多様体上の可微分関数のReeb空間について

佐伯　修

2024年11月10日

概 要

The Reeb space of a continuous function on a topological space is the space of connected components of the level sets. In this talk, we characterize those smooth functions on closed manifolds whose Reeb spaces have the structure of a finite graph. We also discuss its generalization to continuous functions on Peano continua.

1　準備

位相空間 X 上の連続関数 $f : X \to \mathbf{R}$ を考える．2点 $x, x' \in X$ に対して，$f(x) = f(x')$ であって，x, x' が $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x'))$ の同一の連結成分に属するとき，$x \sim x'$ と書く．これは X に同値関係を定め，これによる商空間を $W_f = X/\sim$ とし，$q_f : X \to W_f$ を商写像とする．すると，連続写像 $\overline{f} : W_f \to \mathbf{R}$ であって，次の図式を可換にするものが一意的に存在することが容易にわかる．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_f"'] & & \mathbf{R} \\
& W_f \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

空間 W_f は写像 f の **Reeb 空間**，連続写像 $\overline{f}$ は，**Reeb 関数**と呼ばれる．

たとえば，図1はトーラス上の標準的な高さ関数（これは Morse 関数となる）の Reeb 空間と Reeb 関数を示している．

なお，可微分閉多様体上の Morse 関数の Reeb 空間は有限グラフ（1次元以下の有限 CW 複体）となることが知られており，したがってしばしば **Reeb グラフ**と呼ばれる [4] （[7] なども参照）．

さて，M を可微分（C^∞ 級）閉多様体（コンパクトで境界なし）とし，$f : M \to \mathbf{R}$ を可微分（C^∞ 級）関数とする．既存の結果として，以下が知られている [5].

定理 1.1 もし f が高々有限個の**臨界値**しか持たなければ，Reeb 空間 W_f は有限グラフの構造を持つ．さらにこのグラフ構造は，頂点が臨界点を含むレベル集合の連結成分に対応し，$\overline{f} : W_f \to \mathbf{R}$ が各辺上埋め込みであるように選べる．

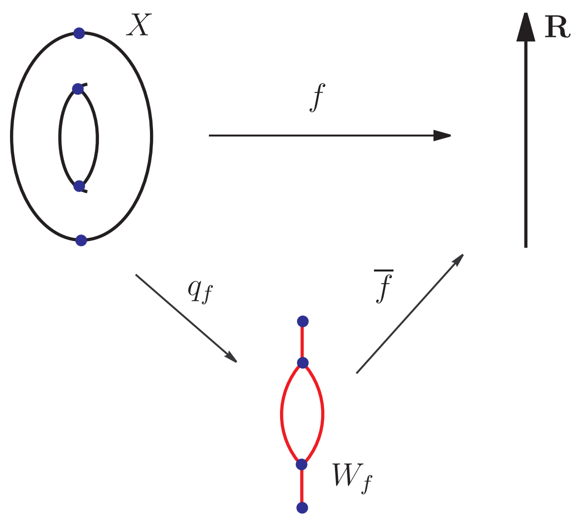

図 1: トーラス上の Morse 関数の Reeb 空間と Reeb 関数

実は,「有限個の臨界値を持つ」という条件は，Reeb 空間が有限グラフの構造を持つための必要条件ではない.（ただし，頂点が，臨界点を含むレベル集合の連結成分に対応し，各辺上 $\overline{f}$ が埋め込みとなる，という条件を課せば，必要条件となる.）具体例については [6] を参照.

そこで本講演では，可微分閉多様体上の可微分関数の Reeb 空間が有限グラフの構造を持つための必要十分条件を与える．詳細については [6] を参照されたい.

2　主結果

結果を述べるために，いくつかの用語を準備する.

以下，しばらくの間，位相空間 X 上の連続関数 $f : X \to \mathbf{R}$ を考える.

定義 2.1 各 $t \in \mathbf{R}$, に対して，$f^{-1}(t)$ を**レベル集合**，その各連結成分を **contour**（あるいは**レベル集合成分**）と呼ぶ.

部分集合 $A \subset X$ が，f の contour 達の和集合となるとき（すなわち，$q_f^{-1}(q_f(A)) = A$ となるとき），**saturated**（あるいは**充満している**）という.

X が可微分多様体であり，$f : X \to \mathbf{R}$ が可微分関数であるとき，contour が**臨界的**であるとは，それが f の臨界点を含むときを言う．そうでないときは**正則**であると言う.

定義 2.2 空でなく saturated な連結開集合 $U \subset X$ が **cylindrical** であるとは，各 $z \in q_f(U)$ に対して，$U \setminus q_f^{-1}(z)$ が丁度 2 つの連結成分からなるときを言う.

空でなく saturated な連結開集合 $U \subset X$ が **star-like** であるとは，ある contour $C \subset U$ が存在して，$U \setminus C$ が，有限個の cylindrical な連結開集合の非交和となるときを言う.

具体例については図 2 を参照．なお，図の (1) において，中間の高さに対応する contour としてアニュラスが描かれているが，これはコンパクト連結で境界成分がちょうど 2 つであるような勝手な曲面で置き換えらえることに注意する．図の (2) についても同様である．

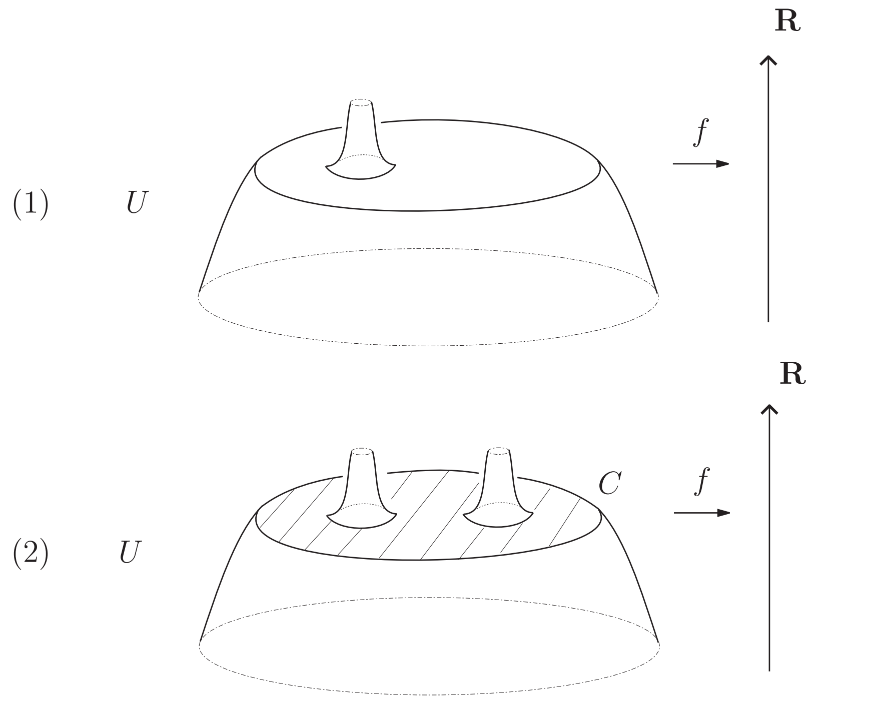

図 2: (1) Cylindrical な開集合　(2) Star-like な開集合

以上の定義のもと，以下の主定理が成立する．

定理 2.3 可微分閉多様体 M 上の可微分関数 $f : M \to \mathbf{R}$ に対して，その Reeb 空間 W_f が有限グラフの構造を持つためには，その各臨界的 contour が star-like な開近傍を持つことが必要十分である．

なお，上述の定理において，「各臨界的 contour が star-like な開近傍を持つ」は，「各 contour が star-like な開近傍を持つ」としても成り立つ．正則な contour はいつでも cylindrical な開近傍を持ち，cylindrical な開集合は常に star-like であるからである．

注意 2.4 多様体 M がコンパクトで境界を持つ場合にも同様の定理が成立する．ただし，その場合には臨界的 contour の定義を次のように修正する必要がある．可微分関数 $f : M \to \mathbf{R}$ について，その contour が**臨界的**であるとは，それが f または $f|_{\partial M}$ の臨界点を含むときであると定める．すると，上述の定理が成り立つ．

実は，上述の定理は一般位相の分野での既知の結果に基づいて証明される．その手法を使うと，上述の定理は以下のように，Peano 連続体上の連続関数に一般

化される．なお，位相空間が **Peano 連続体**であるとは，それが空でないコンパクト連結で局所連結なハウスドルフ空間であるときを言う．

定理 2.5 Peano 連続体 X が第二可算公理を満たすとする．このとき，X 上の連続関数 $f : X \to \mathbf{R}$ に対して，その Reeb 空間が有限グラフの構造を持つためには，各 contour が star-like な開近傍を持つことが必要十分である．

定理 2.3, 2.5 の証明には，以下の 2 つの結果が重要な役割を果たす．

定理 2.6 (Gelbukh [3]) 位相空間 X 上の連続関数 $f : X \to \mathbf{R}$ を考える．もし X が Peano 連続体であれば，Reeb 空間 W_f もそうである．さらに加えて X が距離化可能であれば，W_f もそうである．

定理 2.7 (Ward [8]) もし距離空間 X が可分，連結で局所連結であり，さらに各 $x \in X$ に対して $X \setminus \{x\}$ がちょうど 2 つの連結成分からなるならば，X は開区間 $(0, 1)$ に同相である．

定理 2.7 については [1, 2] も参照．

謝辞

著者は学生のときから，長年に渡り，松本幸夫先生から多くの助言をいただくとともに，その数学に対する姿勢について多くを学ばせていただいた．いつも明るく激励をして下さった松本幸夫先生に，この場を借りて，心より感謝申し上げたい．

なお，本研究は JSPS 科研費 JP22K18267, JP23H05437 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] S.P. Franklin and G.V. Krishnarao, *On the topological characterisation of the real line*, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 589–591.

[2] S.P. Franklin and G.V. Krishnarao, *On the topological characterization of the real line: An addendum*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 392.

[3] I. Gelbukh, *On the topology of the Reeb graph*, Publicationes Mathematicae Debrecen **104** (2024), 343–365.

[4] G. Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences **222** (1946), 847–849.

[5] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, Volume 2022, Issue 11, June 2022, 8740–8768.

[6] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds II*, Res. Math. Sci. **11** (2024), article number 24.
`https://doi.org/10.1007/s40687-024-00436-z`

[7] V.V. Sharko, *About Kronrod–Reeb graph of a function on a manifold*, Methods Funct. Anal. Topology **12** (2006), 389–396.

[8] A.J. Ward, *The topological characterisation of an open linear interval*, Proc. London Math. Soc. **s2-41** (1936), 191–198.