

幾何学 I

第7回

河澄響矢

今回の内容:

§4. 接空間 (のこり) : 横断性

§5. 埋め込みとはめ込み: はめ込み, 埋め込み, 陰函数定理の 'dual', 埋め込み像は部分多様体である, 隆起函数, compact 多様体の Euclid 空間への埋め込み.

§4. 接空間 (のこり)

[横断性]

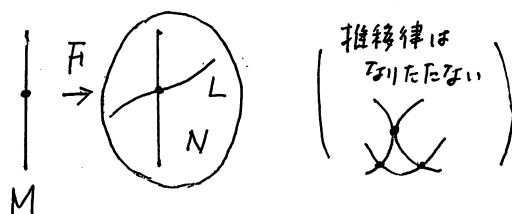
$M, N: C^\infty$ 多様体, $L \subset N: C^\infty$ 部分多様体とする. 包含写像の微分により, $\forall q \in L$ について $T_q L \subset T_q N$ とみなす. $F: M \rightarrow N: C^\infty$ 写像とする.

定義 4.19.

(1) F は L に横断的 (transverse) である. (下図参照).
$$\stackrel{\text{定義}}{\iff} \forall p \in F^{-1}(L), (dF)_p(T_p M) + T_{F(p)} L = T_{F(p)} N.$$

(2) とくに $M \subset N: C^\infty$ 部分多様体のとき,
 M と L は横断的に交わる ($M \pitchfork L$ と書く).

$$\stackrel{\text{定義}}{\iff} \text{包含写像 } i: M \hookrightarrow N \text{ は } L \text{ に横断的である.}$$

$$\iff \forall p \in M \cap L, T_p M + T_p L = T_p N.$$
(これは M と L について対称な条件であるが, 反射律も推移律もなりたたない。)たとえば $L = \{q\} \subset N$ (一点集合) のとき、 F は $\{q\}$ に transverse である。 $\iff q$ は F の正則値である。

定理 4.20. 定義 4.19(1) の状況で

(1) $F^{-1}(L) \subset M: C^\infty$ 部分多様体で次がなりたつ

$$\dim F^{-1}(L) = \dim M - \dim N + \dim L.$$

(2) $\forall p \in F^{-1}(L), T_p F^{-1}(L) = (dF)_p^{-1}(T_{F(p)} L).$

証明. $\dim M = m, \dim N = n, \dim L = l$ とする. $\forall p_0 \in F^{-1}(L)$ のある開近傍で $F^{-1}(L)$ が M の C^∞ 部分多様体であることを示せばよい. このことを正則値の逆像に関する定理 4.14 に帰着して証明する. $q_0 := F(p_0) \in L$ とおく. $L \subset N$ は C^∞ 部分多様体だから

 $\exists (O, \psi, W) : \text{chart of } N$ s.t., $q_0 \in O, \psi(q_0) = 0, L \cap O = \psi^{-1}(\mathbb{R}^l \times \{0\}).$

となる。商写像

$$\varpi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / (\mathbb{R}^l \times \{0\}) \xrightarrow{\text{同一視}} \mathbb{R}^{n-l}$$

$$(0, u) \longmapsto u$$

をもちいると、合成写像 $\varpi \circ \psi : O \rightarrow \mathbb{R}^{n-l}$ は 0 を正則値にもち、

$$L \cap O = (\varpi \circ \psi)^{-1}(0)$$

である。とくに $\forall q \in L \cap O$ について

$$d(\varpi \circ \psi)_q(T_q N) = T_0 \mathbb{R}^{n-l} \quad \text{および}$$

$$T_q L = \text{Ker } d(\varpi \circ \psi)_q$$

である。ここで $p_0 \in F^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} M$ であるが、

$$F^{-1}(L) \cap F^{-1}(O) = F^{-1}(L \cap O) = F^{-1}(\varpi \circ \psi)^{-1}(0) = (\varpi \circ \psi \circ F)^{-1}(0)$$

となる。一方、仮定により、 $\forall p \in F^{-1}(L) \cap F^{-1}(O)$ について

$$T_{F(p)} N = (dF)_p(T_p M) + T_{F(p)} L = (dF)_p(T_p M) + \text{Ker } d(\varpi \circ \psi)_{F(p)}$$

であるが、この両辺に $d(\varpi \circ \psi)_{F(p)}$ を施して

$$T_0 \mathbb{R}^{n-l} = d(\varpi \circ \psi \circ F)_p(T_p M)$$

つまり $\varpi \circ \psi \circ F : F^{-1}(O) \rightarrow \mathbb{R}^{n-l}$ は 0 を正則値にもつ。

ゆえに $F^{-1}(O) \cap F^{-1}(L) = (\varpi \circ \psi \circ F)^{-1}(0) \subset L$ は C^∞ 部分多様体である。とくに次元は $m - (n - l) = m - n + l$ である。接空間については

$$T_p F^{-1}(L) = \text{Ker}(d(\varpi \circ \psi \circ F)_p) = (dF)_p^{-1} \text{Ker}(d(\varpi \circ \psi)_p) = (dF)_p^{-1}(T_{F(p)} L)$$

となる。これで定理が示された。 $\square$

補題 4.21. 定義 4.19(2) の状況で、さらに L は compact で M は N の閉集合であり、 $\dim L + \dim M = \dim N$ であるとする。このとき、 $L \cap M$ は有限集合である。

証明. $M \overset{\text{closed}}{\subset} N$ だから、 $L \cap M$ は compact 集合 L の閉集合であり compact となる。仮定から $L \cap M$ は 0 次元多様体であり、離散的である。これらをあわせて $L \cap M$ は有限集合となる。 $\square$

§5. 埋め込みとはめ込み

[埋め込みとはめ込み]

 $M, N: C^\infty$ 多様体、 $F: M \rightarrow N: C^\infty$ 写像とする。**定義 5.1.** $F: C^\infty$ はめ込み (immersion) ($F: M \looparrowright N$ とも書く。) $\xLeftrightarrow{\text{定義}} \forall p \in M, (dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N: \text{単射}.$ **定義 5.2.** $F: C^\infty$ 埋め込み (embedding, imbedding) $\xLeftrightarrow{\text{定義}} 1) F: C^\infty$ はめ込み かつ2) $F: M \rightarrow F(M): \text{同相}$ **例.** (1) $M \subset N: C^\infty$ 部分多様体のとき、包含写像 $i: M \hookrightarrow N$ は C^∞ 埋め込みである (補題 4.12)。(2) 単射はめ込みであっても、埋め込みとは限らない。 $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ の点は $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について $(x, y) \bmod \mathbb{Z}^2$ と表される。実数 $a \in \mathbb{R}$ について、写像

$$F_a: \mathbb{R} \rightarrow T^2, \quad x \mapsto (x, ax) \bmod \mathbb{Z}^2$$

を考える。 F_a ははめ込みである。実際、 $\forall x \in \mathbb{R}$ について

$$(dF_a)_x: T_x \mathbb{R} = \mathbb{R} \rightarrow T_{F_a(x)} T^2 = \mathbb{R}^2$$

$$u \mapsto \left. \frac{d}{dt} (x + tu, ax + atu) \right|_{t=0} = (u, au)$$

は単射だからである。さらに、

$$F_a: \text{単射} \iff a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

である。実際、 $(x, ax) \equiv (x', ax') \pmod{\mathbb{Z}^2}$ とすると、 $\exists p, \exists q \in \mathbb{Z}, x' - x = p, a(x' - x) = q$ となり、とくに $ap = q$ となる。ここで $p = 0$ のときは $x' = x$ であり、 $p \neq 0$ のときは $a = q/p \in \mathbb{Q}$ である。□さらに $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき F_a は中への同相ではなく、 $\overline{F_a(\mathbb{R})} = T^2$ である

ことが知られている。証明はたとえば [松本] pp.163-166 を参照。

[陰関数定理の ‘dual’]

定理 5.3 (陰関数定理の ‘dual’) $M, N: C^\infty$ 多様体、 $\dim M = m, \dim N = n, F: M \rightarrow N: C^\infty$ 写像、 $p \in M$ とし、 $(dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ は単射であるとする。このとき、

$$\begin{aligned} & \exists (U, \varphi, V): \text{chart of } M, \exists (O, \psi, W): \text{chart of } N, \\ & \text{s.t. } p \in U, F(p) \in O, \varphi(p) = 0, \psi(F(p)) = 0, F(U) \subset O, \\ & \forall (x_1, \dots, x_m) \in V, (\psi F \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となる。

証明. 定理 1.16 に帰着する。必要なら平行移動を施して

$$\begin{aligned} \exists(U_0, \varphi_0, V_0) : \text{chart of } M, \varphi_0(p) = 0, \\ \exists(O_0, \psi_0, W_0) : \text{chart of } N, \psi_0(F(p)) = 0 \end{aligned}$$

である。 $U_0 \cap F^{-1}(O_0)$ をあらためて U_0 とおき、 $F(U_0) \subset O_0$ としてよい。

いま、 $V_0 \subset \mathbb{R}^m$, $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ であるが、 $\psi_0 F \varphi_0^{-1} : V_0 \rightarrow W_0$ は C^∞ 写像であり、 $\psi_0 F \varphi_0^{-1}(0) = 0$ をみたす。 $(dF)_p$ は単射と仮定しているから $J(\psi_0 F \varphi_0^{-1})_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ は単射である。

したがって、定理 1.16 が $\psi_0 F \varphi_0^{-1}$ に適用できて

$$\begin{aligned} 0 \in \exists V_1^{\text{open}} \subset V_0, 0 \in \exists W_1^{\text{open}} \subset W_0, 0 \in \exists W_2^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^n, \exists \psi_1 : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2, C^\infty \text{ diffeo} \\ \text{s.t. } \psi_1(0) = 0, (\psi_0 F \varphi_0^{-1})(V_1) \subset W_1, \\ (\psi_1 \psi_0 F \varphi_0^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in V_1, \end{aligned}$$

となる。そこで $(U, \varphi, V) = (\varphi_0^{-1}(V_1), \varphi_0|_{\varphi_0^{-1}(V_1)}, V_1)$, $(O, \psi, W) = (\psi_0^{-1}(W_1), \psi_1 \psi_0, W_2)$ とおけばよい。□

[はめ込みの‘普遍性’]

補題 5.4. $L, M, N: C^\infty$ 多様体, $F : M \rightarrow N: C^\infty$ はめ込み, $G : L \rightarrow M$: 連続写像について

$$G : C^\infty \iff F \circ G : C^\infty$$

である

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ \uparrow G & \nearrow F \circ G & \\ L & & \end{array}$$

証明. $(\Rightarrow) F : C^\infty$ より明らか。

$(\Leftarrow) F \circ G : C^\infty$ とする。 $\forall q \in L$ のまわりで G が C^∞ であることを示す。

$$\exists(Y, \chi, E) : \text{chart of } L, \text{s.t.}, q \in Y, \chi(q) = 0 \in E$$

であるが、定理 5.3 により $\exists(U, \varphi, V) : \text{chart of } M, \exists(O, \psi, W) : \text{chart of } N, \text{s.t.},$

$$\begin{aligned} G(q) \in U, F(G(q)) \in O, \varphi(G(q)) = 0, F(U) \subset O, \psi F G(q) = 0, \\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in V, (\psi F \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

である。 G は連続だから、 $q \in G^{-1}(U) \cap Y^{\text{open}} \subset L$ である。そこで $G^{-1}(U) \cap Y$ 上で G が C^∞ であることを示す。ここで $l = \dim L, m = \dim M$ とすると $\forall y \in \chi(G^{-1}(U) \cap Y)^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^l$ について

$$\psi F G \chi^{-1}(y) = (g_1(y), \dots, g_m(y), 0, \dots, 0)$$

と表されるが、 $F \circ G : C^\infty$ より

$$1 \leq \forall j \leq m, g_j : \chi(G^{-1}(U) \cap Y) \rightarrow \mathbb{R} \text{ は } C^\infty \text{ である。}$$

このとき $\varphi G \chi^{-1}(y) = (g_1(y), \dots, g_m(y))$ であり、これも C^∞ である。ゆえに G は q のまわりで C^∞ である。□

(注意) ここで G が連続であるという仮定は必要である。

たとえば、 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ について $F: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$, は C^∞ はめ込みである。写像 $G: S^1 \rightarrow S^1, \exp(i\theta), 0 \leq \theta < 2\pi, \mapsto \exp(i\theta/2)$, は連続ではないが、 $F \circ G = 1_{S^1}$ は C^∞ である。

[埋め込みと部分多様体]

定理 5.5. $M, N: C^\infty$ 多様体、 $F: M \rightarrow N: C^\infty$ 写像について次は同値である。

(a) F は C^∞ 埋め込みである。

(b) $F(M) \subset N: C^\infty$ 部分多様体であり、 $F: M \rightarrow F(M)$ は C^∞ 微分同相写像である。

証明. $(b) \Rightarrow (a)$. 定義 5.2 のあとの例 (1) で述べた。

$(a) \Rightarrow (b)$. $\dim M = m, \dim N = n$ とする。定理 5.3 により $\forall p \in M$ について

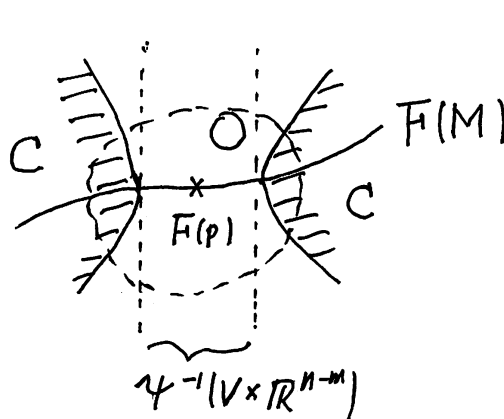
$$\begin{aligned} &\exists(U, \varphi, V) : \text{chart of } M, \exists(O, \psi, W) : \text{chart of } N, \\ &\text{s.t. } p \in U, \varphi(p) = 0, F(U) \subset O, \psi(F(p)) = 0, \\ &\forall(x_1, \dots, x_n) \in V, (\psi F \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

となる。 $M \setminus U \overset{\text{closed}}{\subset} M$ であって、 F は中への同相だから、 $F(M \setminus U) \overset{\text{closed}}{\subset} F(M)$ つまり $\exists C \overset{\text{closed}}{\subset} N, F(M) \cap C = F(M \setminus U)$ である。そこで

$$\begin{aligned} O' &:= (O \setminus C) \cap \psi^{-1}(V \times \mathbb{R}^{n-m})^{\text{open}} \subset N, \\ W' &:= \psi(O')^{\text{open}} \subset W^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

とおく (下図参照)。このとき次がなりたつ

$$F(M) \cap O' = (\psi|_{O'})^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$



等式の証明. (⊃). $q \in (\text{右辺})$ とすると $q \in O'$ である。ある $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ によって $\psi(q) = (y, 0)$ と表されるが、 $(y, 0) = \psi(q) \in V \times \mathbb{R}^{n-m}$ により $y \in V$ であり、 $\varphi^{-1}(y) \in U \overset{\text{open}}{\subset} M$ となる。 $(\psi F \varphi^{-1})(y) = (y, 0) = \psi(q)$ かつ ψ 単射ゆえ $q = F(\varphi^{-1}(y)) \in F(M)$ である。ゆえに $q \in (\text{左辺})$ である。

(⊂). 左辺の任意の元は、ある $r \in F^{-1}(O') \subset M$ によって $F(r)$ と表される。 $F(r) \in O' \subset O \setminus C$ より $r \in U$ ゆえに $\varphi(r) \in V$ である。そこで $\psi(F(r)) = \psi F \varphi^{-1}(\varphi(r)) = (\varphi(r), 0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ である。したがって $F(r) \in (\psi|_{O'})^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = (\text{右辺})$ となる。□

かくして $F(M) \subset N$ は C^∞ 部分多様体であり、 $\dim F(M) = m = \dim M$ である。 $F: M \rightarrow F(M)$ は C^∞ 全単射である。一方、任意の $p \in M$ について $(dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} F(M)$ は同じ次元のベクトル空間の間の単射つまり同型である。ゆえに逆写像定理によって $F: M \rightarrow F(M)$ は局所 C^∞ 微分同相となる。したがって、 $F: M \rightarrow F(M)$ は C^∞ 微分同相である。□

次の系では多様体の Hausdorff 性をつかう。

系 5.6. $M, N: C^\infty$ 多様体とし、 M は compact で $F: M \rightarrow N$ は C^∞ はめ込みかつ単射であるとする。このとき、 $F: M \rightarrow N$ は C^∞ 埋め込みで、 $F(M) \subset N$ は C^∞ 部分多様体であり、 $F: M \rightarrow F(M)$ は C^∞ 微分同相である。

証明. M は compact であり、 N は Hausdorff だから $F(M)$ も Hausdorff である。そこで、連続全単射 $F: M \rightarrow F(M)$ は同相である。つまり $F: M \rightarrow N$ は中への同相である。あとは定理 5.5 による。□

[微分幾何とトポロジーの用語の違い]

(注意) 微分幾何とトポロジーでは用語が異なる。ここで、「正則埋め込み」、「正則部分多様体」の正則は英語では regular である。

微分幾何	はめ込み	埋め込み	正則埋め込み	部分多様体	正則部分多様体
トポロジー	はめ込み	単射はめ込み	埋め込み	単射はめ込みの像	部分多様体

[compact 多様体の Euclid 空間への埋め込み]

ここからの目標は次の定理である。(複素多様体とは顕著に異なる。)

定理 5.7. 任意の compact C^∞ 多様体 M について充分大きい $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ と C^∞ 埋め込み $F: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ が存在する。

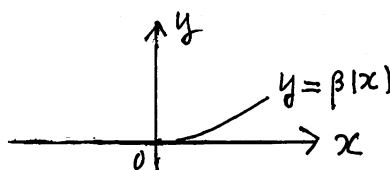
(注意) M が compact でなくても、第二可算公理をみたせば次の定理がなりたつ¹。

Whitney の埋め込み定理. M, N : 第二可算公理をみたす C^∞ 多様体であって不等式 $2 \dim M + 1 \leq \dim N$ をみたすとする。このとき、任意の連続写像 $M \rightarrow N$ は C^∞ 埋め込みで (一様に) 近似できる²。

定理 5.7 の証明の準備に限らず次は重要である。

隆起函数. まず、次で定義される函数 $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える (下図参照)。

$$\beta(x) := \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$



¹証明は田村一郎「微分位相幾何学」定理 4.15 などを参照。

²単に埋め込めるといっている定理 5.7 よりずっと強いことを言っている。

補題 5.8. β は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ である。

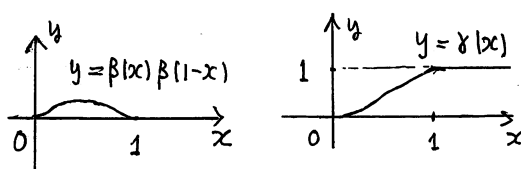
証明のあらすじ. $\forall m \in \mathbb{Z}, \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h^m} \exp(-1/h) = 0$ であることをつかう。とくに $m = 1$ と
して $\beta'(0) = 0$ である。また $x > 0$ について $\beta'(x) = \frac{1}{x^2} \exp(-1/x)$ である。これをつづけていくと任意の $n \geq 1$ について x の多項式 $P_n(x)$ が存在して

$$\beta^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{2n}} P_n(x) \exp(-1/x)$$

となる。したがって $x \downarrow 0$ のとき $\frac{1}{x}(\beta^{(n)}(x) - 0) = \frac{1}{x^{2n+1}} P_n(x) \exp(-1/x) \rightarrow 0$ となる。これが示したいことである。□

C^∞ 関数 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める (下図参照)。

$$\gamma(x) := \left(\int_0^x \beta(t) \beta(1-t) dt \right) / \left(\int_0^1 \beta(t) \beta(1-t) dt \right).$$



$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ とする。その Euclid ノルムは $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$ で定義されている。 $0 < \rho < r$ とする。 $x \in \mathbb{R}^m$ について

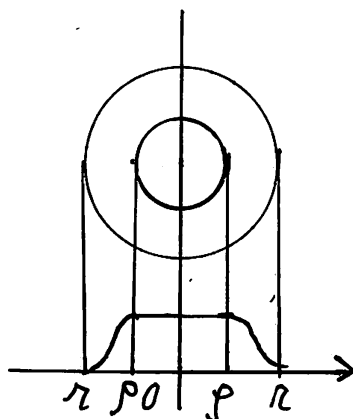
$$\chi(x) = \chi_{\rho, r}(x) := \gamma\left(\frac{r - \|x\|}{r - \rho}\right) \quad (\geq 0)$$

と定める。

$$\|x\| \geq r \Rightarrow \frac{r - \|x\|}{r - \rho} \leq 0 \Rightarrow \chi(x) = 0$$

$$\|x\| \leq \rho \Rightarrow \frac{r - \|x\|}{r - \rho} \geq 1 \Rightarrow \chi(x) = 1$$

となっている (下図参照)。



ここだけの記号として $a \in \mathbb{R}^m$ について

$$B_m(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^m; \|x - a\| \leq r\},$$

$$\overline{B}_m(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^m; \|x - a\| \leq r\},$$

と定義する。後者は compact である。このとき $\{x \in \mathbb{R}^m; \chi_{\rho, r}(x) \neq 0\} \subset \overline{B}_m(0, r)$ である。

次の補題では C^∞ 多様体 M が Hausdorff であることを使う。

補題 5.9. M を m 次元 C^∞ 多様体とし、 (U, φ, V) を M の chart, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 関数とする。ここで、compact 部分空間 $K \subset V$ が存在して、 f はその外側では 0 つまり $f|_{V \setminus K} = 0$ であると仮定する。このとき、次で定義される関数 $\hat{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ である

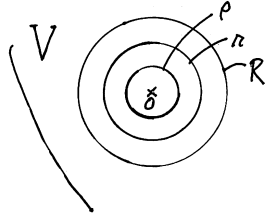
$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(\varphi(x)), & \text{if } x \in U, \\ 0, & \text{if } x \in M \setminus U. \end{cases}$$

証明. φ は同相写像で $K \subset V$ だから $\varphi^{-1}(K)$ は compact である。 M は Hausdorff だから $\varphi^{-1}(K) \subset^{\text{closed}} M$ である。したがって $\{M \setminus \varphi^{-1}(K), U\}$ は M の開被覆である。この開被覆の開集合それぞれの上で $\hat{f}$ は C^∞ だから M 全体で $\hat{f}$ は C^∞ である。□

とくに $0 < \rho < r < R$ であって $B_m(0, R) \subset V$ のとき

$$\hat{\chi}(x) := \begin{cases} \chi_{\rho, r}(\varphi(x)), & \text{if } x \in U, \\ 0, & \text{if } x \in M \setminus U \end{cases}$$

は M 上の C^∞ 関数である（下図参照）。



定理 5.7 bis. 任意の compact C^∞ 多様体 M について充分大きい $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ と C^∞ 埋め込み $F: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ が存在する。

証明. $m = \dim M$ とする。次がなりたつ。

$$\forall p \in M, \exists (U_p, \varphi_p, B_m(0, 3)) : \text{chart of } M, \text{ s.t., } \varphi_p(p) = 0.$$

このことの証明. $\exists (U, \varphi, V)$: chart of M , s.t., $\varphi(p) = 0$ である。 $0 = \varphi(p) \in V \subset^{\text{open}} \mathbb{R}^m$ だから $\exists r = r_p > 0, B_m(0, r) \subset V$ である。

$$U_p := \varphi^{-1}(B_m(0, r)) \subset V,$$

$$\varphi_p(q) := \frac{3}{r}\varphi(q), \quad (q \in U_p),$$

とおけば $\varphi_p(p) = \frac{3}{r}\varphi(p) = 0$ であって、 $(U_p, \varphi_p, B_m(0, 3))$ は M の chart である。実際、 $\varphi \circ \varphi_p^{-1}, \varphi_p \circ \varphi^{-1}$ はともに C^∞ だからである。□

$\bigcup_{p \in M} \varphi_p^{-1}(B_m(0, 1)) = M$ は compact だから

$$\exists p_1, \dots, \exists p_n \in M, \quad \bigcup_{i=1}^n \varphi_{p_i}^{-1}(B_m(0, 1)) = M$$

となる。 $1 \leq i \leq n$ について

$$U_i := U_{p_i}, \quad \varphi_i := \varphi_{p_i},$$

$$\chi_i(q) := \begin{cases} \chi_{1,2}(\varphi_i(q)) = \gamma\left(\frac{2-\|\varphi_i(q)\|}{2-1}\right) = \gamma(2 - \|\varphi_i(q)\|), & \text{if } q \in U_i, \\ 0, & \text{if } q \in M \setminus U_i \end{cases}$$

とおく。 $\chi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 関数である。同様に C^∞ 写像 $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$\psi_i(q) := \begin{cases} \chi_i(q)\varphi_i(q), & \text{if } q \in U_i, \\ 0, & \text{if } q \in M \setminus U_i \end{cases}$$

と定める。これらをあわせて

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^{(m+1)n}, \quad q \mapsto F(q) := (\psi_1(q), \dots, \psi_n(q), \chi_1(q), \dots, \chi_n(q))$$

と定める。この F が望む性質をもつことを確かめる。

単射性. $F(p) = F(q)$ とする。ある i について $p \in \varphi_i^{-1}(B_m(0, 1)) \subset U_i$ である。このとき $\chi_i(q) = \chi_i(p) = 1 \neq 0$ だから $q \in \varphi_i^{-1}(B_m(0, 2)) \subset U_i$ である。 $\chi_i(q) = \chi_i(p) = 1$ により

$$\varphi_i(p) = \chi_i(p)\varphi_i(p) = \psi_i(p) = \psi_i(q) = \chi_i(q)\varphi_i(q) = \varphi_i(q)$$

となる。ゆえに $p = q$ である。

中への同相. M は compact, $F(M) \subset \mathbb{R}^{(m+1)n}$ は Hausdorff だから、連続全単射 $F : M \rightarrow F(M)$ は同相である。

C^∞ はめ込み. 任意の $q \in M$ について、ある i について $q \in \varphi_i^{-1}(B_m(0, 1)) \subset U_i$ である。そこで q の近傍で $\psi_i = \varphi_i$ となり、 $(d\psi_i)_q = (d\varphi_i)_q : T_q M \xrightarrow{\cong} T_{\psi_i(q)} \mathbb{R}^m$ は同型とくに単射である。そこで、 $(dF)_q = (\dots, (d\psi_i)_q, \dots) : T_q M \rightarrow T_{F(q)} \mathbb{R}^{(m+1)n}$ も単射である。

以上で F が望む性質をみたすことがわかり、定理が示された。□

次回から vector 場と接束を解説する。

[例題演習]

例題演習 第7回

3次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ の部分空間

$$X = \{[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{C}P^3; z_1 z_4 - z_2 z_3 = z_1 z_3 - z_2^2 = z_2 z_4 - z_3^2 = 0\}$$

が、 $\mathbb{C}P^1$ からの、ある C^∞ 埋め込みの像となることを示せ。とくに X は $\mathbb{C}P^3$ の C^∞ 部分多様体である。(Veronese 埋め込みと呼ばれるものの一例である。)