

松本幸夫先生の満80歳をお慶び申し上げます

レクタンギュラーダイアグラムの基本変形について

安藤龍郎（日本女子大学学術研究員），田口睦実（日本女子大学卒業生）との共同研究

林忠一郎

〒112-8681 東京都文京区目白台2-8-1 日本女子大学理学部数物情報科学科

hayashic@fc.jwu.ac.jp

要約

同じ link の 2 つの rectangular diagram は有限回の Cromwell move で移りあうことを正確に証明する。特に, Reidemeister move や 2 つの rectangular diagram を繋ぐ平面の ambient isotopy が Cromwell move で実現できることを示す。

1. 序

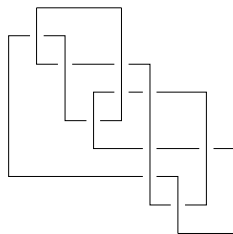


FIGURE 1. rectangular diagram

本稿では knot は 1-component の link として link に含める。同じ link を表す平面上の 2 つの link diagram が有限回の Reidemeister move で移りあうという定理は結び目理論の基礎をなしている ([1], [6] 参照). *rectangular link diagram* は *grid diagram* と呼ばれるが, 平面上の link diagram で, 縦線と横線を交互に繋げた形をしており, 同一直線上に 2 つ以上の縦線や横線が無く, 各交差点では縦線が横線の上を通っているもののことである (図 1). 縦座標や横座標の $\mathbb{R}^1$ の同相写像 (狭義単調増加関数) による変換をしても同じ rectangular diagram と見なす。次の定理が Cromwell により提唱され, 良く知られ, [5] などの重要な論文で応用されている。(ただし, Cromwell の論文は rectangular diagram というよりは, それとほぼ同等の arc presentation を扱っている。)

定理 1.1. (Theorem in page 45 in [2], see also Proposition 4 in [3]) D_1, D_2 を同じ link を表す rectangular link diagram とすると, D_1 に有限回の Cromwell move を上手く適用すると, D_2 に変形することができる。

Cromwell move の定義は後述する。Dynnikov もこの定理の証明を書いているが, sketch proof であることを明記している。

2 つの論文の証明は, 2 つの「互いに ambient isotopic だが rectangular diagram としては異なるもの」をどのようにして有限回の Cromwell move で繋ぐか説明していない。(Dynnikov の論文の証明には少しその記述があり, 「merge と divide が必要になる場合もある」, 「重ならない 2 本の縦線または 2 本の横線が一直線上にあるときは exchange 変形を使う」と書かれており, さらに, 交差点の周りの 180° 回転への対処法が書かれている。)

Cromwell の論文の証明は, arc presentation を closed braid に変形して (closed braid は arc presentation の特殊なものと考えることができる), closed braid の基本変形である Markov 変形が Cromwell 変形で実現できることを示す方針をとっている。しかし, arc presentation として特殊な形の closed braid に対してのみ, Markov 変形を Cromwell 変形で実現できることを証明していて, 全ての場合を網羅していない。

Dynnikov の論文の略証明は, 特殊な 1 角形, 2 角形, 3 角形領域における Reidemeister 変形が有限回の Cromwell move で実現できることを示しているが, やはり全ての場合を網羅していない。(ambient isotopy

が Cromwell move で実現できることを言うてあげれば、特殊な形の Reidemeister 変形のみ考えれば良さそうだが、1, 2, 3 角形がその特殊な形になっているような rectangular diagram で、元の rectangular digram と ambient isotopic になっているものが存在することを証明しなければいけなくなる.)

本稿では任意の Reidemeister move と任意の ambient isotopy の Cromwell move による実現方法を与える (それぞれ第 2 節と第 3 節) .

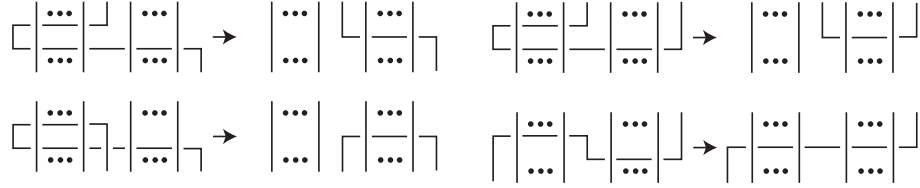


FIGURE 2. horizontal merge moves

Cromwell move には exchange move と merge move と divide move の 3 種類がある. まず, merge は図 2 に図示されている. 2 つの横線がただ 1 つの同一の縦線と端点を共有していて, それら 2 つの横線の縦座標の間には他の横線が存在しないとき, 縦線を短くして横線たちを近づけ, ついにはそれら 3 本を 1 本の横線に融合する操作である. 新しい横線の端点の横座標は消えた縦線と共有しなかった「横線の端点たち」と同じになる. これを *horizontal merge move* と呼ぶ. *vertical merge move* も同様に定義される. merge move は縦線と横線を 1 本ずつ減らす. *divide move* は merge move の逆変形であり, 縦線と横線を 1 本ずつ増やす.

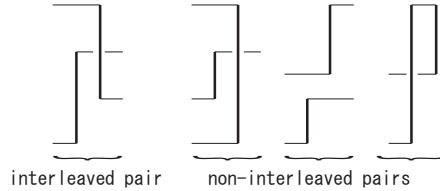


FIGURE 3. Interleaved pair and non-interleaved pairs

exchange move の説明のために言葉を 1 つ導入する. 2 つの縦線が *interleaved* であるとは, それらの端点の縦座標が交互になっていることである. どちらかの縦線の両端点の縦座標の間にもう一方の縦線の端点の縦座標が 1 つも無いときは, *non-interleaved* であると言う (図 3). 横線についても同様に定義する.

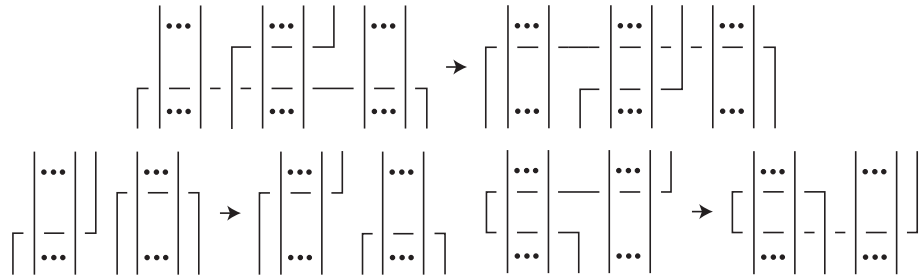


FIGURE 4. horizontal exchange moves

exchange move は図 4 に図示されている. 2 本の non-interleaved な横線たちの間の縦座標の高さに他の横線が無いとき, それらの高さを入れ替える変形を *horizontal exchange move* と呼ぶ. その横線たちに繋がる縦線は高さの入れ替えに応じて伸ばしたり縮めたりする. *vertical exchange move* も同様に定義される.

2. REIDEMEISTER 変形の CROMWELL 変形による実現

この節では Reidemeister 変形を有限回の Cromwell 変形で実現する. 正確には, 以下の定理を示す.

定理 2.1. D_1 を rectangular link diagram とする. D_2 を D_1 から 1 回の Reidemeister move で得られる link diagram とする. (D_2 は rectangular とは限らないことに注意せよ.) このとき, D_2 と平面上で ambient isotopic な rectangular link diagram で, D_1 から Cromwell move を有限回適用して得られるものが存在する.

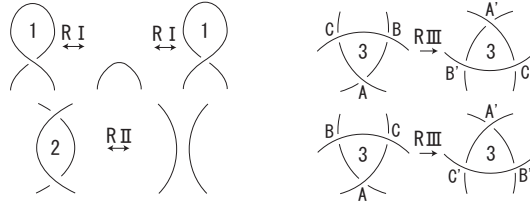


FIGURE 5. RI, RII, RIII 変形

Reidemeister 変形は RI, RII, RIII の 3 つの変形があり, それぞれ 1 角形領域を作ったり消したりする変形, 2 角形領域を作ったり消したりする変形, 3 角形領域に沿って 1 つの辺の紐を動かし, 頂点 (交差点) を通り越させて, 新しい 3 角形領域を作る変形である (図 5). ただし, 交差点の上下には図のように制限があることに注意せよ.

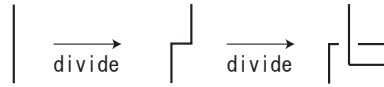


FIGURE 6. monogon を作る RI 変形の実現

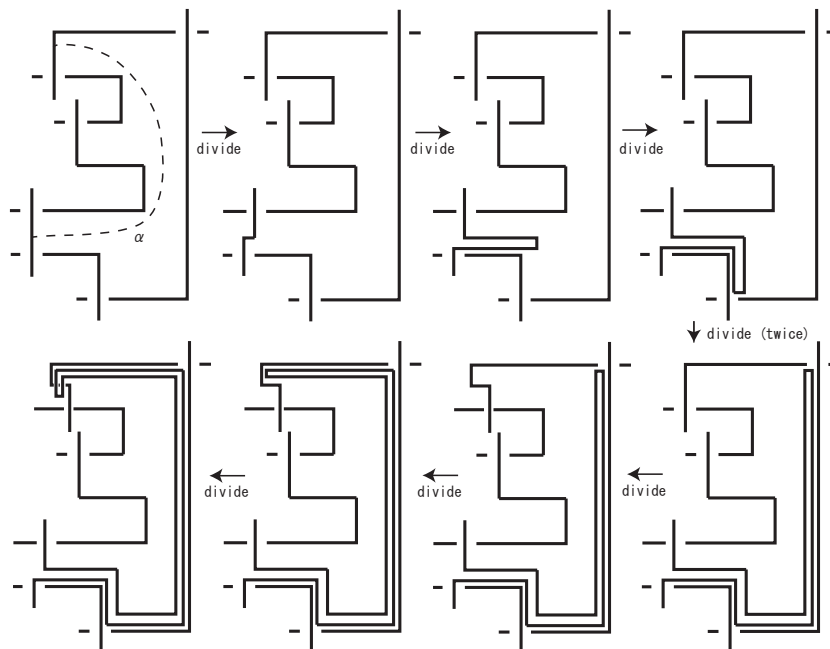


FIGURE 7. bigon を作る RII 変形の実現

証明：まず、図 6, 7 のように、1 角形を作る RI 変形や 2 角形を作る RII 変形を Cromwell 変形によって実現できる。図 6 を左右対称変換、上下対称変換、 90° 回転と全ての交差点の上下反転、それらの合成変換をしたものを考えると、RI 変形の全てのパターンが網羅できる。以下、これらの変換について同様の扱いとする。一般に、2 角形を作る RII 変形は 1 つの領域 R 内の辺に端点を持つ properly embedded arc α に沿って片方の辺を引き延ばして、もう片方の辺の上か下を通り越させる操作である。変形前の diagram が rectangular の場合、 R の辺は縦線と横線を繋げてできているので、 α の両端点をつなぐ R の境界の線と平行に辺を引き延ばすのが論理的には分かり易い。新しく作る 2 角形の交差の上下を調整するために、 α のもう一つの端点を含む縦線か横線をその端点の辺りで divide しておいてから、引き延ばした先端をその辺に交差させる場合もある。

次に、1 角形を消す RI 変形、2 角形を消す RII 変形と RIII 変形を同時に考える。 F を RI, RII, または RIII 変形を適用する D_1 の 1 角形、2 角形、または 3 角形領域とする。何角形であるかは F が接する D_1 の crossing の個数である。この証明では F の境界サークルの縦線と横線が繋がることも角と呼ぶことにする。角には F の内角が 90° の凸角と 270° の凹角の 2 種類がある。凹角は crossing にはなり得ないので、crossing は必ず凸角のところにある。crossing でない凸角も有り得る。

F が接する凹角の個数に関する数学的帰納法によって示す。帰納法のファーストステップの前に次の主張を示しておく、後の議論が簡単になる。

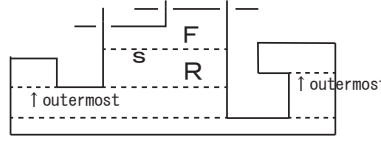


FIGURE 8. 同じ辺上に両端点を持つ横線

Claim 2.2. 図 8 のように、 F 内の properly embedded な縦線または横線 s で、次の 2 つの条件 (a), (b) を両方とも満たすものが存在するとする。

- (a) s は F の同じ辺 e に両端点を持つ。ただし、ここでの「辺」とは F の境界のサークルを crossing で切って得られる線分の 1 つのこととする。
- (b) s の端点を端点とする e の部分弧を e' とする。サークル $s \cup e'$ が囲む F の部分円盤を R とすると、 R は少なくとも 1 つの凹角に接する。

このとき、Cromwell 変形で F が接する凹角を減らせる。正確に言うと、有限回の Cromwell move をうまく適用して以下の 2 つの条件 (1), (2) を満たすように変形できる。

- (1) D_1 と変形後の rectangular link diagram D'_1 は平面上で ambient isotopic である。
- (2) F に対応する D'_1 の面は F よりも接している凹角が少ない。

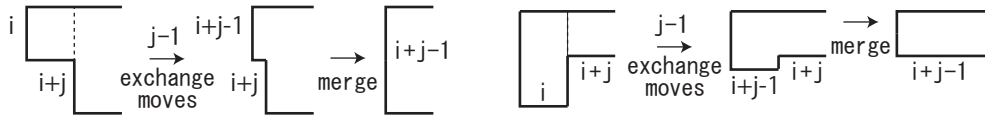


FIGURE 9. Outermost な縦線付近での Cromwell move

Claim 2.2 の証明： 図 8 のように、 R に接する全ての凹角から s と平行な線を引く。 R 上 outermost な線 s' とその outermost disk R' の組を 1 つ選ぶのだが、ただし、 s 自身が凹角を 1 つの端点とし、 R が他の凹角と接さない場合は $s' = s, R' = R$ とし、それ以外の場合は R' が s と接さないように選ぶ。

outermost arc と outermost disk のペア s' と R' には 2 つのパターンが考えられる。 s' が 4 辺形 R' のちょうど一辺になっている場合と、 s' が R' の一辺の全体ではなく、部分弧になっている場合がある。いずれの場合も、図 9 のように Cromwell 変形を適用すれば、 F が接する凹角の数を減らすことができる。□ (Claim)

定理の証明に戻る. 帰納法のファーストステップとして, F が接する凹角が 0 または 1 個の場合を考える. F の形は図 10 に描いたものに限られ, R 変形の Cromwell 変形による実現方法は図 11 に描いてある. 凹角が 1 個の場合, 図 11 (4), (5) 以外のパターンの場合には Claim 2.2 を使って凹角を減らし, 凹角が 0 個の場合に帰着させる. 図 11 (4), (5) では, divide によって F を凹角が 0 個の「RII や RIII が適用可能な 2 角形や 3 角形」たちに分割し, 凹角が 0 個の場合に帰着させる. 以上で, 帰納法のファーストステップが完了した.

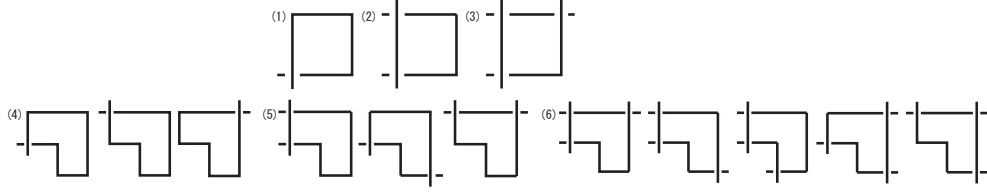


FIGURE 10. 凹角が 1 個以下の 1, 2, 3 角形

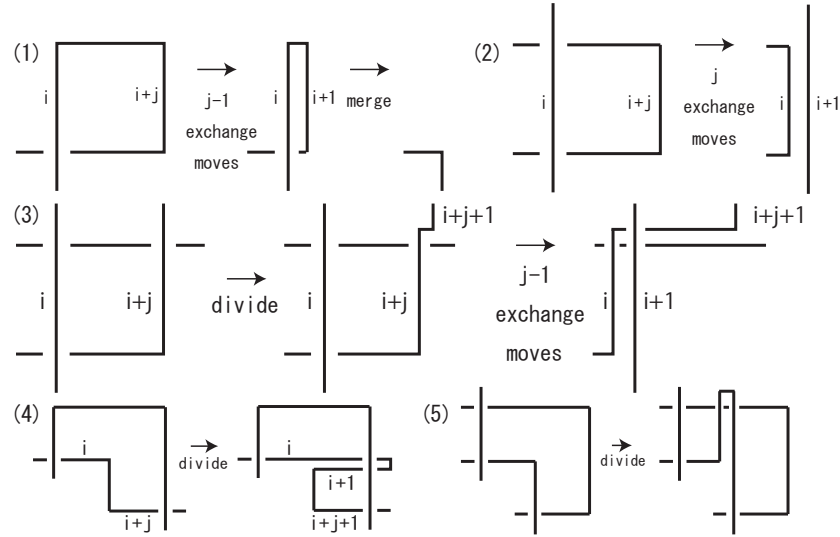


FIGURE 11. 凹角が 1 個以下の場合の RI, RII, RIII 変形

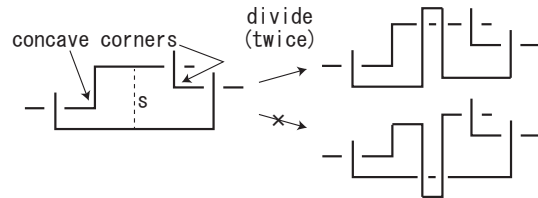


FIGURE 12. 凹角が 2 つ以上ある場合

凹角が 2 つ以上ある場合を考える. F 内の properly embedded な縦線か横線 s で, 凸角や凹角とは接せずに, 凹角を分け隔てるものが存在する. s の両端点が F の同じ辺上に有る場合, Claim 2.2 を使って凹角を減らし, 数学的帰納法の仮定によって RI, RII, RIII 変形が実現できる. s の両端点が F の同じ辺上にはない場合, 図 12 のように変形する. この変形は図 13 のように divide を 2 回続けて適用することによって実現される. s の端点の一方のところで, その点を含む縦線または横線 (図では横線) を divide し, さらに新しく生じ

た s と平行な縦線または横線（図では縦線）を s に沿って divide する．図 12 のように、 s のどちらの端点でこの変形を行うかによって、交差点の上下が変わることに注意せよ．この操作で生じる新しい 2 角形領域の一つが RII 変形可能になるように変形箇所を選べば、自動的にもう一つの 2 角形領域や 3 角形領域も RII や RIII が可能になる．この操作で凹角が減り、数学的帰納法によって定理が従う． $\square$

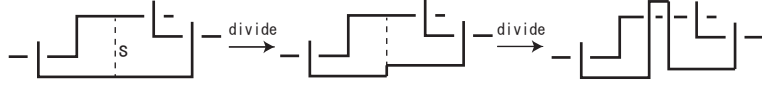


FIGURE 13. Cromwell 変形の適用方法（凹角が 2 つ以上ある場合）

3. AMBIENT ISOTOPY の CROMWELL 変形による実現

この節では、rectangular diagram が乗っている平面の ambient isotopy が、Cromwell 変形で実現されることを示す．正確には、以下の定理を示す．

定理 3.1. 平面上で ambient isotopic な 2 つの rectangular link diagram に対して、一方に有限回の Cromwell move をうまく適用してもう一方に変形することができる．

前節の定理 2.1 とこの定理を合わせて、定理 1.1 が得られる．（実際、2 つの rectangular diagram D_1 と D_2 が同じ link を表すとき、 D_1 を有限回の Reidemeister 変形で D_2 に変形できるので、定理 2.1 を用いて、 D_1 を有限回の Cromwell 変形で D_2 と ambient isotopic な rectangular diagram D'_2 に変形できる．続けて、定理 3.1 によって D'_2 は有限回の Cromwell 変形で D_2 に変形できる．）

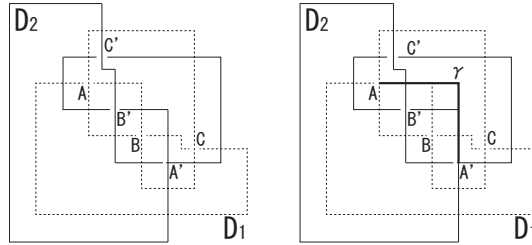


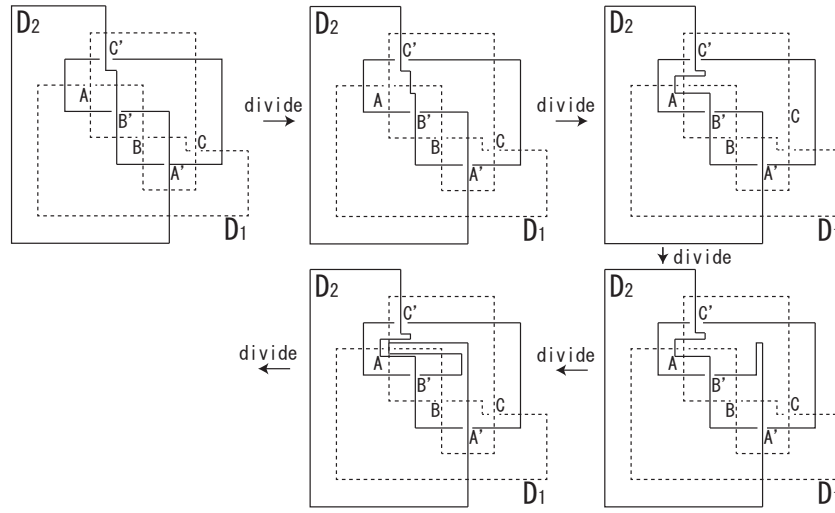
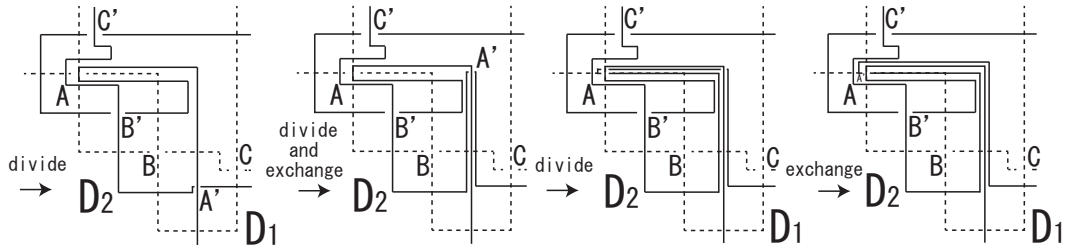
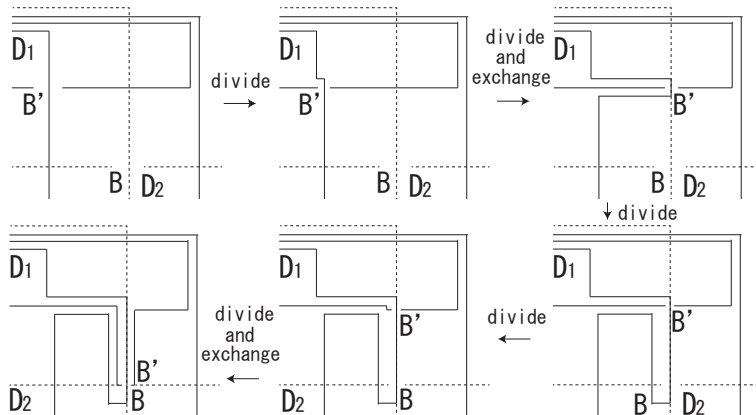
FIGURE 14. ambient isotopic な rectangular link diagrams を同じ平面上に配置する．

この定理は 5 つの Step に分けて示される．2 つの rectangular link diagram D_1, D_2 が平面上で ambient isotopic であるとする． D_1, D_2 を変形して互いに重ねていくが、以下、記号の簡単のために、各 Step 後の D_i を変形したものも D_i と呼ぶことにする．

まず、Step 1 として、 D_1, D_2 ともに同一直線上に 2 つの交差点が無いように、有限回の divide 操作を適用しておく．そして、 D_1 と D_2 を同一平面上に配置する．ただし、 D_1 と D_2 の縦線同士、横線同士が同一直線上に無いようにする．図 14 の左側の図参照．

次に、Step 2 として D_2 の交差点を D_1 の ambient isotopy で対応する交差点のところに有限回の Cromwell move によって移動する．図 14 の右側の図の γ のような縦線と横線を 1 本ずつ繋げた折れ線分に沿って交差点を移動させる．変形方法は図 15, 16, 17 に書いた．

Step 3 では、 D_2 を「交差点を最終的に元の位置に戻す平面の ambient isotopy」によって動かして、後で「交差点を固定する平面の ambient isotopy」によって動かして D_1 と重ね合わせることが出来る状態にする．平面の n 個の点を最終的に元の位置に戻す ambient isotopy は pure n -braid に対応していることが知られている．しかし、ここではもっと広く、pure とは限らない一般の braid に対応する ambient isotopy を考え、交差点たちの位置を入れ替える場合も含めて、有限回の Cromwell 変形で実現できることを示す．「平面の n 個の点を部分集合として固定する ambient isotopy」と n -braid の関係は良く知られているが、例えば [4] の 9.1.3 節を見よ．p.244 に generator の ambient isotopy の half-twist が図示されている．本稿でも図 18 (2)

FIGURE 15. D_2 の交差点を対応する D_1 の交差点のところに移動する (その 1)FIGURE 16. D_2 の交差点を対応する D_1 の交差点のところに移動する (その 2)FIGURE 17. D_2 の交差点を対応する D_1 の交差点のところに移動する (その 3)

に描いておく. i 番目と $i+1$ 番目の点を繋ぐ曲線分 $n-1$ 本を端点以外では重ならないようにとったとき, 曲線分の近傍で half-twist を行うのが generator となる. 我々は rectangular diagram の交差点 n 個を集合として固定するので, 横座標の若い方から順番を付けて, i 番目の交差点からは「横直線分 1 本の後に縦直線分 1 本を継ぎ足した折れ線 λ_i 」で $i+1$ 番目の交差点まで至ることにする. 図 18 (1) 参照. すると, generator の「 λ_i の近傍の half-twist」は図 19 のように Cromwell 変形で実現できる.

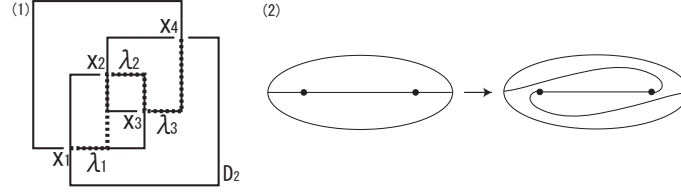


FIGURE 18. 交差点たちを曲線分上に並べる

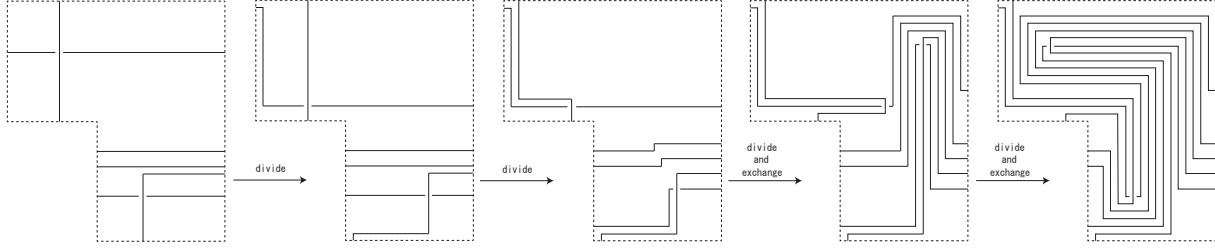


FIGURE 19. Mapping Class Group の生成元を Cromwell move で実現する

Step 4 は D_2 に交差点の周りの π ラジアン回転を有限回適用して、後で「交差点の近傍を固定する平面の ambient isotopy」によって動かして D_1 と重ね合わせることができる状態にする。この変形は Figure 20 のように有限回の Cromwell 変形で実現できる。操作は交差点の極めて近くで行う。図の外に繋がる横線が 2 本になるが、それと繋がる縦線の長さを調整すれば良い。図の外に繋がる縦線についても同様である。また、図では交差点の位置がずれるが、縦座標や横座標の狭義単調増加関数による変換によって、元の位置に戻しておく。

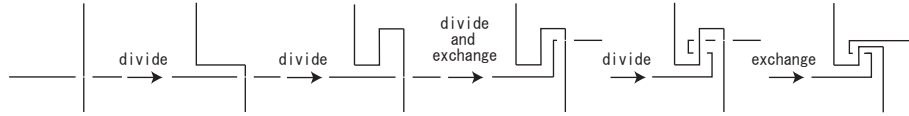


FIGURE 20. 180 degree rotation

Step 5 は D_2 を交差点の近傍を固定する平面の ambient isotopy によって動かして D_1 と重ね合わせる。この変形は bigon criterion により、 D_1 の線と D_2 の線で囲まれた 2 角形領域に沿って D_2 を動かす操作を繰り返して実現される。bigon criterion については、例えば、[7] の 4.2 節と 5.1 節を参照されたい。大雑把に言って、曲面上の 2 つの曲線たち (arc(s) または circle(s)) が up to ambient isotopy で最少数の交点で交わっていることと、2 つの曲線の部分弧たち (1 つの曲線から 1 本ずつ) で囲まれる 2 角形領域が存在しないことが同値というものである。我々の状況では、交差点と D_1 と D_2 の重なった線の管状近傍の内部を取り除いた穴あき球面 P 上で bigon criterion を適用する。([7] では bigon criterion を普遍被覆空間を用いて証明しているが、3 次元多様体論でよく用いる曲面の切り貼りの議論で素直に示せるように思う。我々の状況の場合にその議論を書いておく。 $P \times [0, 1]$ 内で、 D_1, D_2 の線の軌跡を disk として捉える。時刻 1 のところでは、 D_1 と D_2 の線は端点以外では parallel で、重ならないとしておく。時刻 0 のところでは端点以外の交点があるとして、2 角形を探す。一般の位置の議論によって、disk たちの内部をわずかに動かして互いに有限個の circles や arcs で交わるようにできる。circle の交わりは innermost disk の議論の切り貼りによって無くすることができる。この際、disk たちが軌跡であるという条件は崩れてしまっても構わない。交わりの arc の端点は $P \times \{0\}$ 上か $\partial P \times [0, 1]$ 上にある。 D_1 の線に由来する disk 上で outermost な交わりの arc の 1 つを α , outermost disk を Q_1 とする。 α は 2 つの disk から subdisk を切り出す。片方は Q_1 であり、もう一方を Q_2 とする。ただし、 $P \times \{1\}$ に触れないように Q_1, Q_2 をとる。 α の端点が $\partial P \times [0, 1]$ 上にあるときも含めて、 $Q := Q_1 \cup Q_2$ は $P \times \{0\}$ 上に境界 circle を持つ disk である (Figure 21 参照)。 $P \times [0, 1]$ 内

に埋め込まれているので, P への自然な射影を考えると, ∂Q は $P \times \{0\}$ 上で null-homotopic であり, disk $Q'(\subset P \times \{0\})$ の縁になっている. Q は Q_2 の他には D_2 の線から由来する disk とは交わらないので, Q' の内部は D_2 の線から由来する disk とは交わらない. したがって, Q' の内部には D_1 の線しか入ってこないの
で, Q' 上 outermost な D_1 の線の部分弧を考えることにより, 目的の 2 角形領域が見つかる.)

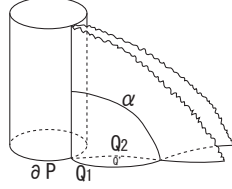


FIGURE 21. 2 角形を見つける

2 角形領域に沿った変形は RII 変形の Cromwell 変形による実現と同様の操作により実現される. 2 角形領域に凹角がある場合は, RII 変形の場合と同じ操作でよい. 2 角形領域に凹角が無い場合, 2 角形領域の両端点が既に D_1 と重なった部分弧の端点でないときは, RII 変形の実現のときと同様に, D_2 の線を D_1 の線を少し通り越すところまで変形する. 片方でも既に D_1 と重なった部分弧の端点のときは, 2 角形の縁の D_2 の線が D_1 の線にぴったり重なるように変形する (Figure 22 参照). この操作を繰り返して D_2 全体が D_1 に重なり, 定理の証明が完了する.

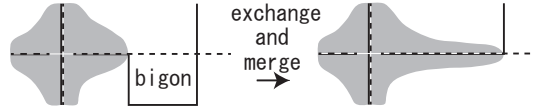


FIGURE 22. 2 角形領域に沿って動かして重ねる

謝辞

林ゼミで最初にこの研究課題に取り組んだ小澤愛実氏に感謝する.

REFERENCES

1. J.W. Alexander and G.B. Briggs, *On types of knotted curves*. Ann. of Math. **28** (1926/27), 562–586.
2. P.R. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book I: Basic properties*, Topology and its Applications **64** (1995), 37–58.
3. I.A. Dynnikov, *Arc-presentations of links: Monotone simplification*, Fundamenta Mathematicae **190** (2006), 29–76.
4. B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton Mathematical Series, No 49, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2012.
5. C. Manolescu, P. Ozsváth, Z. Szabó and D. Thurston, *On combinatorial link Floer homology*, Geometry and Topology **11** (2007), 2339–2412.
6. K. Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie (German)*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1926), 24–32.
7. H. Wilton, *Mapping class groups*, Lecture note (March 8, 2021), available at <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~hjr2/MCG%20lectures.pdf>