幾何学 I　第 8 回　河澄響矢

今回の内容: 古典的な vector 場の定義, 接束, C^∞ vector 場, 括弧積, 写像の微分 dF, 部分多様体の接束, 直積の接束.

§6. vector 場と接束（前半）

[vector 場の現代的定義と古典的定義]

M: m 次元 C^∞ 多様体とする。

現代的な vector 場の定義.

X: M の vector 場

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 各点 $p \in M$ に接空間 T_pM の元 X_p を対応させる写像。

$\iff$ 写像 $X : M \to \coprod_{p\in M} T_pM$ であって $\pi \circ X = 1_M$ をみたすもの。

ここで $\coprod_{p\in M} T_pM$ は集合としての disjoint 和であって写像 π は

$$\pi : \coprod_{p\in M} T_pM \to M, \quad v \in T_pM \mapsto p$$

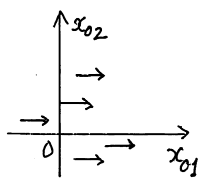
と定める。各点 $p \in M$ に速度ベクトル X_p が与えられている、ということは自励系の常微分方程式が与えられているということである（§7）。

（疑問）X_p が $p \in M$ について C^r, $r = 0, 1, \ldots, \infty$, であるとはどういうことか？

chart で表したときに C^r になるということのはず。

古典的な vector 場の定義: 一定の変換則をみたす函数の集まり。

例で考える.　$\mathbb{R}P^2 = \{[X_0 : X_1 : X_2]\}$ について $U_i := \{X_i \neq 0\} (\cong \mathbb{R}^2)$, $i = 0, 1, 2$, では、$x_{ij} := X_j/X_i$ $(j \neq i)$ が座標である。$U_0 (\cong \mathbb{R}^2)$ 上の vector 場 $\dfrac{\partial}{\partial x_{01}}$ を考える（下図参照）。



この vector 場は U_1 や U_2 の上ではどのように見えるか？

補題 4.4 (4) により、$U_1 \cap U_0$ 上では

$$\frac{\partial}{\partial x_{01}} = \frac{\partial x_{10}}{\partial x_{01}}\frac{\partial}{\partial x_{10}} + \frac{\partial x_{12}}{\partial x_{01}}\frac{\partial}{\partial x_{12}} = -{x_{10}}^2 \frac{\partial}{\partial x_{10}} - x_{10}x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}}$$

となる。

$$\frac{\partial x_{10}}{\partial x_{01}} = \frac{\partial}{\partial x_{01}}\left(\frac{1}{x_{01}}\right) = -\frac{1}{{x_{01}}^2} = -{x_{10}}^2$$

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial x_{01}} = \frac{\partial}{\partial x_{01}}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right) = -\frac{x_{02}}{{x_{01}}^2} = -x_{10}x_{12}$$

だからである。そこで、これは U_1 全体に “C^∞ に” 延びている。

同様に $U_2 \cap U_0$ 上では

$$\frac{\partial}{\partial x_{01}} = \frac{\partial x_{20}}{\partial x_{01}}\frac{\partial}{\partial x_{20}} + \frac{\partial x_{21}}{\partial x_{01}}\frac{\partial}{\partial x_{21}} = x_{20}\frac{\partial}{\partial x_{21}}$$

となる。

$$\frac{\partial x_{20}}{\partial x_{01}} = \frac{\partial}{\partial x_{01}}\left(\frac{1}{x_{02}}\right) = 0$$
$$\frac{\partial x_{21}}{\partial x_{01}} = \frac{\partial}{\partial x_{01}}\left(\frac{x_{01}}{x_{02}}\right) = \frac{1}{x_{02}} = x_{20}$$

だからである。そこで、これは U_2 全体に "C^∞ に" 延びている。これらの vector 場は $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ において一致しているが、$U_0 \cap U_1 \cap U_2$ は $U_1 \cap U_2$ において稠密だから、$U_1 \cap U_2$ 全体で一致している。結局、 $\mathbb{R}P^2$ 全体に "C^∞ に" 延びている。

C^∞ vector 場の古典的な定義. M を C^∞ 多様体、$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を M の（極大とは限らない）atlas とする。

$$\varphi_\alpha = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, \ldots, x_{\alpha,m}) : U_\alpha \overset{\cong}{\to} V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$$

と成分表示する。このとき、C^∞ vector 場とは、atlas と同じ添字集合 A で定義された C^∞ 函数の集まり

$$\xi_{\alpha,i} : U_\alpha \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in A,\ 1 \le i \le m,$$

で、$\forall\alpha, \forall\beta \in A, \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$ について関係式

$$(\sharp) \qquad \sum_{i=1}^m \xi_{\alpha,i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha,i}}\right)_p = \sum_{j=1}^m \xi_{\beta,j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta,j}}\right)_p$$

をみたすものをいう。

($\sharp$) のもっと古典的な言い換え（貼り合わせの条件）

$$(\sharp\sharp) \qquad \xi_{\beta,j}(p) = \sum_{i=1}^m \xi_{\alpha,i}(p)\left(\frac{\partial x_{\beta,j}}{\partial x_{\alpha,i}}\right)(p) \quad (\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta)$$

ここで $\left(\dfrac{\partial x_{\beta,j}}{\partial x_{\alpha,i}}\right)$ は**変換函数**（transition function）と呼ばれる。変換函数としてさまざまなものをとることで古典的な tensor 場の定義が得られる。（たとえば、$\left(\dfrac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial x_{\beta,j}}\right)$ ととると、1 次微分形式の古典的な定義がえられる。）

古典的な定義の欠点. 容れものが不明確。

$\Longrightarrow$ 貼り合わせの条件 ($\sharp$), ($\sharp\sharp$) をつかって集合 $\coprod_{p\in M} T_pM$ に C^∞ 多様体の構造を入れて接束 TM を定める。
$\Longrightarrow$ 古典的な定義と現代的な定義は一致する。

[接束の定義]

あらためて**接束**（tangent bundle）を定義する。M を m 次元 C^∞ 多様体とする。

$$TM := \coprod_{p \in M} T_pM \quad \text{(集合としては各 } p \in M \text{ についての } T_pM \text{ 全部の disjoint 和)}$$

と定め、これを接束の**全空間**（total space）とよぶ。写像

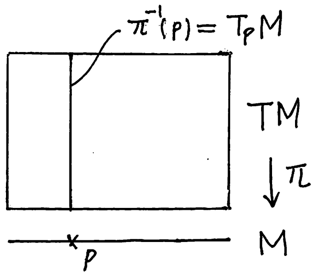
$$\pi : TM \to M, \quad v \in T_pM \mapsto \pi(v) := p \in M$$

を**射影**（projection）とよぶ。

$$\forall p \in M,\ \pi^{-1}(p) = T_pM$$

がなりたつ（下図参照）。部分空間 $A \subset M$ について次のように表す

$$TM|_A := \pi^{-1}(A) = \coprod_{p \in A} T_pM.$$



TM に $2m$ 次元 C^∞ 多様体の構造を入れる。M の chart (U, φ, V), $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$, について、$\forall p \in U$ において実ベクトル空間の同型

$$\begin{aligned} (d\varphi)_p : T_pM &\overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^m \\ \dot{c}(0) &\mapsto \left(\frac{d}{dt} x_i(c(t)) \Big|_{t=0} \right)_{i=1}^{m} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p &\leftarrow\!\shortmid (0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

がなりたつことを思い出す。

ここだけの記号 として

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} : \pi^{-1}(U) = TM|_U &\to V \times \mathbb{R}^m \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{2m} \\ v \in T_pM &\mapsto \widehat{\varphi}(v) := (\varphi(p), (d\varphi)_p(v)) \end{aligned}$$

と表す。$\widehat{\varphi}\left(\sum_{i=1}^m u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = (x_1(p), \ldots, x_m(p), u_1, \ldots, u_m)$ である。これは全単射であって、各 $p \in U$ において $T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^m$ は実線型同型である。また、$\mathrm{pr}_1 : V \times \mathbb{R}^m \to V$, $(x, u) \mapsto x$, を第一成分への射影とするとき、次の可換図式がなりたつ

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\widehat{\varphi}", "\cong"'] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] & V. \end{tikzcd}$$

そこで $(\pi^{-1}(U), \widehat{\varphi}, V\times\mathbb{R}^m)$ を TM の chart に使いたい。

補題 6.1. (O,ψ,W): M の別の chart, $\psi=(y_1,y_2,\dots,y_m)$, について

$$\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1} : \varphi(U\cap O)\times\mathbb{R}^m \overset{\cong}{\to} \psi(U\cap O)\times\mathbb{R}^m$$

は、$\forall x\in\varphi(U\cap O)$, $\forall u={}^t(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{R}^m$ について

$$(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})(x,u) = (\psi\varphi^{-1}(x), (J\psi\varphi^{-1})_x u) = (\psi\varphi^{-1}(x), \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(x))u_i\right)_{j=1}^m)$$

と表される。とくに C^∞ 微分同相である。

証明.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \widehat{\psi}\left(\sum_{i=1}^m u_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi^{-1}(x)}\right) = (\psi\varphi^{-1}(x), \sum_{i=1}^m u_i(d\psi)_{\varphi^{-1}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi^{-1}(x)})\\ &= (\psi\varphi^{-1}(x), \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(x))u_i\right)_{j=1}^m) = (\text{右辺})\end{aligned}$$

□

定理 6.2. 接束の全空間 TM には

$$\{(\pi^{-1}(U),\widehat{\varphi},V\times\mathbb{R}^m);\ (U,\varphi,V): M \text{ の chart}\}$$

を atlas とする $2m$ 次元 C^∞ 多様体の構造が入る。

証明. **TM の位相.** 部分集合 $O\subset TM$ について

$$O \overset{\text{open}}{\subset} TM \overset{\text{定義}}{\iff} \forall (U,\varphi,V): M \text{ の chart},\ \widehat{\varphi}(O\cap\pi^{-1}(U)) \overset{\text{open}}{\subset} V\times\mathbb{R}^m$$

と定めると、位相の公理をみたす[1]（各自確かめよ）。$\pi: TM\to M$ は連続写像である。任意の $W\overset{\text{open}}{\subset} M$ と M の任意の chart (U,φ,V) について $\widehat{\varphi}(\pi^{-1}(W)) = \varphi(W\cap U)\times\mathbb{R}^m \overset{\text{open}}{\subset} V\times\mathbb{R}^m$ だからである。また、補題 6.1 により

$$\begin{aligned}&O\overset{\text{open}}{\subset} TM\\ \iff& \forall v\in O,\ \exists (U,\varphi,V): M \text{ の chart},\\ &\text{s.t.},\ v\in\pi^{-1}(U) \text{ かつ } \widehat{\varphi}(O\cap\pi^{-1}(U)) \text{ は } V\times\mathbb{R}^m \text{ において } \widehat{\varphi}(v) \text{ の近傍である。}\end{aligned}$$

となる。とくに $\forall (U,\varphi,V)$: M の chart について $\widehat{\varphi}:\pi^{-1}(U)\to V\times\mathbb{R}^m$ は連続である。なぜなら、任意の $W\overset{\text{open}}{\subset} V\times\mathbb{R}^m$ について、いま示したことを $O=\widehat{\varphi}^{-1}(W)$ と $\widehat{\varphi}$ に適用すると $\widehat{\varphi}^{-1}(W)\overset{\text{open}}{\subset}\pi^{-1}(U)$ となるからである。さらに、$\widehat{\varphi}^{-1}: V\times\mathbb{R}^m\to\pi^{-1}(U)$ は TM の位相の定義から連続であるから、$\widehat{\varphi}:\pi^{-1}(U)\to V\times\mathbb{R}^m$ は同相である。

[1]つまり $\amalg\widehat{\varphi}^{-1}: \coprod(V\times\mathbb{R}^m)\to TM$ は等化写像である。

次がなりたつ。

$$TM : \text{Hausdorff 空間}.$$

Hausdorff 性の証明. $v_1 \neq v_2 \in TM$ とする。

(1) $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$ のとき。M は Hausdorff だから $\exists U_1, \exists U_2 \overset{\text{open}}{\subset} M$, $\pi(v_1) \in U_1$, $\pi(v_2) \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である。π は連続だから $\pi^{-1}(U_1), \pi^{-1}(U_2) \overset{\text{open}}{\subset} TM$ であり、$v_1 \in \pi^{-1}(U_1)$, $v_2 \in \pi^{-1}(U_2)$, $\pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2) = \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \emptyset$ である。

(2) $\pi(v_1) = \pi(v_2)$（$= p$ とおく。）のとき。$p \in U$ なる M の chart (U, φ, V) をとる。$\widehat{\varphi}(v_1) \neq \widehat{\varphi}(v_2) \in V \times \mathbb{R}^m$ であるが、$V \times \mathbb{R}^m (\overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{2m})$ は Hausdorff だから、これらを分離する開近傍がとれる。$\pi^{-1}(U) \overset{\text{open}}{\subset} TM$ だから、これらの開近傍は TM において v_1 と v_2 を分離する開近傍を定める。 □

(U, φ, V), (O, ψ, W) を M の chart とする。補題 6.1 により

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap O) \times \mathbb{R}^m \to \psi(U \cap O) \times \mathbb{R}^m$$

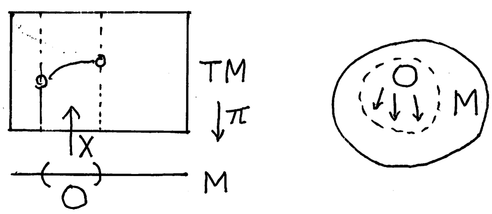
は C^∞ 写像である。つまり、$\{(\pi^{-1}(U), \widehat{\varphi}, V \times \mathbb{R}^m);\ (U, \varphi, V) : M \text{ の chart}\}$ は TM の C^∞ atlas である。また、$\pi : TM \to M$ は C^∞ 写像である。なぜなら $\pi^{-1}(U)$ の上で $\pi = \varphi^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \widehat{\varphi}$ だからである。

以上で TM に C^∞ 多様体の構造が入った。 □

C^∞ 多様体 M の**接束**（tangent bundle）とは、写像 $\pi : TM \to M$ の全体を指す。全空間 TM だけを接束とよぶ場合もある。

接束 TM は vector 場の容れものである. $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。

定義 6.3. X: O 上の C^∞ vector 場
$\overset{\text{定義}}{\iff}$ C^∞ 写像 $X : O \to \pi^{-1}(O) \subset TM$ であって $\pi \circ X = 1_O : O \to O$ をみたすもの.



$p \in O$ について $X(p) = X_p$ とも書く。

よく使う記号. $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ について次のように表す。

$$\mathcal{X}(O) = \mathrm{Vect}(O) := \{X;\ O \text{ 上の } C^\infty \text{ vector 場}\},$$
$$C^\infty(O) = C^\infty(O; \mathbb{R}) := \{f : O \to \mathbb{R};\ C^\infty \text{ 函数}\}$$

写像 $X : O \to \pi^{-1}(O)$ が $\pi \circ X = 1_O$ をみたすとする。$f \in C^\infty(O)$ について函数

$$Xf : O \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto (Xf)(p) := X_p f = (df)_p(X_p)$$

を考えることができる。いま M の chart (U,φ,V), $\varphi=(x_1,\dots,x_m)$, について

$$X_p=\sum_{i=1}^m \xi_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\quad p\in O\cap U$$

と表すことができる。補題 4.4(2) および $\widehat{\varphi}$ の定義により

$$\begin{aligned}&\xi_i(p)=(dx_i)_p(X_p)=X_p(x_i)=(Xx_i)(p),\\&(\widehat{\varphi}\circ X)(p)=(\varphi(p),(\xi_1(p),\dots,\xi_m(p))),\end{aligned}$$

がなりたつ。したがって、次がえられる。

補題 6.4. 次は同値である。
(a) X は $O\cap U$ 上で C^∞ である。
(b) $1\le\forall i\le m$ について $Xx_i=\xi_i:O\cap U\to\mathbb{R}$ は C^∞ 函数である。

とくに $\dfrac{\partial}{\partial x_i}:p\in U\mapsto\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\in T_pM$ は $\mathrm{Vect}(U)$ の元である。

いま $\forall X\in\mathrm{Vect}(O),\forall f\in C^\infty(O)$ について

$$Xf=\sum_{i=1}^m(Xx_i)\frac{\partial f}{\partial x_i},\ C^\infty\text{ function on }U\cap O\quad(\forall(U,\varphi,V),\varphi=(x_1,\dots,x_m))$$

であるから $Xf\in C^\infty(O)$ である。

系 6.5. $X,Y\in\mathrm{Vect}(O)$, $h\in C^\infty(O)$ について

$$\begin{aligned}&(X+Y)_p:=X_p+Y_p\in T_pM,\\&(hX)_p:=h(p)X_p\in T_pM,\end{aligned}$$

と定めると $X+Y\in\mathrm{Vect}(O)$ かつ $hX\in\mathrm{Vect}(O)$ である。とくに $\mathrm{Vect}(O)$ は $C^\infty(O)$-加群（とくに実ベクトル空間）である。

証明. $(X+Y)x_i=Xx_i+Yx_i$ と $(hX)x_i=h(Xx_i)$ はともに C^∞ 函数である。 □

$\mathrm{Vect}(O)$ の零元

$$0:p\in M\mapsto 0\in T_pM$$

を **零切断**（zero section）とよぶ。

貼り合わせの条件について. $X\in\mathrm{Vect}(O)$, $\psi=(y_1,\dots,y_m)$: M の別の chart について $X_p=\sum_{j=1}^m\eta_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$ とすると、

$$\sum_{j=1}^m\eta_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p=X_p=\sum_{i=1}^m\xi_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

となるが、両辺に y_j を代入して

$$\eta_j(p)=\sum_{i=1}^m\xi_i(p)\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)(p)$$

となる。これは先ほどの (♯♯) 式に他ならない。とくに、$1 \le \forall i \le m$ について ξ_i が p のまわりで C^∞ であることと、$1 \le \forall j \le m$ について η_j が p のまわりで C^∞ であることとは同値である。

例. $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ について

$$TO = \pi^{-1}(O) = TM|_O \overset{\text{open}}{\subset} TM$$

である。とくに $M = \mathbb{R}^m$ のとき $(O, 1_O, O)$ が chart にとれるから

$$\widehat{1_O} : TO \overset{\cong}{\to} O \times \mathbb{R}^m$$

は C^∞ 微分同相である。しかし、一般の M では $TM \not\cong M \times \mathbb{R}^m$ である。

[vector 場と函数の掛け算の関係]

$O \overset{\text{open}}{\subset} M$, $X \in \mathrm{Vect}(O)$ とするとき

$$X : f \in C^\infty(O) \mapsto Xf \in C^\infty(O), \quad \text{実線型写像}$$

とみなすことができる。

補題 6.6. $\forall f, \forall g \in C^\infty(O)$ について、掛け算 $fg \in C^\infty(O)$ を $p \in O$ について $(fg)(p) = f(p)g(p)$ によって定義する[2]。このとき、次がなりたつ

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \quad \text{(Leibniz' rule).}$$

証明. 補題 4.5: $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ による。 □

[括弧積]

補題 6.7. $O \overset{\text{open}}{\subset} M$, $X, Y \in \mathrm{Vect}(O)$
$\Longrightarrow$ $\exists! Z \in \mathrm{Vect}(O)$, $\forall O_1 \overset{\text{open}}{\subset} O$, $\forall f \in C^\infty(O_1)$,

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf).$$

このとき $Z = [X, Y]$ と書き、X と Y の**括弧積**（bracket）とよぶ。

証明. まず $\exists (U, \varphi, V)$: chart of M, $O \subset U$ の場合に示す。$\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, $X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ とすると、$\forall O_1 \overset{\text{open}}{\subset} O$, $\forall f \in C^\infty(O_1)$ について

$$\begin{aligned}
X(Yf) - Y(Xf) &= \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \eta_i \xi_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \left(\sum_{i,j}\left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f
\end{aligned}$$

と計算できる。
一意性. いまの計算を $f = x_j$ に適用すると

$$Z = \sum_{j=1}^m (Zx_j)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j}\left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

となって、Z は ξ_i と η_i を用いて一意的に表される。

[2] $f(p)g(p)$ は実数 $f(p)$ と $g(p)$ の掛け算である。

存在. 逆に

$$Z_0 := \sum_{i,j}\left(\xi_i\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{m}(X\eta_j - Y\xi_j)\frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathrm{Vect}(O)$$

と定めると、いまの計算から $Z_0 f = X(Yf) - Y(Xf)$ をみたす。

次に、一般の $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ を考える。M の（極大とは限らない）C^∞ atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をとる。

一意性. いま示したことから $\forall\alpha \in A$ について $O \cap U_\alpha$ 上で一意的である。

存在. いま示したことから $\alpha \in A$, $\exists Z_\alpha \in \mathrm{Vect}(O \cap U_\alpha)$, s.t., $\forall f \in C^\infty(O \cap U_\alpha)$, $Z_\alpha f = X(Yf) - Y(Xf)$ である。ここで、$O \cap U_\alpha \cap U_\beta$ での一意性から

$$Z_\alpha = Z_\beta \text{ on } O \cap U_\alpha \cap U_\beta$$

となる。そこで Z_α たちは貼りあって $\mathrm{Vect}(O)$ の元を定める。任意の $f \in C^\infty(O_1)$ について、Z の定義から各 $O_1 \cap U_\alpha$ の上では $Zf = Z_\alpha f = X(Yf) - Y(Xf)$ がなりたつ。これは O_1 全体で $Zf = X(Yf) - Y(Xf)$ がなりたつことを意味する。存在が示された。 □

（注意）一意性または構成の仕方から歪対称性 $[X, Y] = -[Y, X]$ がわかる。次回、$\mathrm{Vect}(O)$ の Lie 代数としての意味を考える。

今回の残りでは接束の一般論を議論する。

[C^∞ 写像との関係]

M, N: C^∞ 多様体, $F : M \to N$: C^∞ 写像とする。$p \in M$ について写像 F の微分 $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ が定義できていた。写像

$$dF := \amalg_{p\in M}(dF)_p : TM \to TN, \quad v \in T_pM \mapsto (dF)_p(v) \in T_{F(p)}N,$$

を考える。

補題 6.8. *$dF : TM \to TN$ は C^∞ 写像である。*

証明. $\dim M = m$, $\dim N = n$ とし、N の chart (O, ψ, W) と M の chart (U, φ, V) を $U \subset F^{-1}(O)$ となるようにとる。このとき、可換図式

$$\begin{array}{ccc} TM|_U & \xrightarrow{dF} & TN|_O \\ {\scriptstyle\widehat{\varphi}}\big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\big\downarrow{\scriptstyle\widehat{\psi}} \\ V \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

において、下の横の写像は $(x, u) \mapsto (\psi F\varphi^{-1}(x), J(\psi F\varphi^{-1})_x u)$ であり、C^∞ である。そこで dF は $TM|_U$ 上で C^∞ である。このような U で M を覆うことができるから、dF は TM 全体で C^∞ である。 □

補題 4.7 より $d1_M = 1_{TM} : TM \to TM$ であり、C^∞ 写像の列 $F \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} L$ について

$$d(G \circ F) = (dG) \circ (dF) : TM \to TN \to TL$$

である。とくに $F: M \to N$ が C^∞ 微分同相ならば、$dF: TM \to TN$ も C^∞ 微分同相である。

[部分多様体の接束]

次に $M \subset N$: C^∞ 部分多様体とする。包含写像を $i: M \hookrightarrow N, p \in M \mapsto p \in N,$ とする。

補題 6.9. 包含写像の微分 $di: TM \to TN|_M \subset TN$ によって

$$TM \underset{\text{submfd}}{\subset} TN|_M \underset{\text{submfd}}{\subset} TN$$

と見ることができる。とくに $di: TM \to TN$ は C^∞ 埋め込みである。

証明. $\forall p \in M, \exists (U_p, \varphi_p, V_p)$: chart of N, s.t., $p \in U_p$, $M \cap U_p = {\varphi_p}^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ である。このとき、$\widehat{\varphi_p}: TN|_{U_p} \overset{\cong}{\to} V_p \times \mathbb{R}^n$ は C^∞ 微分同相であるが、

$$TN|_{M\cap U_p} = \widehat{\varphi_p}^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^n)$$
$$TM|_{M\cap U_p} = \widehat{\varphi_p}^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^m \times \{0\})$$

となる。したがって、いずれも C^∞ 部分多様体である。 □

とくに C^∞ 写像 $F: N \to L$ について $q \in L$ が F の正則値であるならば

$$T(F^{-1}(q)) = \coprod_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{Ker}(dF)_p \underset{\text{submfd}}{\subset} TN|_{F^{-1}(q)}$$

がなりたつ。

例. $TS^n = \{(p, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1};\ p \perp v\} \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, C^∞ 部分多様体.
ここで $p \perp v$ は Euclid 内積についての直交を表す。

証明. $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ について $F(x) := \sum_{i=1}^{n+1} {x_i}^2$ とおくと、$F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ は 1 を正則値にもち、$F^{-1}(1) = S^n$ である。任意の $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ について $(dF)_p(v) = 2{}^t pv$ であるから、TS^n は上のように表される。 □

とくに、C^∞ 微分同相

$$TS^n \times \mathbb{R} \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \cong (S^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$$
$$((p, v), \lambda) \mapsto (p, v + \lambda p)$$

がなりたつ。ここで、Adams, Bott-Milnor, Kervaire によりベクトル束としての同型 $TS^n \cong S^n \times \mathbb{R}^n$ がなりたつのは $n = 1, 3, 7$ のとき、そのときに限られる。n が偶数のときには、もっと簡単に TS^n と $S^n \times \mathbb{R}^n$ が同相でないことの証明は Thom 類を使えばわかる（付録参照）。

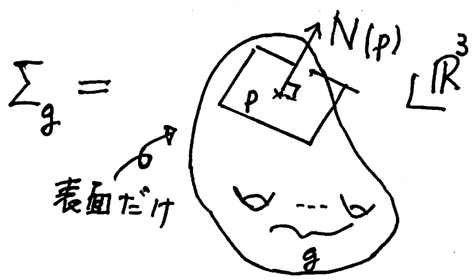
例. 種数 g 閉曲面 Σ_g は下図のように $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているので、外向き法線ベクトル場

$$p \in \Sigma_g \mapsto N(p) \in \mathbb{R}^3, \quad N(p) \perp T_p\Sigma_g, \quad \|N(p)\| = 1$$

がとれる（下図参照）。このとき C^∞ 微分同相

$$T\Sigma_g \times \mathbb{R} \cong \Sigma_g \times \mathbb{R}^3 \cong (\Sigma_g \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$$
$$((p, v), \lambda) \mapsto (p, v + \lambda N(p))$$

がなりたつ。しかし、$g \neq 1$ のとき $T\Sigma_g \not\approx \Sigma_g \times \mathbb{R}^2$ である。（Thom 類をつかう。付録参照。）



[直積の接束]

補題 6.10. M, N を C^∞ 多様体とし、

$$\varpi_1 : M\times N \to M, \quad (x,y)\mapsto x, \quad \text{the first projection},$$
$$\varpi_2 : M\times N \to N, \quad (x,y)\mapsto y, \quad \text{the second projection},$$

とすると、$d\varpi_1\times d\varpi_2 : T(M\times N) \overset{\cong}{\to} TM\times TN$, は C^∞ 微分同相である。

証明. （全単射）図式

$$\begin{tikzcd} T(M\times N) \arrow[r, "d\varpi_1\times d\varpi_2"] \arrow[d, "\pi"'] & TM\times TN \arrow[d, "\pi\times\pi"'] \\ M\times N \arrow[r, equal] & M\times N \end{tikzcd}$$

の可換性により、$\forall(p,q)\in M\times N$ の逆像は $d\varpi_1\times d\varpi_2$ で保たれて、補題 4.10 により、そこでは全単射である。

（局所微分同相）$\dim M = m, \dim N = n$, (U,φ,V): M の chart, $p\in U$, (O,ψ,W): N の chart, $q\in O$, とすると、図式

$$\begin{tikzcd} T(M\times N)|_{U\times O} \arrow[r, "d\varpi_1\times d\varpi_2"] \arrow[d, "\widehat{\varphi\times\psi}"', "\cong"] & TM|_U\times TN|_O \arrow[d, "\cong"', "\widehat{\varphi}\times\widehat{\psi}"] \\ V\times W\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "\cong", "\text{成分いれかえ}"'] & V\times\mathbb{R}^m\times W\times\mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

は可換だから、$d\varpi_1\times d\varpi_2$ は局所微分同相である。以上で補題が示された。 □

例. G: Lie 群, $\mu : G\times G\to G$ を G の積とする。このとき、 TG は μ の微分

$$d\mu : TG\times TG = T(G\times G)\to TG$$

を積とする Lie 群である。詳細は省略する。たとえば、結合則

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd}$$

について写像の微分をとって得られる次の可換図式は $d\mu$ が結合則をみたすことを言っている

$$\begin{tikzcd} TG\times TG\times TG \arrow[r, "d\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times d\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & TG\times TG \arrow[d, "d\mu"] \\ TG\times TG \arrow[r, "d\mu"'] & TG. \end{tikzcd}$$

[**無視してよい附録**[3]]（参考文献: Milnor-Stasheff ‘Characteristic Classes’）

$n \geq 1$ とする。

補題. X を弧状連結 compact Hausdorff 空間とし、$\pi : E \to X$ を向きづけ可能な階数 n の実ベクトル束で、（ベクトル束の構造は保つとは限らない）同相 $E \approx X \times \mathbb{R}^n$ がなりたつとする。このとき

$$\pm\mathrm{Euler}(E) = 0 \in H^n(X;\mathbb{Z})$$

である。

証明. 第一射影 $\varpi_1 : X \times \mathbb{R}^n \to X$ も向きづけ可能な階数 n の実ベクトル束であることに注意する。E は 局所 compact Hausdorff 空間だから、E の一点 compact 化 $\widehat{E} := E \cup \{\infty_E\}$ がとれる。Thom 同型定理

$$H^n(\widehat{E}, \{\infty_E\};\mathbb{Z}) \cong H^0(X;\mathbb{Z})$$

がなりたつが、X は弧状連結だから $H^0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ である。そこで $H^n(\widehat{E}, \{\infty_E\};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であるが、その生成元として Thom 類 $\pm U(E) \in H^n(\widehat{E}, \{\infty_E\};\mathbb{Z})$ がとれる（符号は E の向きによってきまる。）。E に向きをいれたとき、$U(E)$ の制限写像

$$H^n(\widehat{E}, \{\infty_E\};\mathbb{Z}) \to H^n(E, \emptyset;\mathbb{Z}) \cong H^n(X;\mathbb{Z})$$

による値が Euler 類 $\mathrm{Euler}(E) \in H^n(X;\mathbb{Z})$ である。とくに $\mathrm{Euler}(X \times \mathbb{R}^n) = 0 \in H^n(X;\mathbb{Z})$ である。

いま、同相写像 $f : X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} E$ は一点 compact 化の同相

$$\hat{f} : (\widehat{X \times \mathbb{R}^n}) \xrightarrow{\approx} \widehat{E}, \quad \infty_{X \times \mathbb{R}^n} \mapsto \infty_E$$

に延びる。同相写像は同型写像 $\hat{f}^* : H^n(\widehat{E}, \{\infty_E\};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^n((\widehat{X \times \mathbb{R}^n}), \{\infty_{X \times \mathbb{R}^n}\};\mathbb{Z})$ を誘導するから、とくに生成元 $U(E)$ を生成元 $\pm U(X \times \mathbb{R}^n)$ に写す。可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^n(\widehat{E}, \{\infty_E\};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\text{制限写像}"] \arrow[d, "\hat{f}^*"', "\cong"] & H^n(E, \emptyset;\mathbb{Z}) \arrow[d, "f^*"', "\cong"] \\
H^n((\widehat{X \times \mathbb{R}^n}), \{\infty_{X \times \mathbb{R}^n}\};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\text{制限写像}"'] & H^n(X \times \mathbb{R}^n, \emptyset;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

において $U(E)$ は下左を経由すると $\pm\mathrm{Euler}(X \times \mathbb{R}^n) = 0$ となるから、右上の経由を考えて、$\mathrm{Euler}(E) = 0$ を得る。これが示すべきことであった。 □

Poincaré-Hopf の定理を使うと、基本類 $[S^n]$, $[\Sigma_g]$ について $\langle \mathrm{Euler}(TS^n), [S^n] \rangle = 1 + (-1)^n$ は n が偶数のとき 0 ではなく、$\langle \mathrm{Euler}(T\Sigma_g), [\Sigma_g] \rangle = 2 - 2g$ は $g \neq 1$ のとき 0 ではない。したがって、これらの場合には $TS^n \not\approx S^n \times \mathbb{R}^n$ および $T\Sigma_g \not\approx \Sigma_g \times \mathbb{R}^2$ である。

[3] ビデオでは解説しません。

[例題演習]

例題演習 第 8 回

$n \in \mathbb{Z}$ とする。$U = V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}P^1$ とし、$(s, [x_0{:}x_1]) \in U$ と $(t, [y_0{:}y_1]) \in V$ が $st = 1$ かつ $[y_0{:}y_1] = [x_0{:}s^n x_1]$ であるとき $(s, [x_0{:}x_1]) \sim (t, [y_0{:}y_1])$ となる最小の同値関係を $\sim$ とする。$M_n = (U \amalg V)/\!\sim$ と定める。$U_0 := \{(s, [x_0{:}x_1]) \in U;\ x_0 \neq 0\}$ 上の座標 (s_0, ξ_0), $s_0 := s$, $\xi_0 := x_1/x_0$, について U_0 上の C^∞ vector 場 $\partial/\partial s_0$ および $\partial/\partial \xi_0$ を考える。

(1) M_n が Hausdorff 空間であることを示せ。

(2) M_n が C^∞ 多様体であることを示せ。

(3) U_0 上の C^∞ vector 場 $\partial/\partial s_0$ および $\partial/\partial \xi_0$ について、それぞれ M_n 全体の上の C^∞ vector 場に拡張するための $n \in \mathbb{Z}$ の必要充分条件を求めよ。