双曲結び目の補空間の無限巡回被覆の 3D index について

大槻 知忠[1]　(京大 数理研)

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto on the occasion of his 80th birthday

この原稿は著者の論文 [5] の解説原稿である。以下の内容について詳しくは [5, 6] を参照されたい。

カスプ付き 3 次元多様体 M に対して、3D index $I(M) \in \mathbb{Z}[[q]]$ が、Dimofte-Gaiotto-Gukov [1] により、導入されて、M の位相不変量であることが予言された。$\mathcal{T}$ を M の理想 4 面体分割とする。$\mathcal{T}$ の辺の整数ラベルに関する状態和を用いることによって変数 q の整数係数べき級数として M の 3D index が数学的に定式化される。この状態和は無限和であって、収束するとは限らないが、$\mathcal{T}$ が「狭義角構造」をもつとき、この無限和は収束する。その典型的な場合は「$\mathcal{T}$ がカスプ付き 3 次元双曲多様体の理想 4 面体分割であるとき」である。すなわち、3D index $I(M)$ は、カスプ付き 3 次元双曲多様体 M に対して定義されるが、すべてのカスプ付き 3 次元多様体 M に対して定義されるわけではない。また、$I(M)$ が位相不変量であることは [2] で示されている。

双曲結び目 K に対して、その補空間 $S^3 - K$ はカスプ付き 3 次元双曲多様体であり、その 3D index が定義される。さらに、$M_n(K)$ を $S^3 - K$ の n 重巡回被覆空間とすると、これもカスプ付きの 3 次元双曲多様体になり、その 3D index $I\big(M_n(K)\big)$ が定義される。$I\big(M_n(K)\big)$ の値の漸近挙動について考察することが、この原稿の目標である。標語的に言うと “$S^3 - K$ の無限巡回被覆の「同変 3D index」を定式化したい” ということを念頭においている。

この話題の数理物理的背景について、3D index は数理物理的には $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ Chern-Simons 理論の相関関数とみなされる ([1] 参照)。その $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ Chern-Simons 汎関数の臨界点は、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 平坦接続、すなわち $\pi_1(M)$ の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現であり、双曲構造に対応するホロノミー表現における、その相関関数の摂動展開は、「3D index の体積予想」を与えることが期待されている ([3, 4] 参照)。$I\big(M_n(K)\big)$ の値の漸近挙動が、その問題に関連することを期待している。

この原稿は次のように構成される。第 1 節で、3D index の定義と、定義の無限和が収束することを、復習する。第 2 節で、$I\big(M_n(K)\big)$ の値の d 次の係数は十分大きい n に対して n の $2d$ 次多項式になることを述べる。第 3 節で、遷移行列をつかった $I\big(M_n(K)\big)$ の値の表示について述べる。

[1]The author is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP21H04428 and JP19K21830.

1　3D index の定義

この節では、3D index の定義と、定義式の和が収束することを、復習する。詳しくは [5, 6] を参照されたい。

整数 m, e に対して、

$$\tilde{I}(m,e) \;=\; \sum_{n=\max\{0,-e\}}^{\infty} (-1)^n \, \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)-(n+\frac{1}{2}e)m}}{(q)_n \, (q)_{n+e}}$$

とおく、ここで、

$$(q)_n \;=\; \begin{cases} 1 & \text{if } n=0, \\ (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n) & \text{if } n>0 \end{cases}$$

である。整数 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 に対して、

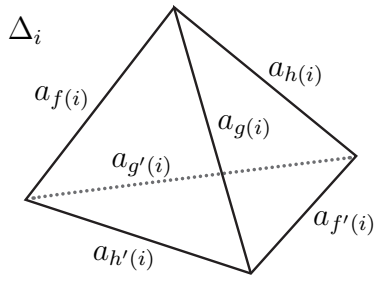
$$\begin{aligned} I(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \;&=\; (-q^{1/2})^{-\ell_1} \, \tilde{I}(\ell_1-\ell_2,\, \ell_3-\ell_1) \\ &=\; (-q^{1/2})^{-\ell_2} \, \tilde{I}(\ell_2-\ell_3,\, \ell_1-\ell_2) \\ &=\; (-q^{1/2})^{-\ell_3} \, \tilde{I}(\ell_3-\ell_1,\, \ell_2-\ell_3) \end{aligned}$$

とおく (右辺の 3 式の値が等しいことは非自明であり、$\tilde{I}(m,e)$ がみたす関係式からそれらが等しいことが導かれる)。$I(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ の値は ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の置換に関して不変であり、

$$I(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \;=\; \big(-q^{1/2}\big)^{-c} \, I(\ell_1+c,\, \ell_2+c,\, \ell_3+c) \tag{1}$$

をみたすことに注意する。

M をカスプを 1 つもつ 3 次元双曲多様体とする。双曲結び目の補空間がその典型的な例である。M はその双曲構造を与えるような理想 4 面体分割 $\mathcal{T}$ をもつと仮定する[2]。$\mathcal{T}$ は m' 個の 4 面体と m 本の辺をもつとする (カスプの近傍の境界のトーラスのオイラー数を計算することにより、$m=m'$ であることがわかる)。4 面体の集合と辺の集合のそれぞれに順序をいれて、i 番目の 4 面体を Δ_i とかくことにして、j 番目の辺を $\mathcal{E}_j$ とかくことにする。各 4 面体の対辺に同じラベルがつくように、辺 $\mathcal{E}_j$ に整数ラベル a_j をつける。4 面体 Δ_i には次の図のようにラベルがつけられている。



[2] この仮定は、以下の記述を簡単にするための仮定であり、この仮定がなくても以下の内容は成立する。実際、カスプ付き 3 次元双曲多様体は標準分割（理想多面体分割）をもち、退化した理想 4 面体（2 次元につぶれた理想 4 面体）を許せば、標準分割をさらに分割して（退化した）理想 4 面体分割にできる。そして、以下の内容は、退化した理想 4 面体（面角が 0 や π である場合）を用いた理想 4 面体分割に対して、成立する。

ここで、 f, f', g, g', h, h' は写像 $\{1,\cdots,m'\}\to\{1,\cdots,m\}$ であり、$\mathcal{E}_{f(i)}$ と $\mathcal{E}_{f'(i)}$、$\mathcal{E}_{g(i)}$ と $\mathcal{E}_{g'(i)}$、$\mathcal{E}_{h(i)}$ と $\mathcal{E}_{h'(i)}$ が Δ_i の対辺であるようなものである。M の **3D index** を、任意の j を固定して、

$$I(M) \;=\; \sum_{\substack{a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{Z}\\ a_j=0}} q^{a_1+\cdots+a_m}\prod_i I\big(a_{f(i)}+a_{f'(i)},\, a_{g(i)}+a_{g'(i)},\, a_{h(i)}+a_{h'(i)}\big) \;\in\mathbb{Z}[[q]] \qquad (2)$$

で定める。右辺の和の値が、固定した j の選び方によらないことは、$(a_1,\cdots,a_m)$ を $(a_1+c,\cdots,a_m+c)$ で取り替えることに関して、「和をとられる部分」の値が不変であることから導かれる。

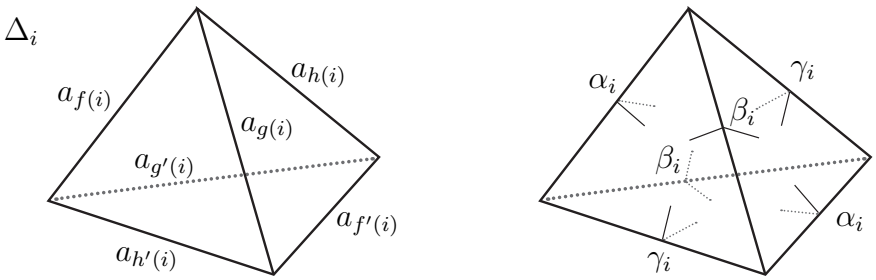
3D index の定義式 (2) の右辺の和が収束すること

$I(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ の最低次数を $I(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ の次数であると定める。$I(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ の定義より、

$$\deg I(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}(\ell_2-\ell_1)(\ell_3-\ell_1)-\frac{1}{2}\ell_1 & \text{if } \ell_1\le\ell_2 \text{ and } \ell_1\le\ell_3,\\ \frac{1}{2}(\ell_1-\ell_2)(\ell_3-\ell_2)-\frac{1}{2}\ell_2 & \text{if } \ell_2\le\ell_1 \text{ and } \ell_2\le\ell_3,\\ \frac{1}{2}(\ell_1-\ell_3)(\ell_2-\ell_3)-\frac{1}{2}\ell_3 & \text{if } \ell_3\le\ell_1 \text{ and } \ell_3\le\ell_2 \end{cases} \qquad (3)$$

であることがわかる。多くの場合、$I(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ の次数は正であるが、負になる場合もあることに注意する。

理想 4 面体 Δ_i の面角を次の図のように $2\pi\alpha_i$, $2\pi\beta_i$, $2\pi\gamma_i$ とおく。



図で α_i, β_i, γ_i とかいているところの面角が $2\pi\alpha_i$, $2\pi\beta_i$, $2\pi\gamma_i$ である。このとき、

$$\alpha_i+\beta_i+\gamma_i \;=\; \frac{1}{2} \qquad (4)$$

が成り立つ。辺 $\mathcal{E}_j$ のまわりの面角の和が 2π であることより、各 j について

$$\sum_{f(i)=j}\alpha_i+\sum_{f'(i)=j}\alpha_i+\sum_{g(i)=j}\beta_i+\sum_{g'(i)=j}\beta_i+\sum_{h(i)=j}\gamma_i+\sum_{h'(i)=j}\gamma_i \;=\; 1$$

であることがわかる。よって、

$$\begin{aligned}&\sum_i \alpha_i(a_{f(i)}+a_{f'(i)})+\beta_i(a_{g(i)}+a_{g'(i)})+\gamma_i(a_{h(i)}+a_{h'(i)})\\ &=\; \sum_j\Big(\sum_{f(i)=j}\alpha_i+\sum_{f'(i)=j}\alpha_i+\sum_{g(i)=j}\beta_i+\sum_{g'(i)=j}\beta_i+\sum_{h(i)=j}\gamma_i+\sum_{h'(i)=j}\gamma_i\Big)a_j \;=\; \sum_j a_j\end{aligned} \qquad (5)$$

である。$J_i(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ を次のようにおく。

$$J_i(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \;=\; q^{\alpha_i\ell_1+\beta_i\ell_2+\gamma_i\ell_3} I(\ell_1,\ell_2,\ell_3).$$

(1) と (4) より、

$$J_i(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \;=\; J_i(\ell_1+2c,\, \ell_2+2c,\, \ell_3+2c)$$

である。よって、(5) により、

$$I(M) \;=\; \sum_{\substack{a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{Z}\\ a_j=0}} \prod_i J_i\big(a_{f(i)}+a_{f'(i)},\, a_{g(i)}+a_{g'(i)},\, a_{h(i)}+a_{h'(i)}\big) \tag{6}$$

であることがわかる。

(3) と (4) より、

$$\deg J_i(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}(\ell_2-\ell_1)(\ell_3-\ell_1)+\beta_i(\ell_2-\ell_1)+\gamma_i(\ell_3-\ell_1) & \text{if } \ell_1\le\ell_2 \text{ and } \ell_1\le\ell_3\,, \\ \frac{1}{2}(\ell_1-\ell_2)(\ell_3-\ell_2)+\alpha_i(\ell_1-\ell_2)+\gamma_i(\ell_3-\ell_2) & \text{if } \ell_2\le\ell_1 \text{ and } \ell_2\le\ell_3\,, \\ \frac{1}{2}(\ell_1-\ell_3)(\ell_2-\ell_3)+\alpha_i(\ell_1-\ell_3)+\beta_i(\ell_2-\ell_3) & \text{if } \ell_3\le\ell_1 \text{ and } \ell_3\le\ell_2 \end{cases}$$

である。とくに、定数 $\delta>0$ が存在して、

$$\deg J_i(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \begin{cases} \ge\; 0 & \text{if } \ \ell_1=\ell_2=\ell_3, \\ \ge\; \delta & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる。このことより、(6) の和を一定の次数以下の部分に制限すると、その和は有限和になることがわかる。よって、3D index の定義式 (2) の右辺の和は収束する。 □

この証明からわかるように、(6) において和をとる範囲である $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}$ 上の関数として「和をとられる部分」の最低次元が “下に凸 (のような形)” であることが、M の双曲構造から導かれ、そのことから $\mathbb{Z}[[q]]$ における和の収束性が導かれる。3D index は、状態和という量子トポロジー的な手法で定義されるが、(典型的な場合として)3 次元双曲多様体に対して定義される、ということは、3D index は「3 次元双曲多様体の量子トポロジー」を構築する一員であることを示唆しているようにおもわれる。

また、$I(M)$ が M の位相不変量であることについて [2, 6] を参照されたい。

2 $I\big(M_n(K)\big)$ の係数は、十分大きい n で、n の多項式であること

この節では、$I\big(M_n(K)\big)$ の次数 d の係数は、十分大きい n で、n の $2d$ 次以下の多項式であること、について述べる。定理の証明など詳細について [5] を参照されたい。

K を双曲結び目とする。K の補空間 S^3-K の双曲構造を与えるような S^3-K の理想 4 面体分割があると仮定する[3]。$M_n(K)$ を S^3-K の n 重被覆空間として、S^3-K の理想 4 面体分割のリフトとして、$M_n(K)$ の理想 4 面体分割を考える。$I\big(M_n(K)\big)$ の係数を

$$I\big(M_n(K)\big) \;=\; 1 + c_1^{(n)}(K)\, q + c_2^{(n)}(K)\, q^2 + \cdots \;\in \mathbb{Z}[[q]]$$

のようにおく。十分大きい n に対する $I\big(M_n(K)\big)$ の小さい次数の部分の値の挙動について、次の定理が成り立つ。

定理 2.1. 任意の正の整数 d に対して、正の整数 n_0 と次数 $2d$ 以下の n の多項式 $p_d^K(n)$ が存在して、

$$c_d^{(n)}(K) \;=\; p_d^K(n) \quad \textit{for any} \;\; n \geq n_0$$

が成り立つ。

定理の $p_d^K(n)$ を用いて、$\tilde{I}_K(n,q)$ を次のように定める。

$$\tilde{I}_K(n,q) \;=\; 1 + p_1^K(n)\, q + p_2^K(n)\, q^2 \cdots \;\in \mathbb{Z}[n][[q]].$$

標語的に言うと、これが "S^3-K の無限巡回被覆の「同変 3D index」(の stable part)" とみなしたいということを念頭においている。

4_1 結び目の場合

定理 2.2.

$$p_1^{4_1}(n) = 0, \qquad p_2^{4_1}(n) = 0, \qquad p_3^{4_1}(n) = 0.$$

であり、よって、

$$\tilde{I}_{4_1}(n,q) \;=\; 1 + O(q^4)$$

である。

$I\big(M_n(4_1)\big)$ の具体的な値は次のように与えられる。

$$\begin{array}{rcl}
I\big(M_1(4_1)\big) &=& 1 - 2q - 3q^2 + 2q^3 + 8q^4 + 18q^5 + 18q^6 + 14q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_2(4_1)\big) &=& 1 + 2q^2 + 8q^3 - 3q^4 - 32q^5 - 66q^6 - 56q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_3(4_1)\big) &=& 1 - 2q^3 - 18q^4 - 6q^5 + 138q^6 + 306q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_4(4_1)\big) &=& 1 + 2q^4 + 32q^5 + 48q^6 - 424q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_5(4_1)\big) &=& 1 - 2q^5 - 50q^6 - 160q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_6(4_1)\big) &=& 1 + 2q^6 + 72q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_7(4_1)\big) &=& 1 - 2q^7 + O(q^8), \\
I\big(M_8(4_1)\big) &=& 1 + O(q^8).
\end{array} \tag{7}$$

[3]前述したように、この仮定は、以下の記述を簡単にするための仮定であり、この仮定がなくても以下の内容は成立する。

この値は下 3 角の領域の係数が 0 になるという顕著な特徴をもつことが観察される。その特徴が任意の n で成立することは、後述する定理 3.1 を用いると、導出することができる。また、小さい次数で定理 2.1 が成立することは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} c_1^{(n)}(4_1) &= p_1^{4_1}(n) \quad \text{for any } n \geq 2, \\ c_2^{(n)}(4_1) &= p_2^{4_1}(n) \quad \text{for any } n \geq 3, \\ c_3^{(n)}(4_1) &= p_3^{4_1}(n) \quad \text{for any } n \geq 4. \end{aligned}$$

5_2 結び目の場合

定理 2.3.

$$p_1^{5_2}(n) = n(n-2), \qquad p_2^{5_2}(n) = \frac{1}{4}\, n\,(n^3 - 6n^2 + n + 36)$$

であり、よって、

$$\tilde{I}_{5_2}(n,q) \;=\; 1 \,+ n(n-2)\, q \,+ \frac{1}{4}\, n\,(n^3 - 6n^2 + n + 36)\, q^2 \;+ O(q^3)$$

である。

$I\big(M_n(5_2)\big)$ の具体的な値は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} I\big(M_1(5_2)\big) &= 1 \,- 4q \;\; - q^2 + 16q^3 + 26q^4 \;+ O(q^5), \\ I\big(M_2(5_2)\big) &= 1 \qquad\quad + 14q^2 + 6q^3 - 107q^4 \;+ O(q^5), \\ I\big(M_3(5_2)\big) &= 1 \,+ 3q + 15q^2 - 82q^3 - 24q^4 \;+ O(q^5), \\ I\big(M_4(5_2)\big) &= 1 \,+ 8q \;+ 8q^2 - 72q^3 \;+ O(q^4), \\ I\big(M_5(5_2)\big) &= 1 + 15q + 20q^2 + 45q^3 \;+ O(q^4), \\ I\big(M_6(5_2)\big) &= 1 + 24q + 63q^2 + 216q^3 \;+ O(q^3), \\ I\big(M_7(5_2)\big) &= 1 + 35q + 161q^2 + 546q^3 \;+ O(q^3), \\ I\big(M_8(5_2)\big) &= 1 + 48q + 344q^2 + 1248q^3 \;+ O(q^3). \end{aligned}$$

小さい次数で定理 2.1 が成立することは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} c_1^{(n)}(5_2) &= p_1^{5_2}(n) \quad \text{for any } n \geq 2, \\ c_2^{(n)}(5_2) &= p_2^{5_2}(n) \quad \text{for any } n \geq 4. \end{aligned}$$

3 遷移行列の固有値を用いた $I\big(M_n(K)\big)$ の値の表示

この節では、遷移行列 $\mathcal{M}$ の固有値を用いて $I\big(M_n(K)\big)$ の値を表示することができることの概要について述べる。この $\mathcal{M}$ は “無限次元の行列” であることに注意する。定理の証明など、詳細について [5] を参照されたい。

4_1 結び目の場合

4_1 結び目の補空間の理想 4 面体分割を、$M_n(4_1)$ の理想 4 面体分割にリフトして、3D index の定義を適用することにより、$I\big(M_n(4_1)\big)$ の値は次のように表示される。

$$\begin{aligned} I\big(M_n(4_1)\big) \;=\; \sum & J_{4_1}(a_0{+}a_3, 2a_1, 2a_2)\, J_{4_1}(a_1{+}a_4, 2a_2, 2a_3) \\ & \times J_{4_1}(a_2{+}a_5, 2a_3, 2a_4)\, J_{4_1}(a_3{+}a_6, 2a_4, 2a_5) \\ & \times \cdots \\ & \times J_{4_1}(a_{2n-2}{+}a_{2n+1}, 2a_{2n-1}, 2a_{2n})\, J_{4_1}(a_{2n-1}{+}a_{2n+2}, 2a_{2n}, 2a_{2n+1}). \end{aligned}$$

ここで、a_i の添字は “mod $2n$” で考え、和の範囲は

$$a_0 = 0, \qquad a_1, \cdots, a_{2n-1} \in \mathbb{Z}$$

のようにとる。a'_k を

$$a'_k \;=\; a_k - a_{k-1}$$

のようにおくことにより、和の範囲は

$$a'_0, a'_1, \cdots, a'_{2n-1} \in \mathbb{Z}, \qquad a'_0 + a'_1 + \cdots + a'_{2n-1} = 0$$

のように書き直される。さらに、u を変数として、$\mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)}$ を

$$\mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)} \;=\; J_{4_1}(a_0{+}a_3, 2a_1, 2a_2)\, J_{4_1}(a_1{+}a_4, 2a_2, 2a_3)\, u^{a'_2+a'_3}$$

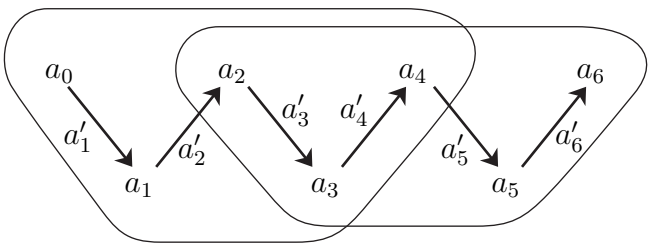
のようにおく。ここで、u のべきは $a'_2 + a'_3 + \cdots$ の値をかぞえており、その値の情報を $\mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)}$ の中に記録するために u という変数を導入している。また、$J_{4_1}(\ell_1{+}2, \ell_2{+}2, \ell_3{+}2) = J_{4_1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ であることより、上式の右辺は a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 にしかよらないことに注意する。さらに、$\mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)}$ を成分にする $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} \;=\; \Big(\mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)}\Big)$$

のように定める。2 つの $\mathcal{M}$ の積は

$$\mathcal{M}^2 \;=\; \left(\sum_{a'_3,a'_4} \mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)}\, \mathcal{M}^{(a'_3,a'_4)}_{(a'_5,a'_6)}\right)$$

で与えられる (積の成分の値の和が収束することは自明ではない)。ここで、パラメータ同士の関係は次のようになっている。



すなわち、a'_3, a'_4 に関して $\mathcal{M}^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_3,a'_4)}\,\mathcal{M}^{(a'_3,a'_4)}_{(a'_5,a'_6)}$ の和をとることにより、$\mathcal{M}^2$ の成分 $\big(\mathcal{M}^2\big)^{(a'_1,a'_2)}_{(a'_5,a'_6)}$ が得られる。このことを拡張することにより、$I\big(M_n(4_1)\big)$ の値は

$$I\big(M_n(4_1)\big) \;=\; \big((\mathrm{trace}\,\mathcal{M}^n)\text{ の値における }u^0\text{ の係数}\big)$$

のように表される。

次数が小さい部分の $\mathcal{M}$ の固有値は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \;&= 1 \;+O(q^{15/2}),\\
\lambda_2 \;&= \;-q \;+q^{3/2}(u+u^{-1}) \;+q^2\big(-1+\sqrt{-1}\,(u+u^{-1})\big)\\
&\quad -q^{5/2}\sqrt{-1}\,\big(1+\frac{1}{2}(u^2+u^{-2})\big)\\
&\quad +q^3\big(\frac{1}{2}(u^2+u^{-2})+\frac{9\sqrt{-1}}{8}(u+u^{-1})-\frac{\sqrt{-1}}{8}(u^3+u^{-3})\big)\\
&\quad +q^{7/2}\big(-2(u+u^{-1})-\frac{7\sqrt{-1}}{8}+\frac{\sqrt{-1}}{2}(u^2+u^{-2})-\frac{\sqrt{-1}}{16}(u^4+u^{-4})\big)\\
&\quad +q^4\sqrt{-1}\,\big(\frac{51}{64}(u+u^{-1})+\frac{31}{128}(u^3+u^{-3})-\frac{5}{128}(u^5+u^{-5})\big) \;+O(q^{9/2}),\\
\lambda_3 \;&= \overline{\lambda_2},\\
\lambda_4 \;&= q^2e^{2\pi\sqrt{-1}/3} \;+O(q^{5/2}),\\
\lambda_5 \;&= \overline{\lambda_4}.
\end{aligned}$$

定理 3.1. $I\big(M_n(4_1)\big)$ の値は、固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_5$ を用いて、

$$I\big(M_n(4_1)\big) \;=\; \Big(\;(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n+\lambda_5^n)\text{ の値における }u^0\text{ の係数}\;\Big) \;+O(q^{\min\{2n+1,\,8\}})$$

のように表示される。

定理の帰結として、前述したように、(7) の下 3 角の領域の係数が 0 になることがわかる。

5_2 結び目の場合

5_2 結び目に対して、前述の場合と同様にして、

$$\mathcal{M}^{(b'_0,a'_1)}_{(b'_1,a'_2)} \;=\; \sum_{c'_0\,\in\,\mathbb{Z}} J_{5_2}(a_0{+}c_0,c_0{+}b_0,a_1{+}b_1)\,J_{5_2}(a_2{+}c_0,c_0{+}b_1,a_1{+}b_0)\,J_{5_2}(b_0{+}b_1,a_1{+}c_0,a_0{+}a_2)\,u^{a'_1}$$

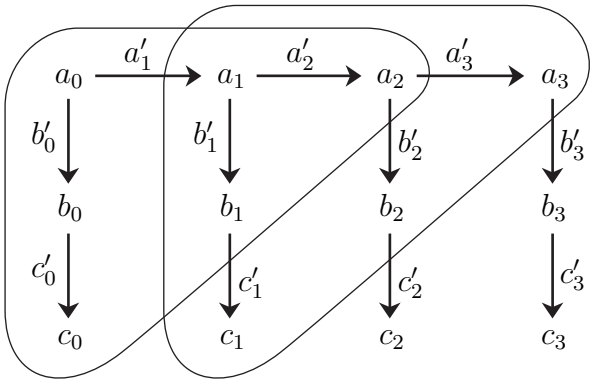
とおく。ここで、変数 u のべきは $a'_1+a'_2+\cdots$ の値をかぞえている。また、$J_{5_2}(\ell_1{+}2,\ell_2{+}2,\ell_3{+}2)=J_{5_2}(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ であることより、上式の右辺の値は b'_0,a'_1,b'_1,a'_2 にしかよらないことに注意する。さらに、$\mathcal{M}^{(b'_0,a'_1)}_{(b'_1,a'_2)}$ を成分とする $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} \;=\; \Big(\mathcal{M}^{(b'_0,a'_1)}_{(b'_1,a'_2)}\Big)$$

のように定める。2 つの $\mathcal{M}$ の積は

$$\mathcal{M}^2 \;=\; \left(\sum_{b'_1,a'_2} \mathcal{M}^{(b'_0,a'_1)}_{(b'_1,a'_2)}\,\mathcal{M}^{(b'_1,a'_2)}_{(b'_2,a'_3)}\right)$$

で与えられる。ここで、パラメータ同士の関係は次のようになっている。



よって、前述の場合と同様にして、$I\big(M_n(5_2)\big)$ の値は

$$I\big(M_n(5_2)\big) \;=\; \big((\mathrm{trace}\,\mathcal{M}^n)\text{ の値における }u^0\text{ の係数}\big)$$

のように表される。

次数が小さい部分の $\mathcal{M}$ の固有値は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \;&= 1 + q^{1/2}(u+u^{-1}) + q(-1+u^2+u^{-2}) + q^{3/2}\big(-2(u+u^{-1})+u^3+u^{-3}\big)\\
&\quad + q^2(8+u^4+u^{-4}) + q^{5/2}\big(-5(u+u^{-1})+u^5+u^{-5}\big)\\
&\quad + q^3\big(-19-12(u^2+u^{-2})+u^6+u^{-6}\big) \;+O(q^{7/2}),\\
\lambda_2 \;&= 2^{1/3}q^{3/2} - 1 + \frac{2}{3}\,q^{3/2}(u+u^{-1}) + \frac{1}{2^{1/3}}\,q^{5/2} \;+O(q^{11/6}),\\
\lambda_3 \;&= 2^{1/3}e^{2\pi\sqrt{-1}/3}q^{3/2} - 1 + \frac{2}{3}\,q^{3/2}(u+u^{-1}) + \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}/3}}{2^{1/3}}\,q^{5/3} \;+O(q^{11/6}),\\
\lambda_4 \;&= 2^{1/3}e^{-2\pi\sqrt{-1}/3}q^{3/2} - 1 + \frac{2}{3}\,q^{3/2}(u+u^{-1}) + \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}/3}}{2^{1/3}}\,q^{5/3} \;+O(q^{11/6}).
\end{aligned}$$

定理 3.2. $I\big(M_n(5_2)\big)$ の値は、固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ を用いて、

$$I\big(M_n(5_2)\big) \;=\; \Big(\;(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n)\text{ の値における }u^0\text{ の係数}\Big) + \begin{cases} O(q^2) & \textit{if } n=1,\\ O(q^3) & \textit{if } n=2,3,4,\\ O(q^4) & \textit{if } n\geq 5 \end{cases}$$

のように表示される。

“S^3-K の無限巡回被覆の「同変 3D index」” という標語的な観点で言うと、“固有値の列 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$” が「同変 3D index」に相当する。別の言い方をすると、$\mathcal{M}$ の特性多項式

$$(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdot\;\cdots$$

を「同変 3D index」とみなすことができそうであるが、上式の無限積は収束しないので、その無限積が収束するように $t^{-1} = T$ とおいてそれを書きかえた

$$(1 - T\lambda_1)(1 - T\lambda_2) \cdot \cdots$$

を「同変 3D index」とみなすのがよいようにおもわれる。

References

[1] Dimofte, T., Gaiotto, D., Gukov, S., *3-manifolds and 3d indices*, Adv. Theor. Math. Phys. **17** (2013) 975–1076.

[2] Garoufalidis, S., Kashaev, R., *A meromorphic extension of the 3D index*, Res. Math. Sci. **6** (2019) Paper No. 8, 34 pp.

[3] Garoufalidis, S., Wheeler, C., *Periods, the meromorphic 3D-index and the Turaev–Viro invariant*, arXiv:2209.02843.

[4] Hodgson, C. D., Kricker, A. J., Siejakowski, R. M., *On the asymptotics of the meromorphic 3D-index*, arXiv:2109.05355.

[5] Ohtsuki, T., *On the 3D-index of finite cyclic covers of hyperbolic knot complements*, RIMS preprint, 2023. `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1971.pdf`

[6] 大槻知忠、満渕俊樹、亀谷幸生、「幾何学と物理」、幾何学百科 IV、朝倉書店、2023 年 12 月.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8502, Japan
E-mail address: `tomotada@kurims.kyoto-u.ac.jp`