

The linear minimal 4-chart with three crossings

東海大学理学部数学科 志摩亜希子¹

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto for his eightieth birthday

この研究は東海大学の永瀬輝男氏との共同研究です.

1 linear chart の定義

chart とは、4次元空間内に埋め込まれた向き付け可能な曲面を表す手法として開発されたものです ([1], [3]).

n を自然数とする. n -chart とは円板内の向きとラベルが付いたグラフで、各辺のラベルは $1, 2, \dots$ か $n-1$ であり、各頂点は次の内のどれかである.

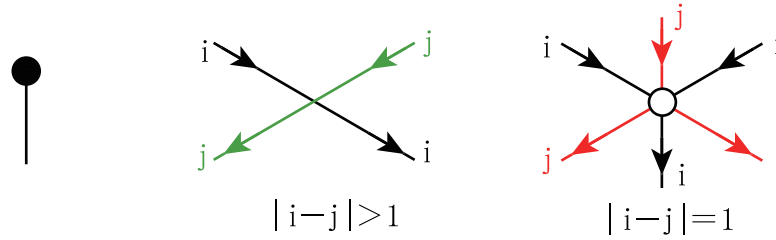


図1 . 左から black vertex, crossing, white vertex.

chart Γ に有限回の C-move を施して chart Γ' が得られるとき、 Γ と Γ' は C-同値 であるという. chart Γ が white vertex のない chart に C-同値であるとき、 Γ を ribbon chart という.

次の chart は ribbon chart であることが示されている.

- (1) 3-chart ([2])
- (2) 高々1個の crossing を含む n -chart ([4],[7])
- (3) n -chart で高々2個の crossing を含み、その chart が表す曲面結び目が球面達を表すもの ([5],[6])

¹本研究は JSPS 科研費 24K06745 の助成を受けたものです.
259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1, shima-a@tokai.ac.jp

また、2 個の crossing を含む minimal n -chart の大まかな形が分かっている ([8],[9]).

Γ を chart とする.

$c(\Gamma)$ = crossing の数,

$w(\Gamma)$ = white vertex の数,

$f(\Gamma)$ = free edge の数,

$b(\Gamma)$ = bigon の数

とおく. ここで、両端が black vertex である辺を free edge という. Γ の 2 つの辺を境界とする図 2 のような open disk を bigon という.

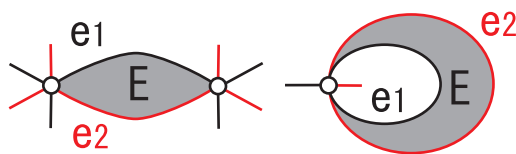


図 2 . e_1, e_2 が Γ の辺で, E が open disk.

4 つの組 $(c(\Gamma), w(\Gamma), -f(\Gamma), -b(\Gamma))$ を Γ の c-complexity という. chart Γ が c-minimal であるとは次の条件を満たすことをいう (単に minimal であるともいう): 4 つの整数の組の間に辞書式順序を考えたとき Γ と C-同値な chart の中で、 Γ の c-complexity が最小である.

Γ を chart とする. $Cross(\Gamma)$ を Γ の crossing 全体の集合とする. Γ_m をラベル m の辺の和集合とする.

Γ を chart とし, m をラベルとする. Γ_m が linear であるとは, $\Gamma_m - Cross(\Gamma)$ の各連結成分の閉包が cycle を含まないときをいう. crossing を含むどの Γ_m も linear ならば, chart Γ を linear chart という.

次の 4-chart は linear 4-chart の例である.

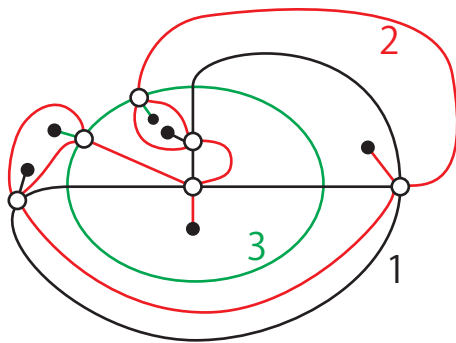


図 3 . 2-twist spun trefoil を表す 4-chart.

頂点を含まない閉曲線を hoop という。つぎが今回の主結果である。

定理.([10]) Γ を丁度 3 個の crossing を含む linear minimal 4-chart とする。必要ならば辺の向きをすべて入れ替えたり, ラベル 1, 2, 3 の辺を 3, 2, 1 に取り替えたり, 鏡映を取ったり, free edge や hoop を省略することにより, chart Γ は 2-twist spun trefoil を表す 4-chart である。

2 key lemma

black vertex と white vertex を含む辺を terminal edge という。

定理を証明するためにとても便利な補題を紹介します。

補題 1.(Consecutive Triplet Lemma)([4],[7]) Γ を minimal chart とする。 e_1 を terminal edge, e_2, e_3 を図 4 (a),(b) のような辺とする。このとき、 e_1 のラベルと e_3 のラベルは異なる (結果的に図 4 (a) は minimal chart には含まれず, 図 4 (c),(d) を含む)。

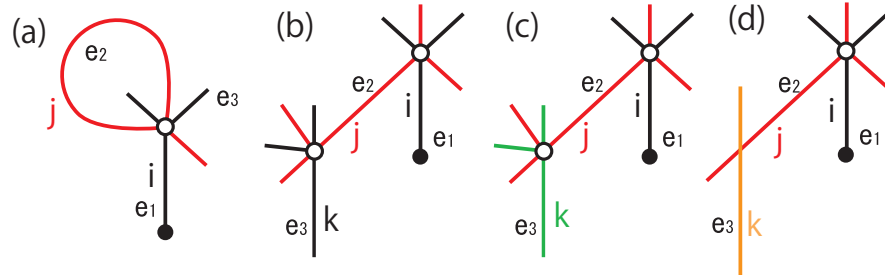


図 4 . e_1 は terminal edge.

図 5 のようなラベル m の単純閉曲線 C を mal-cycle という。

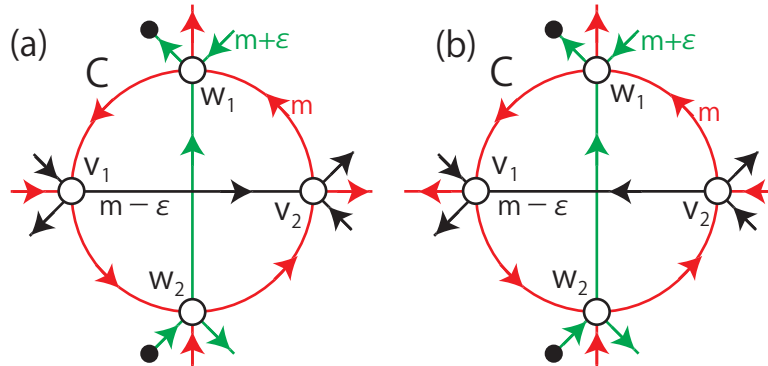


図 5 . mal-cycle C . ここで, m はラベル, $\varepsilon \in \{+1, -1\}$.

補題 2 . minimal chart には mal-cycle は存在しない。

3 定理の証明方法

定理の証明の最初の方だけ紹介します. (詳しくはもう直ぐ完成予定の論文 [10] をご覧下さい)

Γ を 4-chart とし, $T(\Gamma)$ を terminal edge の和集合とする. 集合 $\Gamma_1 - T(\Gamma), \Gamma_3 - T(\Gamma)$ の閉包をそれぞれ $AB(\Gamma_1), AB(\Gamma_3)$ と表す.

補題 3. Γ を linear minimal 4-chart とする. もし Γ が丁度 3 個の crossing を含むならば, $AB(\Gamma_1) \cup AB(\Gamma_3)$ は図 6 のいずれかである.

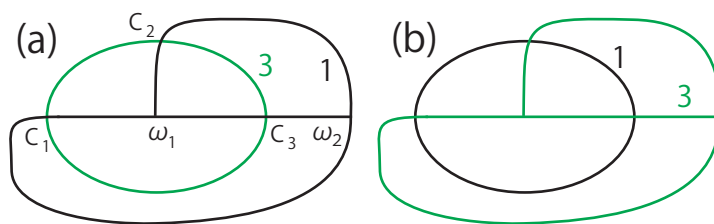


図 6 . $AB(\Gamma_1) \cup AB(\Gamma_3)$.

以下, Γ は丁度 3 個の crossing を含む linear minimal 4-chart とする.

更に, $AB(\Gamma_1) \cup AB(\Gamma_3)$ は図 6 (a) のようだと仮定する. w_1, w_2 を図 6 (a) の white vertex とする. c_1, c_2, c_3 を crossing とする. $AB(\Gamma_1) - \{w_1, w_2, c_1, c_2, c_3\}$ は 6 本の open arc からなり, $AB(\Gamma_3) - \{c_1, c_2, c_3\}$ は 3 本の open arc からなる. それらの arc の 1 つの閉包を ℓ とする. すると, ℓ の近くは, 図 7 のようになっていることが示される. 他の辺の向きを覚えておくために, オレンジ色の矢印を ℓ に横断的に交わるように記すことにする (この矢印を direction indicator という).

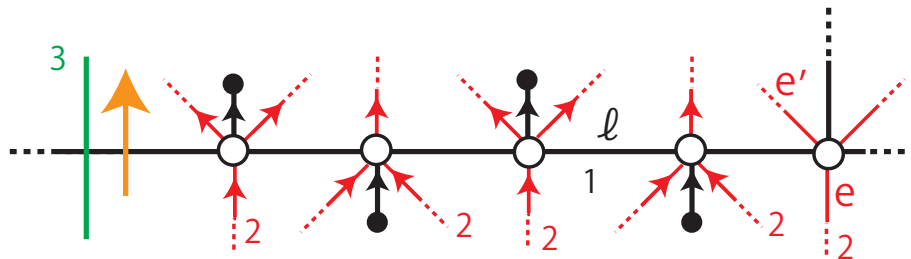


図 7 . arc ℓ のラベルが 1 の場合の図. 辺 e, e' の向きは分からない.

図 6 (a) が対称であることを考慮し, 必要ならば辺の向きをすべて入れ替えることにより, 図 8 にあるラベル 2 の辺 e_2, e_3 が white vertex w_1 より出る向きにあるとしてよいことが分かる. 少し考えると arc ℓ_1, ℓ_3 の direction indicator が図 8 のような向きであることが証明できる. 必要ならば chart Γ を対称移動させて, arc ℓ_2 の direction indicator が図 8 のような向きであるとしてよい.

また minimal chart の性質から, e_2 も terminal edge でないことが分かり, e_2 のもう 1 つの white vertex が ℓ_8 上にあることが分かる. すると ℓ_8 の direction indicator が定まる (図 9 (a)).

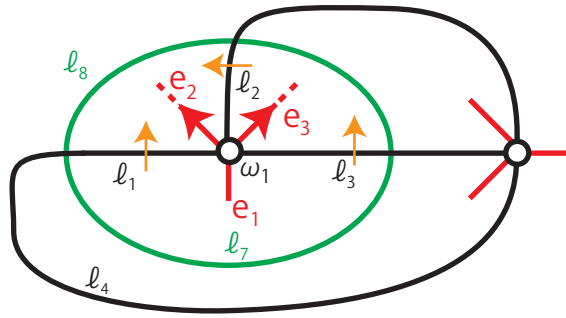


図 8 . 定理の証明のスタートの図.

最初の場合分けとしては,

- (1) ラベル 2 の辺 e_1 が terminal edge でない場合.
- (2) ラベル 2 の辺 e_1 が terminal edge である場合.

を調べます.

それぞれ証明が長いので, (1) の場合の最初の部分を紹介する. ℓ_1, ℓ_3 の direction indicator を考えることにより, e_1 のもう 1 つの white vertex が ℓ_7 上にあることが分かる. すると ℓ_7 の direction indicator が定まる (図 9 (a)).

- (1) の最初は, ℓ_4 上に white vertex が w_2 のみであることを示す.

もし ℓ_4 上に w_4 以外の white vertex v があったとする. τ を v を含むラベル 1 の terminal edge とする. ℓ_4 の direction indicator の向きによって場合分けして考える.

まず, ℓ_4 の direction indicator の向きが図 9 (b),(c) のようであるとする. τ がどのような位置にあっても, Consecutive Triplet Lemma より, τ の横から出ているラベル 2 の辺の 1 つが ℓ_7 か ℓ_8 と交わることになる. しかし, この辺の向きと direction indicator の向きを考えると矛盾していることが分かる.

よって, ℓ_4 の direction indicator の向きが図 9 (d) のような向きになる. しかし, この場合は crossing c_1 の周りに mal-cycle を見つけることが出来る. よって, ℓ_4 の上に white vertex が w_2 のみであることが示される.

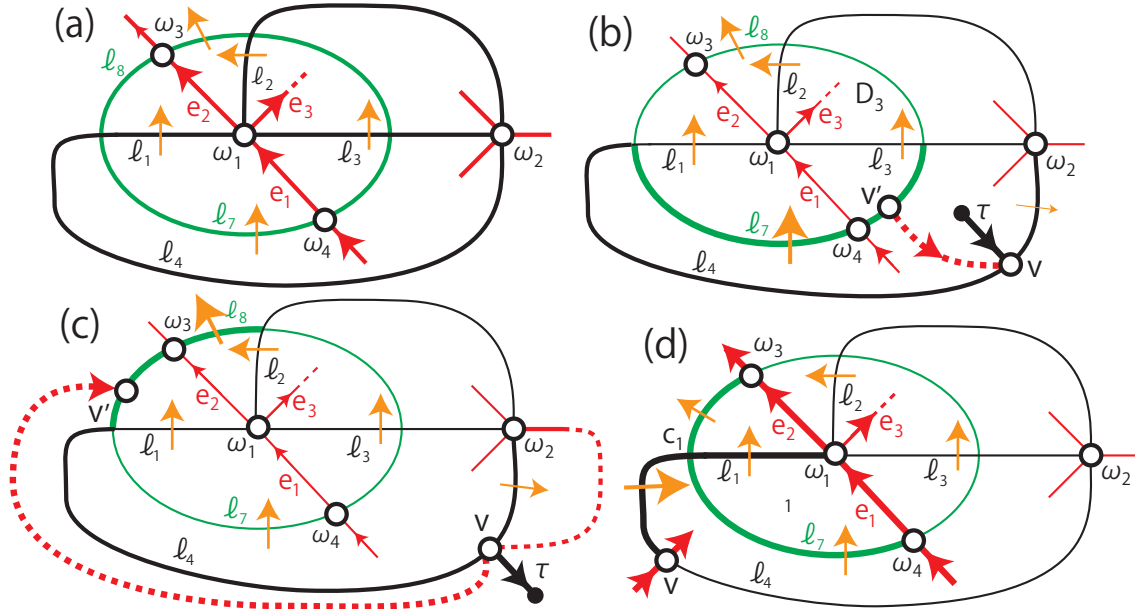


図 9 . e_1 が terminal edge でない.

最後に mal-cycle を見つけるのに有効な pinwheel を紹介して終わります.

図 10 にあるような 4 つの arc の和集合 $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ が $AB(\Gamma_1) \cup AB(\Gamma_3)$ に含まれるとする. もし white vertex v_1, v_3 が共にラベル 1 の terminal edge に含まれるか, white vertex v_2, v_4 が共にラベル 3 の terminal edge に含まれるならば, $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ を pinwheel という.

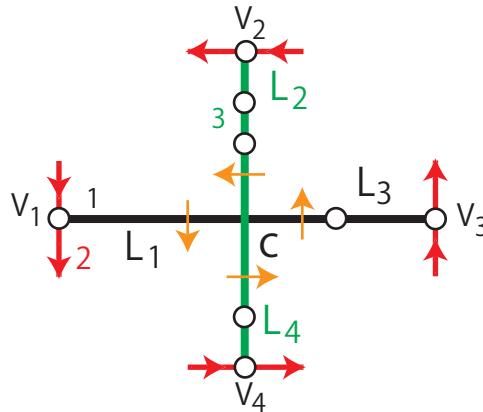


図 10 . pinwheel.

補題 4. minimal chart には pinwheel は存在しない.

証明について, もし pinwheel を含むとすると, 図 1 1 のように変形して mal-cycle を見つけることが出来る. これは補題 2 に反する.

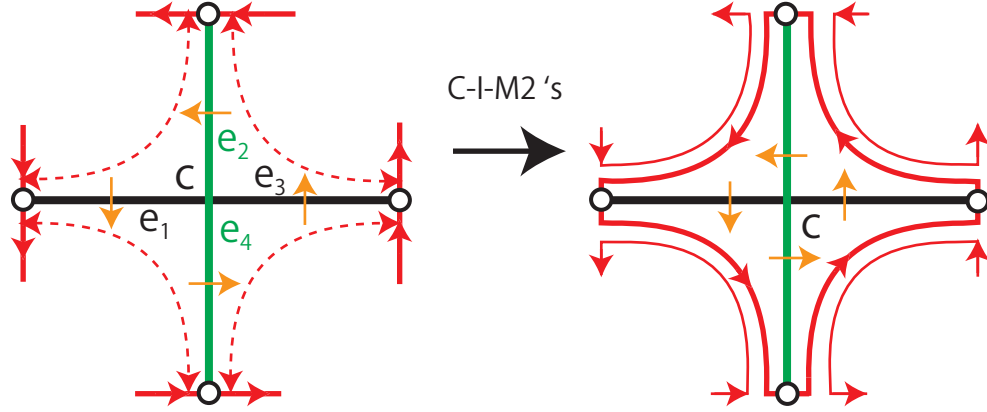


図 1 1 . 補題 4 の証明の図.

参考文献

- [1] J. S. Carter and M. Saito: *Knotted surfaces and their diagrams*, Mathematical Surveys and Monographs, 55, American Mathematical Society, Providence, RI, (1998).
- [2] S. Kamada: *Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications 1, no. 2 (1992), 137–160.
- [3] S. Kamada: *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 95, American Mathematical Society, (2002).
- [4] T. Nagase and A. Shima, *Any chart with at most one crossing is a ribbon chart*, Topology Appl. **157** (2010), 1703–1720.
- [5] T. Nagase and A. Shima, *On charts with two crossings I: There exist no NS-tangles in a minimal chart*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), 217–241.
- [6] T. Nagase and A. Shima, *On charts with two crossings II*, Osaka J. Math. **49** (2012), 909–929.
- [7] T. Nagase and A. Shima, *Minimal charts*, Topology Appl. **241** (2018), 291–332, arXiv:1602.02958v2.
- [8] T. Nagase and A. Shima, *The structure of a minimal n -chart with two crossings I: Complementary domains of $\Gamma_1 \cup \Gamma_{n-1}$* , J. Knot Theory Ramif. **27**(14) (2018) 1850078, 37 pages, arXiv:1704.01232v3.
- [9] T. Nagase and A. Shima, *The structure of a minimal n -chart with two crossings II: Neighbourhoods of $\Gamma_1 \cup \Gamma_{n-1}$* , Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas **113** (2019) 1693–1738, arXiv:1709.08827v2.
- [10] T. Nagase and A. Shima, *The linear minimal 4-chart with three crossings*, in preparation.