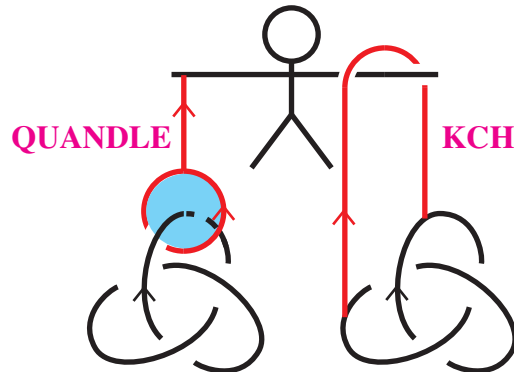


Homologies for 2-knots

松田 浩 (山形大学)

本稿では結び目接触ホモロジー $KCH(Knot\ Contact\ Homology)$ の組み合わせ的な定義を 2 次元結び目に拡張する 1 つの方法を紹介します。



1 次元結び目のホモロジー

結び目接触ホモロジーとは 結び目カンドルの仲間のようです。

結び目カンドルとは 左上図のような図形から定まる代数で、円板の部分が結び目射影図の交差点を通り過ぎる様子が二項演算として定められています。

結び目接触ホモロジーとは 右上図のように両端点が結び目射影図の弧または交差点に付いた赤い弧から定まる代数で、赤い弧の端点が結び目射影図の交差点を通り過ぎる様子が単項演算 (微分) として定められています。

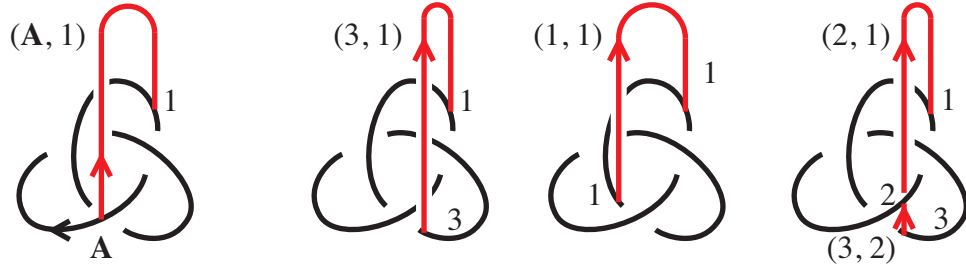
両端点が結び目射影図の弧に付いた赤い弧を次数 0 の元、
片方の端点が結び目射影図の弧、片方の端点が交差点に付いた赤い弧を次数 1 の元、
両端点が生交差点に付いた赤い弧を次数 2 の元と定め、テンソル代数を構成します。

下図に示す三葉結び目の射影図を使って微分の例を紹介します。

三葉結び目の射影図の各弧に 1, 2, 3, 交差点の 1 つに **A** と名前を付けます。



まず初めに 次数0 の元の微分による像は0 と定義します。



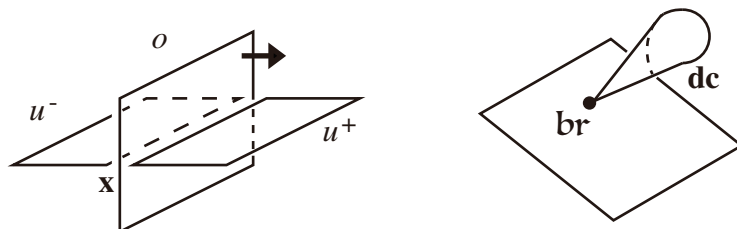
次に 上図左端に描いた交差点 A と弧 1 をつなぐ次数 1 の赤い弧 $(A, 1)$ の微分を紹介します。赤い弧の始点が弧 3 から弧 2 へ交差点 A を通り過ぎる様子として上図右 3 つの状態を考えます。右から 3 番目の図は弧 3 と弧 1 をつなぐ次数 0 の赤い弧 $(3, 1)$ 、右から 2 番目の図は弧 1 と弧 1 をつなぐ次数 0 の赤い弧 $(1, 1)$ 、を描いています。右端の図は弧 3 と弧 2 をつなぐ次数 0 の赤い弧 $(3, 2)$ と (省略していますが途中で上に引っかかっているつもりです)、弧 2 と弧 1 をつなぐ次数 0 の赤い弧 $(2, 1)$ を描いています。上図右 3 つを使って次数 1 の赤い弧 $(A, 1)$ の微分を $\partial(A, 1) = (3, 1) + (1, 1) - (3, 2) \cdot (2, 1)$ と定義します。右辺 3 番目の項は 2 つの元の積です。

このように ∂ を定義すると $\partial \circ \partial = 0$ が成立しホモロジー KCH_i を定義できます。($i = 0, 1, 2$) 結び目カンドルから基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ を得られることは知られていますが、同様に KCH_0 から $\pi_1(S^3 \setminus K)$ を得られることが知られています。

2 次元結び目のホモロジー

前節のホモロジーを (向き付けられた) 2 次元結び目に対しても拡張して定義したいです。2 次元結び目の射影図は有限個のシート、2 重線、ブランチ点、3 重点で構成されます。前節を真似てこれらをつなぐ赤い弧 (順序対) を生成元としテンソル代数を構成します。

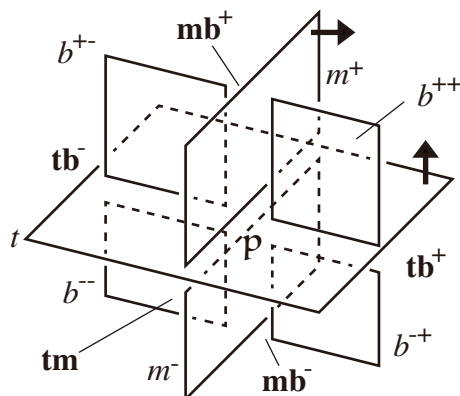
まず初めに 2 重線 $\mathbf{x}$ とシート j からなる順序対 $(\mathbf{x}, j)$ の微分を紹介します。左下図のように 2 重線 $\mathbf{x}$ の周りの上シートに o , 下シートの上側に u^+ , 下シートの下側に u^- と名前を付けます。(2 次元結び目の 2 重線) = (1 次元結び目の交差点) $\times \mathbb{R}$ と考えられるので、前節を真似て $\partial^{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}, j) = (u^-, j) + (u^+, j) - (u^-, o) \cdot (o, j)$ と定義します。($\varepsilon, \delta \in \{+, -\}$)



次にブランチ点 $\mathbf{br}$ とシート j からなる順序対 $(\mathbf{br}, j)$ の微分を紹介します。

前ページ右図のように ブランチ点 $\mathbf{br}$ につながる 2 重線を $\mathbf{dc}$ とします。

このとき $\partial^{\varepsilon\delta}(\mathbf{br}, j) = (\mathbf{dc}, j)$ と定義します。 ($\varepsilon, \delta \in \{+, -\}$)



次に 3 重点 $\mathbf{p}$ とシート j からなる順序対 $(\mathbf{p}, j)$ の微分を紹介します。

3 重点 $\mathbf{p}$ の周りの 2 重線、シートに上図のように名前を付けます。このとき

$$\begin{aligned} \partial^{--}(\mathbf{p}, j) = & (\mathbf{tb}^-, j) + (\mathbf{tb}^+, j) - (\mathbf{tb}^-, m^+) \cdot (m^+, j) \\ & - (\mathbf{mb}^-, j) - (\mathbf{mb}^+, j) + (\mathbf{mb}^-, t) \cdot (t, j) \\ & - (b^{--}, m^-) \cdot (\mathbf{tm}, j) - (b^{--}, \mathbf{tm}) \cdot (m^+, j) + (b^{--}, t) \cdot (t, \mathbf{tm}) \cdot (m^+, j) \end{aligned}$$

と定義します。

これらのように 3 重点、2 重線、ブランチ点、シートの順序対に対し ∂^{--} を定義すると

$\partial^{--} \circ \partial^{--} = 0$ が成立しホモロジー HR_i^{--} を定義できます。 ($i = 0, 1, 2, 3, 4$)

本稿では次数について紹介していませんが HR_0^{--} は 3 重点の情報を使いません。そのため

$$\mathrm{HR}_0^{--}(\text{スパン三葉結び目}) \cong \mathrm{HR}_0^{--}(\text{2 ツイストスパン三葉結び目})$$

が成立してしまいます。

しかし $\mathrm{HR}_0^{--}, \mathrm{HR}_1^{--}, \mathrm{HR}_2^{--}, \mathrm{HR}_3^{--}, \mathrm{HR}_4^{--}$ を全て同時に見るホモロジー HR^{--} について

$$\mathrm{HR}^{--}(\text{スパン三葉結び目}) \not\cong \mathrm{HR}^{--}(\text{2 ツイストスパン三葉結び目})$$

が成立し、2 つの 2 次元結び目を区別します。

3 重点を含む順序対の微分は ∂^{--} の他に $\partial^{-+}, \partial^{+-}, \partial^{++}$ を定義できます (講演の中で紹介します)。これらからホモロジー $\mathrm{HR}_i^{-+}, \mathrm{HR}_i^{+-}, \mathrm{HR}_i^{++}$ を定義できます。 ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) 実際に計算してみると 例えば

$$\mathrm{HR}^{--}(\text{2 ツイストスパン三葉結び目}) \not\cong \mathrm{HR}^{++}(\text{2 ツイストスパン三葉結び目})$$

などを得ます。