

4次元多様体とゲージ理論

松本幸夫

2024/11/9

1 はじめに

皆様、私の80歳の誕生日をお祝いくださり、誠にありがとうございます。自分でも、このような日を（一応）元気に迎えることができるなどとはあまり思っておりませんでした。年をとると、社会的な役割はなくなりますし、それに伴って人と会話する機会も減ってきます。そんな時、昔一緒に勉強した方々とお会いすることができて、本当に幸せです。このような会を催してくださった上正明氏、大鹿健一氏、河澄響矢氏、大槻知忠氏をはじめ、お集まりくださった皆さまに篤く御礼申し上げます。

「4次元多様体とゲージ理論」という講演の題にしてしまいましたが、これはいまの時点で自分が一番気になっている分野であるからという理由だけで選んでしまった題名です。あとで考えてみますと、25分という講演時間に比べていささか大きすぎる題名でした。自分の持ち時間のなかでこの主題について何か意味ある講演ができとは思われませんので、もしかして何かそのような内容を期待されて来てくださったかたがいらっしゃいましたら、まことに申し訳ございません。この講演では、いままで私が興味を持ってきた数学について「個人的なまとめ」のようなことを述べて、「4次元多様体とゲージ理論」がそのなかでどのあたりに位置しているのか、考えてみたいと思います。

2 自分の数学のまとめ

修士課程を出たのは1969年のことでした。私の修士論文は、当時単連結なPL多様体について解かれていた「基本予想」を無限巡回群を基本群にもつ多様体に拡張したのですが、ほとんど同時に基本群になんらの制限を付けないKirby-Siebenmann理論[1]がでて、完全解決されてしまい、かなりショックでした。そして、なにか新しい方向を探さなければならなくなりました。

余次元2の手術理論

現在九州大学の名誉教授をされている加藤十吉（みつよし）先生が、当時プリンストンの研究所に滞在していました。加藤さんは私とは2歳しか年が違わなかったのですが、修士課程を出られる頃にはすでに2本も論文が印刷されているという活躍ぶりで、まぶしい先輩でした。（加藤さんの論文は、PLカテゴリーにおいてファイバーバンドルに対応するblock bundleの理論をC. P. Rourke - B. J. SandersonのAnnals論文と独立に創始したもので、加藤さんはそれらをprebundle

と名づけました。論文の出版は彼らより1年早かったと思います。) そのころ、加藤さんと一緒に「余次元2の(高次元)部分多様体の手術理論」を始めました。加藤さんとの共著[2]では単連結な多様体に限定して話を進めましたが、これを基本群に制限を付けない形で「余次元2の部分多様体の手術理論」に一般化したのが私の博士論文[3]になりました。内容は、余次元2の部分多様体を部分多様体として手術するときの障害群を「Seifert形式」を使って定式化したものです。定義は一般の基本群について与えましたが、実際の計算は簡単な場合についてやってみました。

そのあと、これに関連するいくつかの論文を書いているうち、偶然の思い付きで、2次元のトーラスと同じホモトピー型をもつコンパクトな4次元PL多様体であって、その内部に2次元のPLトーラスを含んでいない奇妙な4次元多様体 W^4 を見つけたので、これをアメリカ数学会のBulletinに投稿したら受け付けてもらえました([4])。証明は、いくつかの複素射影平面 CP^2 との直積をとって、高次元の手術理論に持ち込む方法ですが、結論としてはある4次元多様体とそのなかの2次元PL部分多様体に関する定理になります。そして、これが4次元多様体に興味をもつきっかけになりました。(考えてみれば、ほぼ50年前のことです。)

プリンストン研究所に滞在する(1976–1978)

もともとプリンストンの研究所には憧れていて、一度は行ってみたいものと思っていました。じつは、修士を卒業したあと研究所にアプリケーション・フォームを送ったのですが、その時は断られました。修士論文ひとつしか論文がない状態で申し込んだので、今から思うと、断られるのが当然だったのですが、そのときは私も妻もがっかりしました(私は結婚が早く、修士課程をでてまもなく結婚しました。指導教官だった東大の田村一郎先生に結婚式の仲人を頼みに行ったところ、「こんなに早く結婚するやつの気がしれない」と呆れられました。仲人役は引き受けてくれたのですが...)。そのあと、少し気分が落ち込んで、博士論文を書いたころも、就職した大学の用務を勤めるだけの毎日でしたが、日本に帰っていた加藤さんから、「何で早くプリンストンにアプライしないのだ」と発破をかけられ、2度目のアプライをしたのが1975年でした。それが運よく認められて、研究所に行けることになったのが1976年です。

その年の夏にスタンフォード大学でトポロジーの大きなシンポジウムがあつて、それに松本堯生氏と一緒に参加した後、単身プリンストンに行き、研究所のアパートで後から来る妻と5歳の娘の到着を待ちました。9月頃にはようやく一家が揃い、アメリカでの不慣れな生活がスタートしました。このころのことを当時一緒だった日本人数学者(と哲学者)のことも交えて書いたものがありますので、もしご興味がおありでしたらご覧ください([5])。そのころは、今から思うと信じられない感じですが、日本の大学に就職したまま、外国で2年間くらい滞在することも可能でした。ただ、プリンストンの研究所から2年間の滞在許可をもらうのはそれなりに大変でしたが、一応それも認められて、落ち着いて研究する環境が整ったのは滞在2年目の頃からでした。それから、W. Thurstonがプリンストン大学で3次元多様体とその上の幾何学についての講義を始めたのもこのころでした(もしかすると、前年かも知れません。記憶があいまいです)。毎週、大学に出かけて行ってThurstonの講義を聴きました。しかし、黒板に絵ばかり描いているような講義で、全く理解不可能でしたが、毎回配られるプリントをコピーして(航空便で)日本に送りました。当時はe-mailなどは存在しませんでしたので。

当時、アメリカ南部からきていたG. A. Venemaという人と共同研究するようになり、3次元多様体について成り立つデーレン補題が4次元の可縮な(コンパクトでない)多様体については成

り立たないという反例を見つけたので共著論文を書きました ([6])。またこのころ、スペインから来ていた J. M. Montesinos-Amilibia と仲良くなれたことも良かったです。彼も私も数学的な好みはほとんど似ていて、しかも両方とも英語がうまくなかったこともあって、自然に話すようになりました。彼は独身で、ときどき我が家で食事をして帰っていったことも仲良くなった理由の一つだと思います。

また当時、研究所には Siebenmann が滞在していて、1978 年の 5 月に、Montesinos と私のためにフランスの IHES に滞在することができるように取り計らってくれたこともありがたいことでした。

4 次元トポロジーの大発展

あとで 4 次元トポロジーに本質的な道具となったキャッソン・ハンドルの理論はこのころからきな臭さを増していて、Montesinos, Venema, W.C.Hsiang, P.Pao と私の 5 人でそれに関するセミナーを始めました。同じころ、M. Freedman がキャッソン・ハンドルを利用して次々に目覚ましい成果を挙げ始めていました。私が日本に帰った 1978 年の 8 月頃のトポロジーの状況はこのようなものでした。

そして、それから数年のうちに、4 次元トポロジーの大発展がはじまりました。

まず、M. Freedman が位相カテゴリーで 4 次元ポアンカレ予想を解いたこと、より一般的には単連結な 4 次元多様体の位相的な分類に成功したことに驚かされました ([7])。そして、ほぼ時を同じくして、S. Donaldson ([8]) の論文がでて、微分構造を持つ閉じた単連結な 4 次元多様体の交叉形式が正定値なら、それは標準的な対角形式に限る、ということが証明されて、これもショックでした。Donaldson の論文によってはじめてゲージ理論というものを知って、4 次元トポロジーをやるなら、これからはゲージ理論を知らなければならないと思って、一生懸命勉強し、自分でも大学で講義しました。(手許に、1985 年の講義ノートが残っています。) このころがゲージ理論への関心を持った最初です。具体的な S^4 の場合には、M. F. Atiyah-N. J. Hitchin-I. Singer ([9]) によって、 S^4 上の $SU(2)$ -バンドルの (反) 自己双対接続の「モジュライ空間」が開 5 次元円板であることが証明されていたので、まず、モジュライ空間に親しむべく、そのモジュライ空間に入っている自然な計量を明示的に計算しました。それが [10] です。Donaldson の理論の影響力は甚大で、それまで解決不可能に見えた問題が次々に解かれました。例えば、 $S^2 \times S^2$ の 2 次元ホモロジー類がいつ滑らかに埋め込まれた S^2 で表せるかという問題は Donaldson 理論を応用して久我健一氏によって解かれました ([11])。1990 年代に入って、Donaldson 理論と等価であると称する N. Seiberg と E. Witten の理論 (例えば [12]) が現れました。その理論のモジュライ空間は有限個の点であり、Donaldson 理論にでてくる 5 次元のモジュライ空間より簡単なため、多くの研究者が Seiberg-Witten 理論に向かいました。そこでもまた、多くの深い研究がなされましたが、有名な応用に古田幹雄氏の定理 ([13]) があります。古田氏は Seiberg-Witten 方程式そのものというよりむしろ、その方程式に対応する作用素を考えることによって、次の「10/8-定理」を証明しました。

定理 滑らかで閉じた 4 次元多様体 M がスピン構造を持ち、かつ第 2 ベッチ数 b_2 がゼロでなければ、不等式

$$b_2(M) \geq \frac{5}{4} |\text{sign}(M)| + 2$$

が成り立つ。

最近の上正明氏の本 ([14]) には、大発展した 4 次元多様体の理論が詳しく解説されています。

トーラスファイバー空間

話は少し戻りますが、Donaldson の理論が出てしばらくしたころ、ゲージ理論につよい憧れがある一方で、自分がこれから論文を書いていく分野としては、すこし難しすぎる印象をもちました。もう少し手作りっぽい方法で 4 次元多様体を研究して行くにはどうしたら良いかを考えたすえ、たどり着いたのは、曲面上の曲面バンドルの構造をもつ 4 次元多様体でした。単なるバンドルだけでは少し物足りないので、有限個の特異ファイバーを許すファイバー構造にまで拡張して考えることにしました。まず一般ファイバーがトーラスの場合を考えることにして、そのような対象を「トーラスファイバー空間」と呼んで、いくつか論文を書きました。代数幾何に出てくる楕円曲面のトポロジー版です。一番成功したのは、本来の楕円曲面の微分同相類の分類です。A. Kas と B. Moishezon が底空間が球面の場合にそのような分類定理を与えているので、底空間が一般の閉曲面の場合を考えました。ただし、特異ファイバーは一本以上あるが、多重ファイバーはないと仮定します。そして次のような定理を証明しました ([15])。

定理 2つの楕円曲面があり、それらの底空間の種数が等しく、全空間のオイラー数が等しければ、全空間は微分同相である。

証明にはモノドロミーの分類を詳しく考えなくてはならないので、とても難しく、印象としては自分が今まで証明した定理の中で、証明が一番難しかったと思います。

リーマン面の退化

プリンストンで知り合いになった Montesinos に呼ばれて、初めてマドリードに行ったのは 1988 年でした。実は、1984 年に行くことになっていたのですが、不注意からその年、大腿骨の「粉碎骨折」というのをやってしまいました。町の医者からは「一生車椅子だ」と言われたのですが、実に運の良かったことに、高校の同級生が虎の門病院の整形外科医をしていたので、彼の言葉によれば、当時の「最先端」の治療をしてもらって、歩けるようになりました。実は、マドリードに行くには行ったのですが、そのころ東大出版会から頼まれていた「多様体の基礎」という本を書いている最中で、数か月の滞在期間中、ほとんどその本を書いていた。(当時はワープロがなく、すべて原稿用紙に手書きでした。) Montesinos には申し訳なかったですが、ようやく書きあがって、いっしょにマドリードに来ていた妻に原稿用紙を持って帰ってもらって、最後の残された滞在期日に、「リーマン面の退化現象」に関する共同研究をスタートさせました。

この共同研究のため、後日また数か月間マドリードに呼んでもらって共著論文を書き上げました。長い長い論文になってしまって、タイプを打つのも大変ですが、当時のマドリードの数学教室の女性の事務員 (Srta. María Angeles Bringas) がやや旧式のタイプライターで打ち上げてくれました。

原稿は打ちあがったのですが、長さも長いし、どの雑誌に投稿してよいかもわからず、10 年以上「棚ざらし」状態でした。内容としては、「擬周期写像」というものを定義し、その共役類を分類したこと。そして、その共役類とホロモルフィックな特異ファイバーの位相的分類が全単射的に対応する、というものです。ただし、一般ファイバーの種数は 2 以上とします。

21 世紀になって、流石にどこかに投稿すべきだということになって、旧式のタイプをその頃

普通になっていた Tex を使って打ち直して, Springer の Lecture Notes に投稿したら, 運よく受け付けてもらえました. それが [16] です.

これは, いわば特異ファイバーの「局所理論」ですが, 最近, 足利正氏との共著論文 [17] で, この結果を大幅に拡張して, リーマン面のモジュライ空間上の「普遍退化族」が構成できました.

3 終わりの言葉

こうして, いままでいろいろ興味をもってきたことが一段落した感じがありますので, これからはこの講演の題名にしてしまった「4次元多様体とゲージ理論」という, 自分の中でずっと気になっている分野にもどって考えて行きたいと思います. しかし, もともと私はトポロジープロパーな人間で, 微分幾何的な知識にはかなり怪しいところがあります. 幸い, 学習院大学の山田澄生氏が協力を買って出て下さったので, これからいっぱいあるはず(?) の「自由時間」を使って, 「4次元多様体とゲージ理論」についていろいろと共同研究して行ければと思っています.

本日は, ご清聴ありがとうございました. 皆さまどうぞお元気で.

References

- [1] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 742 – 749.
- [2] M. Kato and Y. Matsumoto, *Simply connected surgery of submanifolds in codimension two*, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972) 586 – 608.
- [3] Y. Matsumoto, *Knot cobordism groups and surgery in codimension two*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **20** (1973) 253–317.
- [4] Y. Matsumoto, *A 4-manifold which admits no spine*, Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975) 467–470.
- [5] 松本幸夫, プリンストン研究所滞在記 (1976–78), 数理科学編集部編「数学の道しるべ」, サイエンス社, 2011 所収.
- [6] Y. Matsumoto and G. A. Venema, *Failure of the Dehn lemma on contractible 4-manifolds*, Invent. Math., **51** (1979) 205–218.
- [7] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982) 357 – 453.
- [8] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 279 – 315.
- [9] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. Singer, *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. **362** (1978) 425 – 461.
- [10] H. Doi, Y. Matsumoto and T. Matumoto, *An explicit formula of the metric on the moduli space of BPST-instantons over S^4* , A Fete of Topology, papers dedicated to Itiro Tamura, ed. by Y. Matsumoto, T. Mizutani and S. Morita, (1988) Academic Press.
- [11] K. Kuga, *Representing homology classes of $S^2 \times S^2$* , Topology **23** (1984), 133–137.
- [12] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994) 769 – 796.

- [13] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 279 – 291.
- [14] 上 正明・松本幸夫, 「4次元多様体, I, II」, 朝倉数学体系, 朝倉書店, 2022.
- [15] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology **25** (1986), 549 – 563.
- [16] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math. 2030, Springer (2011).
- [17] T. Ashikaga and Y. Matsumoto, *Universal degeneration of Riemann surfaces and fibered complex surfaces*, Essays in Geometry, Dedicated to Norbert A'Campo, ed. by Atanase Papadopoulos, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, EMS Press, (2023).