

TEICHMÜLLER 空間の 2 つの FINSLER 距離

大鹿健一

松本幸夫先生 80 歳のお誕生日をお祝いして

1. 序

Teichmüller 空間は Riemann 面の擬等角変形の空間として, Teichmüller によって導入された. 2 つの同相な指標付きの Riemann 面の間の指標を保つ擬等角写像のうち, 最も歪度が低いものを考えその $\log$ を距離とすることにより, Teichmüller 空間には Finsler 距離が定まることも Teichmüller により示されている. この距離, Teichmüller 距離については, 複素解析的手法を用いた研究が多くなされて来た.

種数 2 以上の Riemann 面は, 一意化定理により, 双曲計量をもつ. 従って Teichmüller 空間は曲面面上の双曲構造の isotopy 類の空間とみなすこともできる. この視点から Teichmüller 空間に距離を入れようとすると, 擬等角写像の代わりに Lipschitz 同相写像を考えるのが自然である. Thurston はこの考え方を採用し, 指標を保つ Lipschitz 同相写像の Lipschitz 定数の下限の $\log$ として距離を定義した ([5]).

この距離が現在 Thurston の非対称距離と呼ばれるものである.

名前が示す通りこの距離は非対称であるが, Finsler 距離であることが Thurston により示されている. またこの距離についての測地線がどのようになるかも Thurston によって解析されている. 一方で, Teichmüller 距離に比べると, 解析が使いにくいとため, 無限小構造をはじめとする解析的な構造については未開拓であった. 私はここ数年, この距離に興味を持ち, Athanase Papadopoulos, 黄意さらに Assaf Bar-Natan と共同研究を継続している. [2, 1]

Thurston は同じ論文で, もう一つの Finsler 距離, 地震距離が定義できることに触れている. この距離についてはほとんど研究がなされていなかったが, Weil-Petersson 計量を経由して Thurston 非対称距離との双対性があり, その他もろもろ興味深い性質があることがわかってきた. この研究は, Papadopoulos, 黄に潘会平も加えた 4 人の共同で行った ([3]).

2. THURSTON の非対称距離

S を（向きづけられた）双曲型の曲面として、その Teichmüller 空間を $\mathcal{T}(S)$ で表そう。Thurston 非対称距離は、前述のように、指標を保つ同相写像の可能な Lipschitz 定数の下限として定義されるのであるが、実は次の量 M と一致する。 $m, n \in \mathcal{T}(S)$ を S 上の 2 つの双曲計量とみなし、

$$M(m, n) := \sup_{\gamma \in \mathcal{C}(S)} \frac{\text{length}_n(\gamma)}{\text{length}_m(\gamma)}$$

ただしここで $\mathcal{C}(S)$ は S 上の non-contractible な単純閉曲線のホモトピー類（＝イソトピー類）の全体を表し、 length はその類の中の閉測地線の長さを表す。この表示は、2 点 m, n に対して、その距離に対応する Lipschitz 定数で伸びるような (chain-recurrent) geodesic lamination が存在することを示している。このような geodesic lamination を maximally stretched lamination と呼ぶ。

Maximally stretched lamination が geodesic lamination として complete（すなわち補集合の各成分が理想 3 角形）であるときは、stretch map と呼ばれる写像が Lipschitz 定数を実現しており、さらに stretch maps の連続列により、 m, n を結ぶ Thurston 距離についての測地線が構成できる。これらの事実は Teichmüller 空間の余接空間に Thurston 距離が誘導するコノルムの記述を与える。 $\mathcal{ML}(S)$ を S 上の measured lamination space, $\mathcal{PML}(S)$ をその射影化とし、 $\ell\mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ を双曲計量についての測地的長さ関数とする。これを $x \in \mathcal{T}(S)$ で $\mathcal{T}(S)$ 方向に微分したものを $(d\ell)_x$ とすると、 $(d\log \ell)_x$ は $\mathcal{PML}(S)$ から余接空間 $T_x^*\mathcal{T}(S)$ への写像になる。

定理 2.1 (Thurston [5]). $(d\log \ell)_x \mathcal{PML}(S) \rightarrow T_x^*\mathcal{T}(S)$ は Thurston 距離に対応する Thurston コノルムについての単位球面への同相写像になる。

[2] においては、この単位球面の凸構造を分析した。その凸構造を用いて以下の「剛性」がわかった。この剛性は Teichmüller 距離についての Royden の定理の類似と見なすことができる。

定理 2.2 ([2]). $f: T_x^*\mathcal{T}(S) \rightarrow T_y^*\mathcal{T}(S)$ を任意の Thurston コノルムについての線型等長写像とすると、 f は必ず S の自己微分同相写像から誘導される。

単位球は強い意味で凸ではなく、平坦な部分を多く含んでいる。凸幾何においては、凸集合の面とは、「線分の内点を含めばその端点も含むような凸真部分集合」と定義される。特に、凸集合の内部と交わらない超平面と単位球との交わりは、面となり、露出面と呼ばれるが、面は露出面であるとは限らない。Thurston 距離についての接空間の単位級については、以下のような面と露出面の特徴付けが得られた。

定理 2.3 ([1]). 任意の $x \in \mathcal{T}(S)$ における接空間 $T_x \mathcal{T}(S)$ の Thurston 距離に付随したノルムについての単位球 S_x において、以下が成り立つ.

- (1) S_x の面はある chain recurrent geodesic lamination λ を infinitesimally maximally stretched lamination として持つ点の集まりで、 λ を含む任意の complete geodesic laminations たち $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を用いて、

$$\{\alpha_1 v_{\lambda_1} + \dots + \alpha_n v_{\lambda_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]\}$$

と表される点全体となる. ただし v_{λ_n} は λ_n に関する無限小 stretch 写像である.

- (2) 上の表示で λ を台とする transverse measure が存在する時、面は露出面になる.

特にこの定理の系として以下がわかる.

系 2.4. S_x の組み合わせ的構造は x に依らない.

3. 地震距離

地震変形は Fenchel-Nielsen 変形の一般化として Thurston により導入された概念である. Fenchel-Nielsen 変形が閉測地線に沿っての変形であるのに対し、地震変形は一般の measured lamination に沿った変形である. Teichmüller 空間の任意の 2 点は地震変形に移りあうことが Thurston により示されている. さらに Teichmüller 空間の任意の (0 でない) 接ベクトルは無限小地震変形として一通りのみに表せる. そこで $v \in T_x \mathcal{T}(S)$ が $\lambda \in \mathcal{ML}(S)$ についての無限小地震変形であった時、 v の値を $\text{length}_x(\lambda)$ と定義して非対称なノルムが得られ ([5]), これを地震ノルムと呼ぶ. 地震ノルムは Teichmüller 空間に Finsler 距離を定めるがこの距離についてはほとんど研究がなされてこなかった. [3] において我々はこの距離についてさまざまな性質を証明した. いくつかの顕著な結果を挙げる.

定理 3.1. 地震ノルムはあらゆる点で真に非対称である.

定理 3.2. 地震距離により Teichmüller 空間は完備でなく、完備化は augmented Teichmüller 空間と同一視できる.

定理 3.3. 十分長い地震変形径は測地線でない.

定理 3.4. 定理 2.2 と同様な剛性が地震ノルムについても成立する.

一方で一般的な測地線の記述はできておらず、任意の 2 点が測地線で結べるかどうかはまだわかっていない. これらは今後の研究課題である.

また Thurston コノルムと地震ノルムの間には Weil-Petersson Kähler form を経由した双対性がある. これは Teichmüller-Beltrami 微分が Legendre 変換に対応していることと ([4]) 類似であるが、Weil-Petersson

を間に入れることにより horocycle 方向に対応する地震ノルムが真の双対とは異なるものになっており、興味深い現象である。

REFERENCES

- [1] BAR-NATAN, A; OHSHIKA, K. AND PAPADOPOULOS, A. Convex structures of the unit tangent spheres in the Thurston metric on Teichmüller space, in preparation
- [2] HUANG, YI; OHSHIKA, K. AND PAPADOPOULOS, A. Infinitesimal rigidity of Teichmüller space with the Thurston metric. to appear in J. Diff. Geom.
- [3] HUANG, Y.; OHSHIKA, K.; PAN, H. AND PAPADOPOULOS, A. The earthquake metric on Teichmüller space. *arXiv:2404.19515*.
- [4] MIYACHI, H.; OHSHIKA, K. AND PAPADOPOULOS, A. The horocyclic metric on Teichmüller spaces *arXiv:2409.10082*
- [5] THURSTON, W. P. Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces. *arXiv.org math.GT* (01 1998). Published in the Collected Works of William P. Thurston, Vol. I, American Mathematical Society, Providence, RI, 2022, p. 533-585.