

ニット状曲面とそのチャート表示について

中村伊南沙（佐賀大学理工学部）*

2024 年 11 月 9 日 研究集会「多様体のトポロジーの進展」

概要

ニットとはブレイドにフックペアを追加したものであり、ニットの 2 次元へ拡張したものと
してニット状曲面が定義される。ここでは、ニット状曲面の定義と、その円盤上のグラフ表示
「チャート表示」について述べる。特に、次数 2 のチャートで表されるニット状曲面の特殊ブ
ラット閉包は、自明な曲面絡み目であることを述べる。

献辞

松本幸夫先生の傘寿をお祝い申し上げます。

1 ニットおよびニット状曲面

記号 D^2 および B^2 で 2 次元円盤を表し、 $I = [0, 1]$ とし、 Q_n を D^2 の n 個の内点からなる集合とする。

定義 1.1. タングル $\beta \subset D^2 \times I$ について、 l を $D^2 \times I$ 内に埋め込まれた単純アークであって、 β と横断的に交わるものとする。このとき、 l が次の条件を満たすとき、 l を β の**ペアリング**という。

- (1) $l \cap \beta = \partial l \cap \text{Crit}(\beta) = \partial l$ が成り立つ。
- (2) $p|_l : l \rightarrow I$ が臨界点を持たない。但し、 $p : D^2 \times I \rightarrow I$ は射影である。
- (3) 各 $a \in \partial l$ に対し、 $a \in \beta$ のまわりの局所座標 $(U; x)$ と $p(a) \in I$ のまわりの局所座標 $(V; t)$ を取って、 $a = 0 \in U$, $p|_\beta(x) = x^2$ かつ $p(l) \cap V = \{t \in V \mid t \leq 0\}$ とできる。

タングル β を $p|_\beta$ が非退化なものとする。このとき、 β の**ニット構造**を、互いに交わらない β のペアリングの集合 $\ell = \{l_1, \dots, l_q\}$ であって、全ての折り目特異点が $|\ell| = l_1 \cup \dots \cup l_q$ に含まれるものとする。タングル β が $\partial\beta = Q_n \times \{0, 1\}$ を満たし、かつニット構造 ℓ を持つとき、対 $(\beta; \ell)$ を次数 n の**ニット**という。

* この研究は安田順平氏（大阪大学）との共同研究である。
佐賀市本庄町 1 佐賀大学理工学部数理・情報部門
Email アドレス: inasa@cc.saga-u.ac.jp

次数 n のニットの間の同値関係を、ニット構造を保つイソトピーで移りあうことと定める。ニットは [2] で導入された概念であるが、[2] では同値関係を、境界を固定したイソトピーで移りあうことと定めている。ニットの概念を 2 次元に拡張したものがニット状曲面である。

定義 1.2. 4 次元円盤 $D^2 \times B^2$ 内にプロパーに埋め込まれた曲面 S があり、 $p : D^2 \times B^2 \rightarrow B^2$ を射影とする。 L を $D^2 \times B^2$ に埋め込まれた向き付け可能な曲面であって S と横断的に交わるものとする。このとき、 L が次を満たすとき、 L を S の**ペアリング**という。

- (1) $L \cap S = \partial L \cap \text{Fold}(S) \neq \emptyset$ が成り立ち、かつ $\partial L \setminus \text{Fold}(S)$ は $D^2 \times \partial B^2$ 内の単純開アークから成る。
- (2) $p|_L$ は臨界点を持たない。
- (3) 各点 $a \in \text{Fold}(S)$ について、 $a \in S$ のまわりの局所座標 $(U; x, y)$ と $p(a) \in B^2$ のまわりの局所座標 $(V; s, t)$ が取れて、 $a = (0, 0) \in U$, $V = p(U)$,

$$\begin{cases} V = \{(s, t) \mid -1 < s, t < 1\} & (p(a) \notin \partial B^2 \text{ のとき}) \\ V = \{(s, t) \mid 0 \leq s < 1, -1 < t < 1\} & (p(a) \in \partial B^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

および $p|_S(x, y) = (x, y^2)$ かつ $p(L \cap U) = \{(s, t) \in V \mid t \leq 0\}$ が成り立つようにできる。

曲面 $S \subset D^2 \times B^2$ を、 $p|_S$ が非退化であり、特異点として折り目特異点とブランチ点のみを持つものとする。このとき、 S の**ニット構造**を、互いに交わらないペアリングの集合 $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_q\}$ であって、基点 $y_0 \in \partial B^2$ に対して $|\mathcal{L}| \cap (D^2 \times \{y_0\}) = \emptyset$ を満たし、かつ全ての折り目特異点が $|\mathcal{L}| = L_1 \cup \dots \cup L_q$ に含まれるものとする。曲面 S が $S \cap (D^2 \times \{y_0\}) = Q_n \times \{y_0\}$ を満たし、かつニット構造を持つとき、対 $(S, \mathcal{L})$ を次数 n の**ニット状曲面**という。

次数 n のニット状曲面の間の同値関係を、ニット構造を保つイソトピーで移りあうこととして定める。次のような [4] と関連する性質が成り立つ。

定理 1.3. 任意の $D^2 \times B^2$ 内にプロパーに埋め込まれた境界付き曲面は、ニット状曲面として表すことができる。

2 ニット状曲面のチャート表示

単純ブレイド状曲面は、円盤上のグラフ表示「チャート表示」を持つ [1]。そのチャート表示の拡張として、ニット状曲面のチャート表示が定義される。ニット状曲面を表す次数 n のチャートの局所的な同値変形「チャート変形」も得ることができる。詳しくは [3] を参照されたい。

次数 n のニット全体はモノイドを成し、それを D_n と表記すると D_n は次の表示を持つ。

$$D_n = \left\langle \begin{array}{c} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \\ \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}, \\ \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = e, \sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i = \tau_i, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, \tau_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \tau_j, (|i - j| = 1) \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i, \sigma_i \tau_k = \tau_k \sigma_i, \tau_i \tau_k = \tau_k \tau_i (|i - k| > 1) \end{array} \right. \right\rangle_{\text{monoid}}.$$

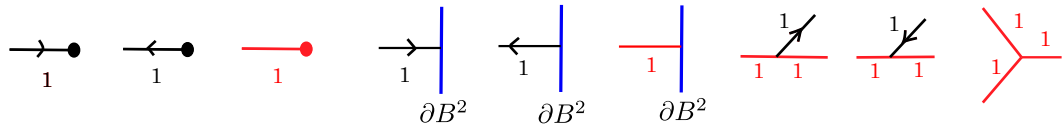


図 1 次数 2 のチャートの頂点

ニット状曲面はニットの時間変化が構成する曲面として解釈できるが、チャートはニットの変化をニットモノイド D_n の語の変化として表記するものである。

以下、特に次数 2 のときを考える。次数 2 のチャートは B^2 上に描かれたグラフであり、次数 1 または 3 の頂点と辺から成る。各辺にはラベル 1 が与えられており、各辺は向きを持つかまたは向きを持たない。さらに、各頂点は図 1 のようになっている。

曲面絡み目とは、 $\mathbb{R}^4$ 内に滑らかに埋め込まれた閉曲面である。 $\mathbb{R}^4$ 内に標準的に埋め込まれた射影平面いくつか、および $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ 内の 3 次元球体あるいは結ばっていないソリッドトーラスの境界として表される曲面いくつかから、それらの連結和として得られる $\mathbb{R}^4$ 内の曲面を**自明な曲面結び目**といい、自明な曲面結び目いくつかのスプリット和を**自明な曲面絡み目**という。次数 2 のニット状曲面 S があったとき、 $D^2 \times B^2$ を $\mathbb{R}^4$ 内に自然に埋め込むことによって S を $\mathbb{R}^4$ に埋め込み、次数 2 のブレイド σ_1^n の閉ブレイドの形をしている境界 ∂S に n 回半ひねりした帯を付け加えることによって $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面が得られるが、それを S の**特殊プラット閉包**と呼ぶ。

定理 2.1. 次数 2 のチャートで表されるニット状曲面の特殊プラット閉包は、自明な曲面絡み目である。

謝辞

本研究は JST 創発的研究支援事業、課題番号 JPMJFR202U の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] S. Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Math. Surveys and Monographs 95, Amer. Math. Soc., 2002.
- [2] J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math. **24** (1987) 745–758.
- [3] I. Nakamura, *Knotted surfaces constructed using generators of the BMW algebras and their graphical description*, arXiv: 2306.10479v1. (J. Yasuda との共著論文として改訂版を準備中。タイトルを *Surfaces in the 4-ball constructed using generators of knits and their graphical description* に変更予定。)
- [4] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983) 1–37.