自由群の IA 自己同型群の安定コホモロジーについて

葉廣和夫

2024 年 10 月 7 日

概要

この講演では，自由群 F_n の IA 自己同型群の有理コホモロジー $H^*(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Q})$ について，安定域 $(n >> *)$ において考える．片田舞氏（九州大学）との共同研究に基づく．

1　自由群の IA 自己同型群 IA_n

自由群 $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ は, F_n のアーベル化 $H = F_n/[F_n, F_n] = H_1(F_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ に作用し，次の短完全列が得られる．

$$1 \to \mathrm{IA}_n \to \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) \to 1 \tag{1.1}$$

ここで，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ である．IA_n を自由群 F_n の IA 自己同型群という．

IA_n の構造について，まず次の結果がある．

Theorem 1 (Magnus [15])**.** $n \geq 2$ のとき，IA_n は

$$\{K_{a,b} \mid 1 \leq a, b \leq n,\ a \neq b\} \cup \{K_{a,b,c} \mid 1 \leq a, b, c \leq n,\ a < b,\ c \neq a, b\}$$

によって生成される．ここで,

$$K_{a,b}(x_i) = \begin{cases} x_a x_b x_a^{-1} & (i = b) \\ x_i & (i \neq b) \end{cases}, \qquad K_{a,b,c}(x_i) = \begin{cases} x_c[x_a, x_b] & (i = c) \\ x_i & (i \neq c). \end{cases}$$

(ただし，$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.) 特に，IA_n は有限生成である．

IA_n のアーベル化 $\mathrm{IA}_n^{\mathrm{ab}} = H_1(\mathrm{IA}_n; \mathbb{Z})$ について，以下が知られている．

Theorem 2 (Cohen–Pakianathan, Farb, Kawazumi [11])**.** $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})]$ 加群としての同型

$$H_1(\mathrm{IA}_n; \mathbb{Z}) \cong H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \wedge^2 H,$$

が成り立つ．

2　IA_n の安定 Albanese(コ) ホモロジー

以下では，IA_n の安定域における有理 (コ) ホモロジーを考える．安定域とは，n が (コ) ホモロジーの次数に対して十分に大きいことをいう．また，IA_n の Albanese コホモロジー $H_A^*(\mathrm{IA}_n; \mathbb{Q})$ を射影 $p : \mathrm{IA}_n \to \mathrm{IA}_n^{\mathrm{ab}}$

が誘導する準同型 $p^*: H^*(\mathrm{IA}_n^{\mathrm{ab}};\mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ の像とし，IA_n の Albanese ホモロジー $H_*^A(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ を $p_*: H_*(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q}) \to H_*(\mathrm{IA}_n^{\mathrm{ab}};\mathbb{Q})$ の像と定義する．Albanese コホモロジーは Albanese ホモロジーの dual である:

$$H_A^i(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Hom}(H_i^A(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q}),\mathbb{Q}).$$

$H_i(\mathrm{IA}_n^{\mathrm{ab}}) = \bigwedge^i H_1(\mathrm{IA}_n^{\mathrm{ab}};\mathbb{Q})$ が成り立ち，$H_i^A(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ はその quotient であるので，通常のホモロジー $H_i(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ よりも格段に扱いやすいものとなっている．

2 次以上の安定 Albanese ホモロジーについて次の結果がある．Pettet [17] は安定 Albanese cohomology $H_A^2(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 表現としての構造を決定した．Katada[8] は安定 Albanese ホモロジー $H_*^A(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 表現構造についての予想

$$H_*^A(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q}) \cong W_* \tag{2.1}$$

を立てた上で $* = 3$ の場合が成り立つことを示し，一般の場合についても最近証明した [9, 10]．ここで，W_* は代数的に定義される次数付き $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})]$ 加群であり，Kawazumi–Vespa [12] によって定義された，$\mathrm{Aut}(F_n)$ の twisted cohomology を記述するための wheeled PROP 構造と関係がある．

3　安定コホモロジー $H^*(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ の構造について

以上のように，IA_n の安定 Albanese コホモロジーの構造については理解が進んだが，本来の安定有理コホモロジー $H^*(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ の Albanese コホモロジーを超えた部分についてはまだよくわかっていない．ここでは，いくつかの予想について述べ，それらの間の関係についての結果を紹介する．

まず Church–Farb [3] の表現論的安定性予想について述べる．partition の組 (λ,μ) $(\lambda \vdash p, \mu \vdash q)$ に対して，十分大きい n に対して既約な代数的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ 表現 $V_{\lambda,\mu}(n)$ が定まっている [13].

Conjecture 3 (Church–Farb [3])**.** 各 $i \geq 0$ に対して，$\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$ 表現の族 $\{H_i(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})\}_n$ は，表現論的安定 *(representation stable)* である．つまり，有限個の *partition* の組の族 $\{(\lambda_i,\mu_i)\}_i$ が存在して，十分大きい n に対して同型

$$H_i(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_i V_{\lambda_i,\mu_i}(n)$$

が成り立つ．

Katada と筆者 [5] は以下の予想を定式化した．

Conjecture 4 ([5])**.** カップ積に誘導される写像

$$\omega_n: H_A^*(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q}) \otimes H^*(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})} \to H^*(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})$$

は, 安定域において同型である．ここで, $H^*(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}$ は, $H^*(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 不変部分を表す.

Conjecture 5 ([5])**.** 安定域において次の同型が成り立つ.

$$H^*(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})} \cong \mathbb{Q}[z_1,z_2,\dots] \quad (\deg z_i = 4i).$$

コホモロジー類 $z_i \in H^{4i}(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ は，Igusa [7], Morita–Sakasai–Suzuki [16] によって定義されたコホモロジー類と関係があると期待される．

Katada の安定同型 (2.1) と以上の予想を合わせると，IA_n の安定有理コホモロジーの代数的構造についての次の予想が得られる．

Conjecture 6 ([5])**.** 次数付き $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})]$ 加群の安定域における同型

$$H^*(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q}) \cong (W_*)^* \otimes \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots] \quad (\deg z_i = 4i)$$

が成り立つ．

次の定理が成り立つ．

Theorem 7. $H^d(\mathrm{IA}_n;\mathbb{Q})$ が安定的に *(つまり，各 $d \geq 0$ に対し，十分大きい n に対して)* 代数的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ 表現であるとする．*(Conjecture 3 が成り立つならばこの仮定は満たされている．)* このとき，

- *([5, 10]) Conjecture 4* が成り立つ．*([5]* においては，安定同型 (2.1) も定理の仮定に含まれている．*[10]* において (2.1) が証明されたので，ここでは仮定に入れていない．*)*
- *([5]) Conjecture 5* が成り立つ．

ここでは，Theorem 7 のうち，Conjecture 5 の部分の証明について簡単に述べる．短完全列 (1.1) により，Hochschild–Serre スペクトル系列 [6]

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}), H^q(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Aut}(F_n),\mathbb{Q})$$

を得る．仮定により，安定域において，$H^q(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})$ は代数的 $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})]$ 加群である．よって，Borel の安定・消滅定理 [1, 2](の Li–Sun による改良 [14]) を適用できて，安定域において同型

$$H^p(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}), H^q(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})) \cong H^p(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \otimes H^q(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Q})^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}, \tag{3.1}$$

が成り立つ．Borel の定理 [1] より，安定的に，

$$H^*(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \cong \bigwedge(x_1, x_2, \dots) \quad (\deg x_i = 4i+1)$$

である．また，Galatius[4] の定理により，安定的に $H^d(\mathrm{Aut}(F_n),\mathbb{Q}) = 0$ $(d > 0)$ である．以上のことと，Zeeman の Comparison Theorem [18] を上のスペクトル系列に適用することにより，Conjecture 5 を得る．

参考文献

[1] A. Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 7:235–272, 1974.

[2] A. Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. II. In *Manifolds and Lie groups (Notre Dame, Ind., 1980)*, volume 14 of Progr. Math., pages 21–55. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

[3] T. Church and B. Farb, Representation theory and homological stability. *Adv. Math.*, 245:250–314, 2013.

[4] S. Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. *Ann. of Math. (2)* 173(2):705–768, 2011.

[5] K. Habiro and M. Katada. On the stable cohomology of the IA-automorphism groups of free groups. arXiv preprint arXiv:2211.13458, 2022.

[6] G. Hochschild and J.-P. Serre. Cohomology of group extensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953), 110–134.

[7] K. Igusa, Higher Franz-Reidemeister torsion. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 31, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2002.

[8] M. Katada. Stable rational homology of the IA-automorphism groups of free groups. arXiv preprint arXiv:2207.00920, 2022.

[9] M. Katada, The stable Albanese (co)homology of IA_n, appendix to E. Lindell, The walled Brauer category and stable cohomology of IA_n, arXiv preprint arXiv:2404.06263, 2024

[10] M. Katada, The stable Albanese homology of the IA-automorphism groups of free groups. arXiv preprint arXiv:2404.15901, 2024.

[11] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions. arXiv preprint math/0505497, 2005.

[12] N. Kawazumi and C. Vespa. On the wheeled PROP of stable cohomology of $\mathrm{Aut}(F_n)$ with bivariant coefficients. *Alg. Geom. Topol.* 23:3089–3128, 2023.

[13] K. Koike. On the decomposition of tensor products the representations of the classical groups: by means of the universal characters. *Adv. Math.*, 74(1):57–86, 1989.

[14] J.-S. Li and B. Sun. Low degree cohomologies of congruence groups. *Sci. China Math.*, 62(11):2287–2308, 2019.

[15] W. Magnus, Über n-dimensionale Gittertransformationen. *Acta. Math.*, 64 (1): 353–367, 1935.

[16] S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki. Secondary characteristic classes for subgroups of automorphism groups of free groups. arXiv preprint arXiv:1512.06365, 2015.

[17] A. Pettet. The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:725–740, 2005.

[18] E. C. Zeeman. A proof of the comparison theorem for spectral sequences. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:57–62, 1957.