモース理論が使えます。このことを念頭に置いて、フロックたちに対しても、扱いやすいクラスを “切り出す” ことを考えます。具体的には、次のような “良い境界” をもつフロックたちを考えます：

定義 3.1. フロック $S_1S_2\cdots S_m$ において、S_1 と S_m が G の部分群であるとき, このフロックを**ギルド**と言う。

以下では、ギルドを $HA_1A_2\cdots A_nK$ と表します。ここで、H と K は G の部分群、$A_1, A_2, \ldots, A_n$ は G の任意の部分集合。次に注意しておきます：

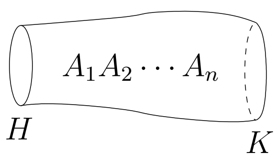
(1) 両側コセット HaK のナイーブな一般化は、G の元 a を G の任意の部分集合 A に置き換えた HAK です。しかし、これは「3 つの factor への分解」なので、限定的過ぎます。このため、A を G の部分集合たち $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の積に置き換えた $HA_1A_2\cdots A_nK$（ギルド）を導入しました。これは両側コセットのずっと広汎な一般化です。

(2) セクトやクランもギルドです。実際、セクト $H_1H_2\cdots H_m$ は両端 H_1, H_m が部分群なのでギルドです。また、クラン $a_1H_1a_2H_2\cdots a_mH_m$ を $Ea_1H_1a_2H_2\cdots a_mH_m$ (E は単位部分群) とみなすと、両端 E, H_m が部分群なのでギルドです。

補足 3.2. 実は、どんなフロック $S_1S_2\cdots S_m$ もギルドとみなせます。実際、このフロックを $ES_1S_2\cdots S_mE$ とみなすと、両端 E, E が部分群なのでギルドです。しかし、後で見るように、このギルドの “両側コセット分解” は自明となってしまい、面白くないのです（補足 3.3 参照）。

さて、なめらかな多様体がその上の関数や写像と相性が良いように、ギルドも写像（シナジー）と相性がよいです。また、多様体のモース理論では、モース関数の 2 次の項が大切でした—それにより多様体の位相型が決まりました。あとで見るように、シナジーも「2 次の項」（両側コセット）で決まります。

幾何的に言うと、ギルド $HA_1A_2\cdots A_nK$ の「境界」は部分群 H と K で、「内部」は $A_1A_2\cdots A_n$ です。H と K はあたかもコボルダントのようです（下図）。(注：$n=0$ のときは $A_1A_2\cdots A_n$ は空集合と約束します。このとき、ギルドは長さ 2 のセクト HK です。）



なぜ、ギルドを考えるのか？ その理由は、一般のフロックと違って、ギルドは両側作用を持つからです：$H \curvearrowright HA_1A_2\cdots A_nK \curvearrowleft K$. ここで、$H$ は左からのかけ算で作用、K は右からのかけ算で作用しています。つまり、$u \in H$, $v \in K$ に対し

$$ha_1a_2\cdots a_nk \in HA_1A_2\cdots A_nK \longmapsto uha_1a_2\cdots a_nkv \in HA_1A_2\cdots A_nK. \tag{3.1}$$

この両側作用の軌道分解は、**ギルドの両側コセット分解**を与えます（2 次への分解）：

$$HA_1A_2\cdots A_nK = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K \quad (\text{非交和},\ \alpha^{(i)} \in A_1A_2\cdots A_n). \tag{3.2}$$

補足 3.3. H と K が単位部分群 E のときは、両側コセット分解 $EA_1A_2\cdots A_nE = \coprod_{i\in I} E\alpha^{(i)}E = \coprod_{i\in I} \alpha^{(i)}$ は trivial です（$EA_1A_2\cdots A_nE$ をその元たちの union として表しているだけ）。

さて、次は高次群論の主定理の一つです：

定理 3.4 ([**Ta1**] **シナジーの構造定理**)**.** ギルド $HA_1A_2\cdots A_nK$ 上の任意のシナジー $\eta : \mathcal{P} \to HA_1A_2\cdots A_nK$（$\mathcal{P}$ はプラズマ）に対し、次が成り立つ。両側コセット分解 (3.2) の各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ 上で、すべてのファイバー $\eta^{-1}(x)$ ($x \in H\alpha^{(i)}K$) は（集合として）同型である（等ファイバー性）。実際、$H\alpha^{(i)}K$ のサテライト指数を $w^{(i)}$ とすると（§4 参照）、$\eta^{-1}(x)$ は $w^{(i)}$ 個の $H \cap K^{\alpha^{(i)}}$ の非交和に同型である。ここで $K^{\alpha^{(i)}} := \alpha^{(i)}K{\alpha^{(i)}}^{-1}$ とおいた。（注：$w^{(i)}$ は無限のときもある。）

比較 3.5. 強調しておくと、**シナジーは（代数多様体の族と違って）一般ファイバーを持ちません。かと言って、すべてのファイバーが特異ファイバーかと言うと、そうでもありません**—各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ 上ではファイバーの退化は起こっていません（submersion のようになっています）。

シナジーの描像は、代数多様体の族の描像とは本質的に異なる。

むしろ、タイヒミュラー空間 T_g 上のリーマン面の普遍族の、equi-symmetric locus への分解（つまり、自己同型群が等しいリーマン面たちからなる locus への分解）に類似性を感じさせます—シナジーの、各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ 上の equi-fiber locus が equi-symmetric locus に相当。

定理 3.4 では、シナジー $\eta : \mathcal{P} \to HA_1A_2\cdots A_nK$ の ‘底空間’$HA_1A_2\cdots A_nK$ はギルドですが、‘底空間’ がギルドではないシナジーに対しては別の構造定理が成り立ちます [Ta1]。さて、定理 3.4 より、

‘底空間’ がギルドのシナジーは “2 次の項”$H\alpha^{(i)}K$ で決まる（モース理論的）。

モース理論との対応を対照表にまとめておくと、

モース理論	高次群論
多様体 M 上のモース関数 $f : M \to \mathbb{R}$	シナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{G} = HA_1A_2\cdots A_nK$
モース関数 f の 2 次の項: $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$	ギルド $\mathcal{G}$ の両側コセット: $H\alpha^{(i)}K = \{h\alpha^{(i)}k : h \in H,\, k \in K\}$
M のモース分解	$\mathcal{P}$ の分解 $\mathcal{P} = \coprod_{i\in I} \eta^{-1}(H\alpha^{(i)}K)$
f の臨界点 $p \in M$ でのモース指数	η に関する $H\alpha^{(i)}K$ の重複度 $m^{(i)}$ (§4 参照)

表 1:

シナジーの具体例を挙げておきます。

例 3.6. （位数 8 の）二面体群 $D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1,\, bab^{-1} = a^3 \rangle$ に対し、位数 2 の巡回部分群 $H_1 = \langle b \rangle$, $H_2 = \langle ab \rangle$, $H_3 = \langle a^2 b \rangle$ を取り、セクト $H_1 H_2 H_3$ を考えます。これの両側コセット分解は $H_1 H_2 H_3 = H_1 1 H_3 \amalg H_1 ab H_3$（非交和）であり、普遍シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \to H_1 H_2 H_3$ のファイバーは、$H_1 1 H_3$ の各点上では一点からなり、$H_1 ab H_3$ の各点上では二点からなります（図 1 参照)。

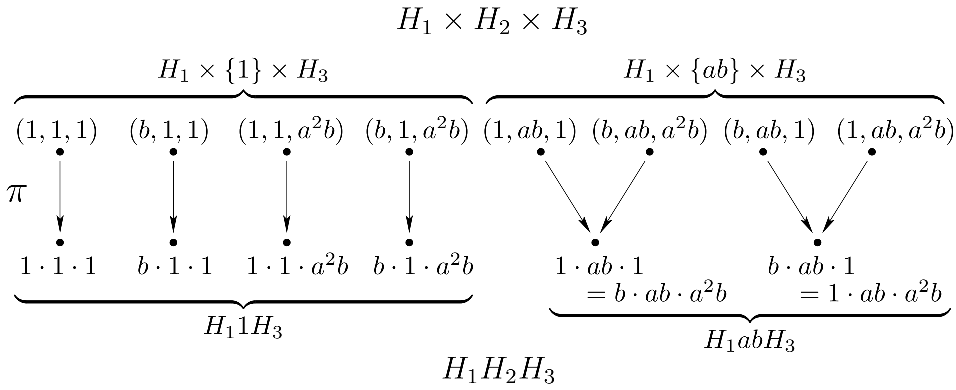


図 1: 例 3.6 の普遍シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \to H_1 H_2 H_3$.

4 “シナジェティックな” 位数公式とベズー型定理

この節では、「シナジェティックな（相乗的)」位数公式を説明します。この公式は、古典的群論の両側コセットの位数公式の一般化になっています。準備から始めます。簡単のため、ギルド $HA_1A_2 \cdots A_n K$ を $\mathcal{G}$ と書くことにします。$\mathcal{G}$ は「有限」としておきます（元の個数が有限)。$\mathcal{G}$ のプラズマ $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ のあいだのシナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ に対し、**ソース分解**（*source decomposition*）$\mathcal{P} = \coprod_{j \in J} \mathcal{S}_j$ と**ターゲット分解**（*target decomposition*）$\mathcal{Q} = \coprod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ が構成されます。この構成は、込み入っているので省略しますが、$\mathcal{Q}$ がギルド $\mathcal{G}$ のときは、$\mathcal{G}$ のターゲット分解は両側コセット分解に一致します。さて、次の性質が重要です：シナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ は *component-wise*、つまりソース成分 $\mathcal{S}_j$ をあるターゲット成分 $\mathcal{T}_i$ に（全射に）写す。

定義 4.1. 各ターゲット成分 $\mathcal{T}_i$ に対し、その「上にある」ソース成分 $\mathcal{S}_j$ たち（つまり $\eta(\mathcal{S}_j) = \mathcal{T}_i$ を満たす $\mathcal{S}_j$ たち）の個数 (cadinality) を $\mathcal{T}_i$ の**サテライト指数**と言い、$w^{(i)}$ と表す。また、$m^{(i)} := w^{(i)} |\mathcal{T}_i|$ を $\mathcal{T}_i$ の（η に関する）**重複度**と言う。

以下では、次の記号を用います：

- プラズマ $\mathcal{P}$ を直積 $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_N$ で表す。たとえば、次のプラズマ $\mathcal{P}$ は

$P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4$ と表す。

$$\mathcal{P} = \underbrace{HA_1A_2}_{P_1} \times \underbrace{A_3}_{P_2} \times \underbrace{A_4A_5A_6A_7A_8}_{P_3} \times \underbrace{A_9K}_{P_4}. \tag{4.1}$$

- 有限集合 S に対し、その元の個数を $|S|$ と表す。

次を示しました（証明はファイバーの元の個数の数え上げによる）：

公式 4.2 ([**Ta1**] **相乗的位数公式**; synergetic order formula)**.**
$\mathcal{G} = HA_1A_2 \cdots A_nK$ を有限ギルドとし、$\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ をシナジーとする。$\mathcal{G} = \coprod_{i \in I} H\alpha^{(i)}K$ を両側コセット分解とし、η に関する $H\alpha^{(i)}K$ の重複度を $m^{(i)}$ とする。また、((4.1) のように) $\mathcal{P}$ を直積 $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_N$ で表す。このとき、次が成り立つ：

$$|P_1||P_2| \cdots |P_N| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \tag{4.2}$$

ここで、$K^{\alpha^{(i)}} := \alpha^{(i)} K {\alpha^{(i)}}^{-1}$ とおいた。

補足 4.3. 相乗的位数公式は、任意の（$\mathcal{Q}$ がギルドとは限らない）シナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ へ一般化されます [Ta1]。

相乗的位数公式 (4.2) を “特殊化” することにより、さまざまな公式が導けます。たとえば、シナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ として、

(I) $\mathcal{P} = \underbrace{H}_{P_1} \times \underbrace{A_1A_2 \cdots A_n}_{P_2} \times \underbrace{K}_{P_3}$ と取ると、

$$|H||A_1A_2 \cdots A_n||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \tag{4.3}$$

(II) $\mathcal{P} = \underbrace{H}_{P_1} \times \underbrace{A_1}_{P_2} \times \underbrace{A_2}_{P_3} \times \cdots \times \underbrace{A_n}_{P_{n+1}} \times \underbrace{K}_{P_{n+2}}$ と取ると、

$$|H||A_1||A_2| \cdots |A_n||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \tag{4.4}$$

(III) **ベズー型定理**　(I) or (II) で、とくに $n = 1$ のとき、A_1 を A と書くと

$$|H||A||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \tag{4.5}$$

(IV) (III) において、$A = \{\alpha\}$（一点集合）のときは、HAK は両側コセット $H\alpha K$ で、I は一点集合、$m^{(i)}$ は $|H\alpha K|$ です。よって、(4.5) は $|H||\{\alpha\}||K| = |H\alpha K||H \cap K^{\alpha}|$, つまり $|H||K| = |H\alpha K||H \cap K^{\alpha}|$ となります。書き直すと、

$$|H\alpha K| = \frac{|H||K|}{|H \cap K^{\alpha}|}. \tag{4.6}$$

これは両側コセット $H\alpha K$ の古典的な位数公式にほかなりません。**つまり、高次群論の相乗的位数公式は、古典的群論の位数公式の一般化になっています。**

観察 (4.5) は代数幾何のベズー（Bézout）の定理の類似です。ベズーの定理を復習しておきます。まず、複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の（なめらかな）代数曲線 C の定義多項式の次数を $\deg C$ と書き、C の次数と言います。

定理 4.4 (**ベズーの定理** ([EiHa] p.140))**.** 複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線 C と D に対し、$\deg C \deg D$ は $C \cap D$ の各点の交差重複度を足し上げたものに等しい。

これを少し言い換えます。まず、C と D の交点の交差重複度として現われる自然数の集合を $\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ とします. また、各 m_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ に対し、交差重複度が m_i である交点たちの集合を $(C \cap D)_i$ と表し、その個数を $|(C \cap D)_i|$ と表します。このとき、ベズーの定理は次のように言い換えられます：

$$\deg C \deg D = \sum_{i=1}^{l} m_i |(C \cap D)_i|. \tag{4.7}$$

これは公式 (4.5) に似ています。対照表にまとめておくと、

代数幾何	高次群論
$\mathbb{CP}^2$: 複素射影平面	HAK: G のギルド
$C, D \subset \mathbb{CP}^2$: 平面代数曲線	$H, K \subset HAK$: G の部分群
$(C \cap D)_i$, 交差重複度 m_i	$H \cap K^{\alpha^{(i)}}$, 重複度 $m^{(i)}$
$\deg C, \deg D$	$\lvert H\rvert, \lvert K\rvert$
ベズーの定理 $\deg C \deg D = \sum_{i=1}^{l} m_i \lvert(C \cap D)_i\rvert$	相乗的位数公式 $\lvert H\rvert\lvert A\rvert\lvert K\rvert = \sum_{i \in I} m^{(i)} \lvert H \cap K^{\alpha^{(i)}}\rvert$

表 2:

比較 4.5. 表 2 において、C と D の “ambient space” $\mathbb{CP}^2$ はもちろん C と D に依存しません。一方、H と K の “ambient space” HAK は A に依存するので、$|A|$ や $\alpha^{(i)} \in A$ が相乗的位数公式に現れるのはもっともです。

参考文献

[EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes,* Springer-Verlag (1999)

[Ta1] S. Takamura, *Higher Group Theory,* Preprint (2024)

[Ta2] ———, *The orders of subgroup products and coset products,* (2024), to appear in Transactions on Combinatorics

[Ta3] ———, *Prime factorizations of finite groups, I, II, III* (2023), to appear in Advances in Group Theory and Applications