曲面上の高次ループ演算について*

河澄 響矢

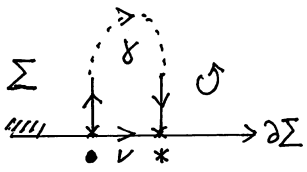
はじめに

Johnson 準同型像の全射性の新しい障害の発見を目指して、2017 年ごろから私は、高次ループ演算の探索を続けてきました。しかし、(1) well-defined にならない、(2) well-defined であっても値は消滅する、(3) well-defined かつ非消滅であっても既存の演算で書けてしまう、という三つの関門に阻まれて失敗の連続でした。 現時点では Johnson 準同型の全射性の障害への応用にはまだ遠いのですが、ようやく三つの関門を突破した演算が得られました。中途半端な結果で恐縮ですが、現状報告させていただきます。現在の自分にとって一番大事な研究課題について聞いていただきたいと思うからです。松本幸夫先生のおっしゃる「手作りの数学」は私の研究の重要な指針であり続けてきました。これまでにまして今回の研究は「手作り」だと思います。

10 月 6 日にアップロードした予稿に大きな、しかし、お粗末な間違いがありましたので差し替えます。申し訳ありません。2024 年 11 月 9 日記。

1. なぜループ演算を考えるのか?

空でない境界をもつ向きづけられた連結な曲面 Σ を考える。境界 $\partial\Sigma$ に 2 つの基点 $\bullet, * \in \partial\Sigma$ を下図のように少しズラしてとり、$\partial\Sigma$ に埋め込まれ向きを保つ弧 $\nu : ([0,1], 0, 1) \to (\partial\Sigma, \bullet, *)$ をとる。この弧 ν によって、基本亜群 $\Pi\Sigma(\bullet, *) := [([0,1], 0, 1), (\Sigma, \bullet, *)]$ を基本群 $\pi := \pi_1(\Sigma, \bullet)$ と同一視する。



$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。群環 $\mathbb{K}\pi$ を集合 $\{ab - ba;\ a, b \in \mathbb{K}\pi\}$ の生成する $\mathbb{K}$ ベクトル部分空間 $[\mathbb{K}\pi, \mathbb{K}\pi]$ によって商をとったもの

$$|\mathbb{K}\pi| := \mathbb{K}\pi/[\mathbb{K}\pi, \mathbb{K}\pi]$$

は trace space とも呼ばれるが、π の共役類全体の集合、すなわち自由ループの自由ホモトピー集合 $[S^1, \Sigma]$ の生成する自由 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}[S^1, \Sigma]$ に自然に同型である。この

*研究集会「多様体のトポロジーの進展」講演予稿, 2024 年 11 月 9 日.

trace space は Goldman 括弧積 [6] によって Lie 代数をなす。また、$|\mathbb{K}\pi|$ 上には（接束 $T\Sigma$ の自明化を一つ固定してえられる framed version [1] の） Turaev 余括弧積 [19] と合わせることで Lie 双代数の構造が入る。 Turaev 余括弧積の一つの起源として Turaev 自身 [19] によるループ演算 μ があり、μ の情報を落とすことによって Turaev 余括弧積がえられる。また、Goldman 括弧積も μ から導かれる。

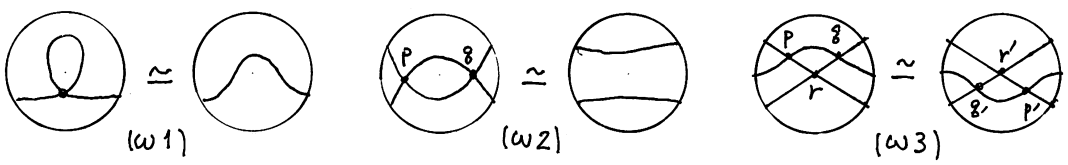
一方、河澄-久野 [10, 11, 13] により、添加イデアル $I\pi := \mathrm{Ker}(\mathrm{aug} : \mathbb{K}\pi \to \mathbb{K},\ \sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma\gamma \mapsto \sum_{\gamma\in\pi} a_\gamma)$ によって $|\mathbb{K}\pi|$ を完備化してえられる Lie 代数 $|\widehat{\mathbb{K}\pi}|$ には Σ の（写像類群の重要な部分群である）Torelli 群を自然に埋め込むことができ、この埋め込みは Johnson 準同型 [7] と等価である。Johnson 準同型の全射性の障害として、最初に認識されたのは森田 trace [14] であるが、その本来の姿が佐藤 trace [16] ないしは榎本-佐藤 trace [5] である。これらは代数的に構成されたが、Alekseev-河澄-久野-Naef [1, 2] が Goldman-Turaev Lie 代数の形式性が柏原-Vergne 問題 [8, 3] と等価であることを示すことによって、Johnson 準同型の全射性の障害としては榎本-佐藤 trace が Turaev 余括弧積と等価であることがわかっている。なお、森田 trace が Turaev 余括弧積から導出できることは遡って [12] で指摘している。

森田-逆井-鈴木 [15] による計算からも、Johnson 準同型の全射性の障害として榎本-佐藤 trace だけでは全く足りないことがわかる。以上を踏まえると、Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積とは違う写像類群同変なループ演算を見出すことができれば Johnson 準同型の全射性の新しい障害となることが期待される。ちなみに Turaev の μ-演算は Johnson 準同型の全射性の障害としては Turaev 余括弧積と等価である。さらに、柏原-Vergne 問題と Drinfel'd 結合子の密接な関連 [3] を考えると、新しいループ演算は他分野への広がりも期待できる。なお、種数 0 つまり pure braid 群については、Johnson 準同型の全射性の障害に対応する決定的な仕事として little disk operad を用いた Ševera-Willwacher [17] のものがある。

そこで新しい写像類群同変なループ演算を見つけたい。Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積が 1 つの交点から作られているのに対して、2 つ以上の交点の情報から導かれるループ演算を考える。これを高次ループ演算と呼んでいる。

2. ループ演算の構成の準備.

Goldman 括弧積および Turaev 余括弧積を含めループ演算を定義するには、generic なはめ込み、つまり、特異点が最悪でも横断二重点であるはめこみ、に対して定義された演算が以下の 3 種類の局所変形 $(\omega 1)$, $(\omega 2)$, $(\omega 3)$ で不変であることを示せばよい。それによって well-defined つまりホモトピー不変性が示される [6, pp.292-294] からである。



これらは絡み目の Reidemeister 変形に対応しており、$(\omega 1)$ は monogon ないし fishtail の生成消滅とよばれ、$(\omega 2)$ は bigon の生成消滅とよばれる。それぞれ cusp, tangent, triple

point の特異点に由来する変形であるため「小さい」変形であるとしてよい。以下の議論は、この事実のもとで行われる。

いきなり自由ループの演算つまり $|\mathbb{K}\pi|$ 上の $\mathbb{K}$-線型写像を考えるのは複雑すぎる。そこで Turaev [18] の μ-演算にならって基点つきループの演算つまり $\mathbb{K}\Pi\Sigma(\overset{\nu}{\cong}\mathbb{K}\pi)$ 上の $\mathbb{K}$-線型写像を考える。generic なはめこみ $\gamma:([0,1],0,1)\to(\Sigma,\bullet,*)$ をとる。$t_1,t_2\in[0,1]$ について $\gamma_{t_1,t_2}:[0,1]\to\Sigma$, $s\mapsto\gamma_{t_1,t_2}(s):=\gamma((1-s)t_1+st_2)$, と表し、$\Gamma_\gamma$ を γ の自己交点全体の集合とする。γ は generic なはめ込みだから、Γ_γ は有限集合であり、任意の $p\in\Gamma_\gamma$ について $0<\exists!t_1^p<\exists!t_2^p<1$, $\gamma(t_1^p)=\gamma(t_2^p)=p$ となり、局所交叉数 $\varepsilon_p:=\varepsilon(\dot\gamma(t_1^p),\dot\gamma(t_2^p))\in\{\pm1\}$ が定まる。また、

$$\mu_p(\gamma):=\gamma_{0t_1^p}\gamma_{t_1^pt_2^p}\gamma_{t_2^p0}-1\in I\pi(\subset\mathbb{K}\pi) \tag{1}$$

と表す。$\delta\in\pi$ と $p\in\Gamma_\gamma$ について $\mu_p(\delta\gamma\delta^{-1})=\delta\mu_p(\gamma)\delta^{-1}$ である。ここで、点 p が monogon の頂点ならば、monogon を構成する $\gamma_{t_1^pt_2^p}$ は自明だから $\mu_p(\gamma)=0$ である。そこで、$\mu_p(\gamma)$ を使った以下の構成では $(\omega1)$ について確認する必要はない。また、$p,q\in\Gamma_\gamma$ が、ある bigon の 2 つの頂点ならば次がなりたつ

$$\mu_p(\gamma)=\mu_q(\gamma)\in I\pi. \tag{2}$$

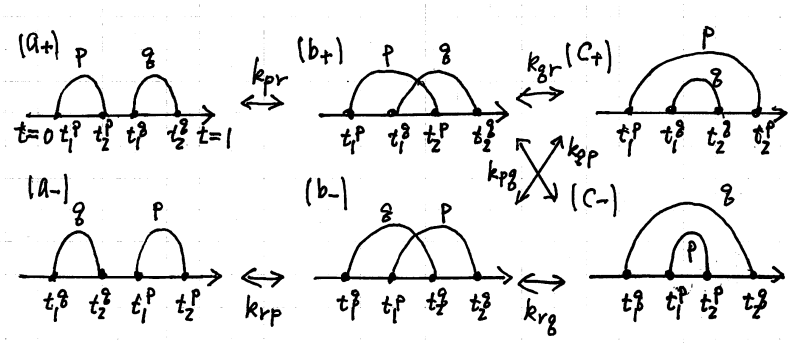
以上の準備のもとで

$$\mu(\gamma):=\sum_{p\in\Gamma_\gamma}\varepsilon_p\mu_p(\gamma)\in I\pi \tag{3}$$

は well-defined、つまりホモトピー不変であって、写像 $\mu:\pi\overset{\nu}{\cong}\Pi\Sigma(\bullet,*)\to I\pi$ が定まる。その線型拡大 $\mu:\mathbb{K}\pi\to I\pi$ の $(I\pi)^3$ への制限は Turaev [18] の μ-演算の framed version に一致する。そこで、これを Turaev の μ-演算と呼ぶことにする。

3. 構成の方針.

ここからが本論である。Turaev の μ-演算を高次化したい。$p,q\in\Gamma_\gamma$ が $p\neq q$ であって $t_1^p<t_1^q<t_2^p<t_2^q$ をみたしていれば下図の (b_+) の線型コード図式を書くことができる。$p=q$ の場合は 1 本のコードに p と q が重複して添えられているものとする。これらは $n(\geq3)$ 個の元 $p_1,p_2,\dots,p_n\in\Gamma_\gamma$ についても同様である。とくに $n=2$ かつ $p\neq q$ の場合、p,q を通る時刻 $t_1^p,t_2^p,t_1^q,t_2^q\in\,]0,1[$ の配置は以下の 6 通りの線型コード図式で表される



図中の矢印 $\overset{k_{st}}{\longleftrightarrow}$ は後述の $(\omega3)$ での隣接関係を表す。これらは退化（degeneration）と再生（regeneration）で写り合っている。

ここでは「高次ループ演算」として次のようなものを考える

$$h(\gamma) := \sum_{s_1,s_2,\dots,s_n\in\Gamma_\gamma} h_{s_1s_2\cdots s_n}\mu_{s_1}(\gamma)\otimes\mu_{s_2}(\gamma)\otimes\cdots\otimes\mu_{s_n}(\gamma)\in(\mathbb{K}\pi)^{\otimes n}. \tag{4}$$

ここで係数 $h_{s_1s_2\cdots s_n}$ は、交点 $s_1,s_2,\dots,s_n\in\Gamma_\gamma$ の定める線型コード図式と局所交叉数 $\varepsilon_{s_1},\varepsilon_{s_2},\dots,\varepsilon_{s_n}\in\{\pm1\}$ だけから決まるものとする。このように定めた演算 h は、well-defined となったあかつきには自動的に曲面 Σ の写像類群の作用で同変となる。

まず、$n=1$ の場合は $(\omega2)$ での不変性から、このような h は Turaev の μ のスカラー倍に限られることがわかる。

残念な結果として、(4) のテンソル積 $\otimes$ を外積 $\wedge$ に直したものは、任意の $n\geq2$ について 0 しか well-defined ではない。また、もとのテンソル積のままや対称積に置き換えたものでも $n=2,3$ の場合は Turaev の μ-演算から、Hopf 代数 $\mathbb{K}\pi$ の余積をつかって得られる演算しか得られない[1]。これらの事実は、一般に、$n(\geq3)$ 交点に対応する線型コード図式の任意の 2 つは退化（degeneration）と再生（regeneration）で写り合う事実からわかる。言い換えれば、n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は隣接互換によって生成されるからである。（以上が 10 月 6 日のヴァージョンの誤りです。0 ベクトルを m 個もってきて線型結合を作っても 0 次元ベクトル空間にしかなりません。お恥ずかしいことです。）

これらの残念な事実は局所 move $(\omega3)$ での不変性をうまく取り込めていないことによる。それを議論する前に、$(\omega2)$ での不変性について見ておく。

4. $(\omega2)$ **での不変性.**

(4) の演算はすでに無意味であるのだが、説明を簡単にするために $n=2,3$ の場合にこの演算の $(\omega2)$ 不変性の意味するところを見ておく。

まず、$n=2$ とする。$p,q\in\Gamma_\gamma$ が、ある「小さい」bigon の 2 つの頂点であって $\varepsilon_p=-1$, $\varepsilon_q=+1$ であるとする。この bigon を外したあとのはめ込みを γ' とする。$\Gamma_\gamma=\Gamma_{\gamma'}\amalg\{p,q\}$ だから (2) を使って $\Gamma_\gamma=\Gamma_{\gamma'}\amalg\{p,q\}$ だから (2) を使って

$$\begin{aligned}
&h(\gamma)-h(\gamma')\\
&=\sum_{r\in\Gamma_{\gamma'}}(h_{rp}+h_{rq})\mu_r(\gamma)\otimes\mu_p(\gamma)+\sum_{s\in\Gamma_{\gamma'}}(h_{ps}+h_{qs})\mu_p(\gamma)\otimes\mu_s(\gamma)\\
&\quad+(h_{pp}+h_{pq}+h_{qp}+h_{qq})\mu_p(\gamma)\otimes\mu_p(\gamma)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\dim H_1(\Sigma;\mathbb{K})\geq2$ ならば、$h_{rp}+h_{rq}=h_{ps}+h_{qs}=0$ でなければならない。$\varepsilon_p=-\varepsilon_q$ だから、$r,s\in\Gamma_\gamma$, $r\neq s$, に対応する線型コード図式で決まる値 $e_{rs}\in\{a_\pm,b_\pm,c_\pm\}\subset\mathbb{K}$ が存在して

$$h_{rs}=\varepsilon_r\varepsilon_s e_{rs} \tag{5}$$

と表される。h_{pp} と h_{qq} は、それぞれ局所交叉数 ε_p, ε_q によって決まるものと仮定しているから、$h_{pp}=h_-$, $h_{qq}=h_+$ と表すと、(5) により $h_{pp}+h_{pq}+h_{qp}+h_{qq}=-e_{pq}-e_{qp}+h_++h_-$

[1] これらの事実は $n\geq4$ でもなりたつと思われるが、線型コード図式におけるコードの重複を処理するのが面倒なので実行していない。

であるが、これを 0 にするためには $e_{pq}+e_{qp}=h_+ + h_-$ とすればよい。bigon の 2 頂点の定める線型コード図式は $(b_\pm)$ と $(c_\pm)$ だから、結局、

$$b_+ + b_- = c_+ + c_- = h_+ + h_- \tag{6}$$

という関係式がえらえる。以上をまとめると、係数 h_{rs} は条件 (5) と (6) の下では $(\omega 2)$ 不変である。

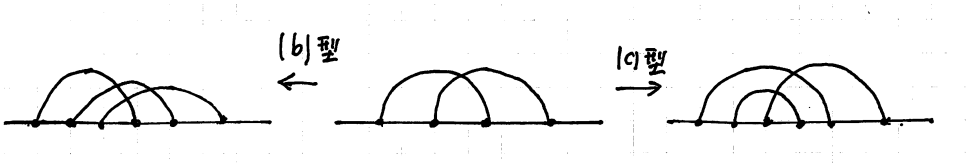
$n=3$ について同じ議論を実行すると、$s_1, s_2, s_3 \in \Gamma_\gamma$ に重複がないとき、これらの交点の定める線型コード図式だけできまる係数 $e_{s_1s_2s_3}$ によって $h_{s_1s_2s_3} = \varepsilon_{s_1}\varepsilon_{s_2}\varepsilon_{s_3} e s_1 s_2 s_3$ と表され、$\varepsilon_{s_2} h_{s_2 s_1 s_1}$ は $s_1, s_2 \in \Gamma_\gamma$ の定める線型コード図式と s_2 の場所（いまの場合 1 番目）と局所符号数 ε_{s_1} だけで決まることがわかる。このことを

$$h_{s_1s_2s_3} = \varepsilon_{s_2} e_{s_1s_2}^{(1,\varepsilon_{s_1})}$$

と書くことにする。s_2 の場所が 2, 3 番目も同様である。さらに、条件式

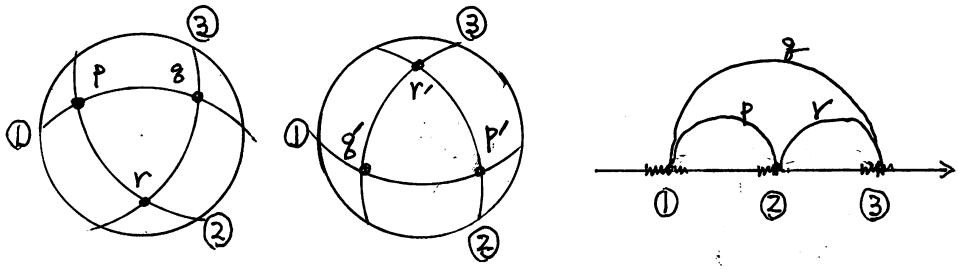
$$e_{ps}^{(1,+)} + e_{ps}^{(1,-)} = e_{spq} + e_{sqp}, \quad e_{ps}^{(2,+)} + e_{ps}^{(2,-)} = e_{psq} + e_{qsp}, \quad e_{ps}^{(3,+)} + e_{ps}^{(3,-)} = e_{pqs} + e_{qps} \tag{7}$$

もえられる。左辺に現れる 2 交点の線型コード図式のうち p に対応するコードを doubling したものが右辺に現れている。bigon の 2 頂点の線型コード図式は、先に述べた (b) 型と (c) 型に限る。下図は真ん中線型コード図式の左側の線型コードを（上式の p に対応するものとして）doubling する 2 つのやり方を表している



5. $(\omega 3)$ **での不変性.**

もとにもどって (4) の形の演算がうまくないのは、$(\omega 3)$ での不変性を、議論にうまく織り込めていないからである。ループ γ は $(\omega 3)$ の小さな円板を 3 回通過する。下図のように、1 番目のセグメントと 2 番目のセグメントの交点を p または p'、1 番目のセグメントと 3 番目のセグメントの交点を q または q'、2 番目のセグメントと 3 番目のセグメントの交点を r または r' とする。$\mu_p(\gamma)=\mu_{p'}(\gamma)$, $\mu_q(\gamma)=\mu_{q'}(\gamma)$, $\mu_r(\gamma)=\mu_{r'}(\gamma)$, $\varepsilon_p=\varepsilon_{p'}$, $\varepsilon_q=\varepsilon_{q'}$ および $\varepsilon_r=\varepsilon_{r'}$ がなりたつ。



このとき、上図の右側の考察から

$$\mu_q(\gamma) = \mu_p(\gamma) + \mu_r(\gamma) + \mu_p(\gamma)\mu_r(\gamma) \tag{8}$$

がなりたつ。この関係式 (8) を生かす必要がある。

はじめて見つけた非自明な例は以下の通りである。$\iota : \mathbb{K}\pi \to \mathbb{K}\pi$ を $\gamma \in \pi$ について $\iota(\gamma) := \gamma^{-1}$ とおいて定める反自己同型（antipode）とする。このとき、well-defined な写像 $h : \Pi\Sigma(\bullet, *) \to |\mathbb{K}\pi|$ が

$$h(\gamma) := \sum_{s_1, s_2 \in \Gamma_\gamma} h_{s_1 s_2} |\iota(\mu_{s_1}(\gamma))\mu_{s_2}(\gamma)|,$$

$$h_{s_1 s_2} := \begin{cases} 0, & \text{if } s_1 = s_2 \text{ or } (s_1 \neq s_2 \text{ and } (e_{s_1 s_2}) = (c_\pm)), \\ \varepsilon_{s_1}\varepsilon_{s_2}, & \text{if } s_1 \neq s_2 \text{ and } (e_{s_1 s_2}) = (a_+) \text{ or } (b_+), \\ -\varepsilon_{s_1}\varepsilon_{s_2}, & \text{if } s_1 \neq s_2 \text{ and } (e_{s_1 s_2}) = (a_-) \text{ or } (b_-) \end{cases}$$

によって定義される。これは $(c_\pm)$ と $(a_\pm)$ の値が異なるので Turaev の μ-演算では表されないが、同時に、自由ループには落ちない。

別のやり方を考える。関係式 (8) を $\mu_q(\gamma) \equiv \mu_p(\gamma) + \mu_r(\gamma) \pmod{(I\pi)^2}$ とみなす。完備群環 $\widehat{\mathbb{K}\pi}$ に値をもつ演算 $h : \Pi\Sigma(\bullet, *) \to \mathbb{K}\pi$ を考える

$$h(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Gamma_\gamma} h_{s_1 s_2 \ldots s_n} \mu_{s_1}(\gamma)\mu_{s_2}(\gamma) \cdots \mu_{s_n}(\gamma) \in \widehat{\mathbb{K}\pi}.$$

これを $m \geq 3$ について順番に $\mathrm{mod}(I\pi)^m$ で打ち切って考える。最初の $m = 3$ では 4 次元あり、うち μ で表されるものは 2 次元あるから、残り 2 次元分新しい。現在 $m = 4$ について計算中である。（未了: 2024 年 11 月 9 日）。

参考文献

[1] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, Adv. Math. **326** (2018), 1–53.

[2] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, arXiv:1804.09566v3.

[3] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[4] J. Conant, The Johnson cokernel and the Enomoto-Satoh invariant, Alg. Geom. Topol., **15** (2015) 801–821.

[5] N. Enomoto and T. Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, Algebr. Geom. Topol., **14** (2014), 627–669

[6] W. M. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface groups representations, Invent. math., **85** (1986), 263–302

[7] D. Johnson, A survey of the Torelli group, Contemporary Math. **20** (1983), 165–179

[8] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. **47** (1978), no. 3, 249–272.

[9] N. Kawazumi, Some algebraic aspects of the Turaev cobracket, Topology and Geometry, ed. A. Papadopoulos, EMS Publishing House, Zurich, 329–356 (2021)

[10] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum Topology **5**(2014), 347–423

[11] N. Kawazumi and Y. Kuno, Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces, preprint, arXiv:1109.6479v3 (2011)

[12] N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersection of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), no. 6, 2711–2762.

[13] N. Kawazumi and Y. Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, in: A. Papadopoulos (Ed.), Handbook of Teichmüller Theory, vol. V, EMS Publishing House, Zurich (2016), 97–165.

[14] S. Morita, Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Math. J. **70**(1993), 699–726

[15] S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki, Structure of symplectic invariant Lie algebras of symplectic derivation Lie algebras, Adv. Math., **282**(2015), 291–334

[16] T. Satoh, On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group, J. Pure Appl. Alg., **216**(2012), 709–717 .

[17] P. Ševera and T. Willwacher, Equivalence of formalities of the little discs operad, Duke Math. J. **160** (2011), no. 1, 175–206.

[18] V. G. Turaev, Intersections of loops in two-dimensional manifolds, Math. USSR Sbornik, **35**(1979), 229–250

[19] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup., **24** (1991), 635–704

かわずみ なりや
東京大学大学院数理科学研究科,
153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1,
kawazumi@ms.u-tokyo.ac.jp