

幾何学 I

第 5 回

河澄響矢

今回の内容:

§3. 多様体の例 (後半): 離散群の作用, 自由作用, 固有不連続, Lie 群の離散部分群, 離散群作用による商多様体, lens 空間, Fuchs 群, torsion-free.

§4. 接空間 (前半): 点 $p \in M$ を通る曲線の同値類としての接ベクトル $\in T_p M$, $(\partial/\partial x_i)_p$, $(\partial f/\partial x_i)(p)$, $(df)_p$, $(dx_i)_p$, 余接空間 $T_p^* M$.

§3. 多様体の例 (後半)

[離散位相をもつ群の作用]

Γ を群とする。離散位相をいれて 0 次元 Lie 群とみなす。 C^∞ 多様体 M について

$$\Gamma \curvearrowright M : C^\infty \text{ 左作用}$$

$\stackrel{\Gamma: \text{離散的}}{\iff}$ 群準同型 $\Gamma \rightarrow \text{Diff}(M) := \{\varphi : M \rightarrow M; C^\infty \text{ 微分同相写像}\}$ が与えられている。

がなりたつ。また、位相空間 X について

$$\Gamma \curvearrowright X : \text{連続左作用}$$

$\stackrel{\Gamma: \text{離散的}}{\iff}$ 群準同型 $\Gamma \rightarrow \text{Homeo}(X) := \{\varphi : M \rightarrow M; \text{同相写像}\}$ が与えられている。

がなりたつ。

(注意) (1) これらの同値変形は Γ が離散的な場合に限られる。

(2) $x \in X$ における Γ の isotropy subgroup を $\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma; \gamma x = x\} \subset \Gamma$ と表す。このとき

$$\Gamma \curvearrowright X : \text{自由 (free)} \stackrel{\text{定義}}{\iff} \forall x \in X, \Gamma_x = \{1\}$$

である。

(3) 商写像

$$\pi : X \rightarrow X/\Gamma, \quad x \mapsto x \bmod \Gamma$$

は開写像である (前回やった)。(左作用なので X/Γ ではなく $\Gamma \backslash X$ と書くべき。)

[固有不連続]

X が局所 compact Hausdorff 空間で¹、連続作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が与えられているとする。ここでも Γ には離散位相が入っているものとする。

定義 3.7. $\Gamma \curvearrowright X$: 固有不連続 (真性不連続, properly discontinuous)

$\stackrel{\text{定義}}{\iff} \forall K \subset X: \text{compact}, \#\{\gamma \in \Gamma; K \cap \gamma(K) \neq \emptyset\} \leq \infty$.

(注意) (1) このとき $\forall x \in X, \#\Gamma_x \leq \infty$ である ($K = \{x\}$ ととる)。とくに Γ が torsion free (単位元以外に有限位数の元をもたない) ならば、 $\Gamma \curvearrowright X$ は free となる。

(2) Γ が有限群ならば、つねに $\Gamma \curvearrowright X$ は固有不連続である。

例. $n \geq 1$ とする。作用 $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (\gamma, x) \mapsto \gamma + x \in \mathbb{R}^n$ によって定義する。この作用は明らかに free であり、 $\mathbb{Z}^n$ は torsion free である。さらに固有不連続で

¹たとえば位相多様体は局所 compact Hausdorff 空間である。第 3 回資料 p.1, 註 2 参照。

ある。実際、任意の compact 部分空間 $K \subset \mathbb{R}^n$ について、充分大きい $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとると $K \subset]-N, N[^n$ となる。そこで $\{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n; K \cap \gamma(K) \neq \emptyset\} \subset \{|\forall \gamma_j| \leq 2N\}$ は有限集合である。

命題 3.8. 定義 3.7 の状況で商空間 X/Γ は Hausdorff 空間である。

証明. $x_1, x_2 \in X$, $\pi(x_1) \neq \pi(x_2) \in X/\Gamma$ とする。 X は局所 compact だから

$$\exists K_1, \exists K_2 \subset X \text{ compact 部分空間, s.t. } x_1 \in K_1^\circ, x_2 \in K_2^\circ$$

となる。ここで K_1°, K_2° はそれぞれ K_1, K_2 の X における内部とする。

$K_1 \cup K_2$ は compact で $\Gamma \curvearrowright X$ は固有不連続だから集合

$$\{\gamma \in \Gamma; (K_1 \cup K_2) \cap \gamma(K_1 \cup K_2) \neq \emptyset\}$$

は有限集合である。これを $= \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ とおく。 $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ だから

$$1 \leq \forall j \leq m, \quad x_1 \neq \gamma_j x_2$$

である。このとき次がなりたつ

$$(*) \quad x_1 \in \exists U \subset K_1^\circ, x_2 \in \exists V \subset K_2^\circ, \text{ s.t. } \forall \gamma \in \Gamma, U \cap \gamma V = \emptyset.$$

(*) の証明. X は Hausdorff 空間だから

$$1 \leq \forall j \leq m, x_1 \in \exists U_j \subset K_1^\circ, x_2 \in \exists V_j \subset K_2^\circ, \text{ s.t. } U_j \cap \gamma_j V_j = \emptyset$$

である。そこで $U := \bigcap_{j=1}^m U_j \ni x_1, V := \bigcap_{j=1}^m V_j \ni x_2$ とおくと、これらは X の開集合であって、任意の $1 \leq j \leq m$ について $U \cap \gamma_j V \subset U_j \cap \gamma_j V_j = \emptyset$ であり、任意の $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ について $U \cap \gamma V \subset (K_1 \cup K_2) \cap \gamma(K_1 \cup K_2) = \emptyset$ である。 $\square$

ゆえに $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ であるが、 π は開写像なので $\pi(x_1) \in \pi(U) \subset X/\Gamma, \pi(x_2) \in \pi(V) \subset X/\Gamma$ となる。つまり $\pi(U), \pi(V)$ は $\pi(x), \pi(y)$ を分離する開近傍である。命題が示された。 $\square$

さっきの例 $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ の一般化として

補題 3.9. Lie 群 G の部分群 Γ について次の四つの条件は互いに同値である。

- (a) G の部分空間としての Γ の相対位相は離散的である。
- (b) G における単位元 1 の開近傍 O であって $\Gamma \cap O = \{1\}$ を満たすものが存在する。
- (c) G における単位元 1 の開近傍 O_1 であって、任意の $x \in G$ について $\sharp(\Gamma \cap xO_1) \leq 1$ を満たすものが存在する。
- (d) Γ に (相対位相とは別に) 離散位相を入れたとき、積による G への作用 $\Gamma \times G \rightarrow G, (\gamma, x) \mapsto \gamma x$, は固有不連続である。

証明. (a) $\Rightarrow$ (b): Γ の相対位相で $\{1\}$ が開集合であることから明らか。

(b) $\Rightarrow$ (c): 連続写像 $\nu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x^{-1}y$, を考える。(b) の開集合 O をとる。 $\nu^{-1}(O)$ は $(1, 1) \in G \times G$ の開近傍だから開集合 $O_1 \subset G$ であって $1 \in O_1$ および $O_1 \times O_1 \subset \nu^{-1}(O)$ を満たすものがとれる。この O_1 が望む性質をみたす。実際、もし

$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \cap xO_1$ ならば、 $\gamma_2^{-1}\gamma_1 = (x^{-1}\gamma_2)^{-1}(x^{-1}\gamma_1) \in \nu(O_1 \times O_1) \subset O$ だから $\gamma_1 = \gamma_2$ となるからである。

(c) $\Rightarrow$ (a): 任意の $\gamma \in \Gamma$ について $\{\gamma\} = \Gamma \cap \gamma O_1$ は Γ の開集合である。

(c) $\Rightarrow$ (d): 任意の compact 集合 $K \subset G$ をとる。 $L := \nu(K^{-1} \times K^{-1}) = \{xy^{-1}; x, y \in K\}$ は再び compact である。(c) の O_1 をとる。 $L \subset \bigcup_{x \in L} xO_1$ であり、 L は compact だから、ある $x_1, x_2, \dots, x_m \in L$ が存在して $L \subset \bigcup_{i=1}^m x_i O_1$ となる。 $\#(\Gamma \cap L) \leq \sum \#(\Gamma \cap x_i O_1) \leq m$ である。いま $\gamma \in \Gamma$ が $K \cap \gamma K \neq \emptyset$ であるとする。ある $x, y \in K$ について $x = \gamma y$ となる。このとき $\gamma = xy^{-1} \in L$ つまり $\gamma \in \Gamma \cap L$ となる。したがって集合 $\{\gamma \in \Gamma; K \cap \gamma K \neq \emptyset\} \subset \Gamma \cap L$ は有限集合である。

(d) $\Rightarrow$ (b): C^∞ 多様体 G の局所 compact 性により、compact 集合 $K \subset G$ であって $1 \in \overset{\circ}{K}$ をみたすものが存在する。集合 $\{\gamma \in \Gamma; K \cap \gamma K \neq \emptyset\} \setminus \{1\}$ は有限集合だから、これを $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ とおく。 $O := \overset{\circ}{K} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ とおけば、これは G の開集合であって (b) をみたす。

以上で補題の証明が完成した。 $\square$

[自由固有不連続作用による商多様体]

定理 3.10. 離散位相をもつ群 Γ が m 次元 C^∞ 多様体 M に自由かつ固有不連続に C^∞ 作用しているとする。商写像を $\pi: M \rightarrow M/\Gamma, x \mapsto x \bmod \Gamma$, と表す。

このとき、商空間 M/Γ は m 次元 C^∞ 多様体で、 π は C^∞ 写像かつ C^∞ 局所微分同相写像であり、次をみたす。

(1) $O \subset M/\Gamma$ から C^∞ 多様体 N への写像 $f: O \rightarrow N$ について次の同値がなりたつ²

$$f: C^\infty \text{ 写像} \iff f \circ \pi: \pi^{-1}(O) \rightarrow N: C^\infty \text{ 写像}$$

(2) $\forall x \in M, \pi(x) \in \exists O \subset M/\Gamma$,

$\exists \Phi: \pi^{-1}(O) \xrightarrow{\cong} O \times \Gamma: \Gamma$ -同変³ C^∞ 微分同相写像, s.t., 次の図式は可換になる⁴

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(O) & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & O \times \Gamma \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & O. & \end{array}$$

(3) C^∞ 多様体 L について群 Γ を直積 $M \times L$ に、 $\gamma(x, y) := (\gamma x, y), \gamma \in \Gamma, (x, y) \in M \times L$, によって作用させると次の C^∞ 微分同相がなりたつ

$$(M \times L)/\Gamma \cong (M/\Gamma) \times L.$$

定理を証明する前に例をみておく。

²ここから、 π が C^∞ 写像となる M/Γ 上の C^∞ 多様体の構造の一意性がわかる。

³一般に、集合 X と Y に群 Γ が作用しているとき、写像 $f: X \rightarrow Y$ が Γ -同変 (Γ -equivariant) であるとは、条件

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in X, f(\gamma x) = \gamma f(x)$$

をみたすことをいう。いまの場合、 Γ の M への作用は $\pi^{-1}(O)$ への作用を定める。また、 $(p, \gamma_0) \in O \times \Gamma$ に $\gamma \in \Gamma$ が $\gamma(p, \gamma_0) = (p, \gamma\gamma_0)$ によって作用しているものとする。

⁴(無視してよい註) この Φ を局所自明化として、 $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$ は正規被覆空間また主 Γ 束の構造をもつ。

例 3.11. さっきの $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ について $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (S^1)^n = T^n$: n 次元トーラス

例 3.12. $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$, $k \bmod 2 : x \in S^n \mapsto (-1)^k x \in S^n$, は自由作用であり、 $S^n/(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{R}P^n$.

例 3.13. $n \geq 2$ とし $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$ とみなす。整数⁵ $p \geq 2$ とし、 $\zeta_p := \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ とする。 p と互いに素な整数 $q_2, \dots, q_n$ によって作用 $\mathbb{Z}/p \curvearrowright S^{2n-1}$ を

$$k \bmod p : (z_1, z_2, \dots, z_n) \in S^{2n-1} \mapsto (\zeta_p^k z_1, \zeta_p^{q_2 k} z_2, \dots, \zeta_p^{q_n k} z_n) \in S^{2n-1}$$

によって定義すると、自由な作用になっている。 $q_2, \dots, q_n$ が p と互いに素だからである。この作用の商空間を

$$L(p, q_2, \dots, q_n) := S^{2n-1}/(\mathbb{Z}/p)$$

と表し、レンズ空間 (lens space) とよぶ。

例 3.14. $\Gamma \triangleleft G$ を Lie 群 G の離散的な正規部分群とする。 G は C^∞ 多様体 M に C^∞ に作用し、この作用の Γ への制限は自明と仮定する。このとき、商群 G/Γ は自然なやり方で Lie 群となり (各自で確かめてください)、 G/Γ の M への C^∞ 作用が誘導される

$$(G/\Gamma) \times M \xrightarrow[\cong]{\text{定理 3.10(3)}} (G \times M)/\Gamma \rightarrow M.$$

例の例. $\Gamma = \{\pm I\} \triangleleft SL_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$: 上半平面, について一次分数変換の作用を考える。このとき作用の Γ への制限は自明である。こうして C^∞ 作用

$$PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\} \curvearrowright \mathbb{H}$$

が得られる。 $PSL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群のことを **Fuchs 群** (Fuchsian group) とよぶ。

定理 3.10 の証明. 商写像を $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$, $x \mapsto x \bmod \Gamma$, とする。これは開写像である。また、命題 3.8 で示したように M/Γ は Hausdorff 空間である。

Claim (i). $\forall x \in M$, $x \in \exists U \subset M$, $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ は同相写像である。

Claim (i) の証明. M は局所 compact だから $x \in K^\circ$ (K の内部) をみたく compact 集合 $K \subset M$ がとれる。固有不連続性の仮定から

$$\{\gamma \in \Gamma; K \cap \gamma K \neq \emptyset\} = \{\gamma_0 = 1, \gamma_1, \dots, \gamma_n\} \text{ 相異なる}$$

とできる。作用が自由との仮定から $\Gamma_x = \{1\}$ であり、 $\forall i \geq 1$ について $x \neq \gamma_i x$ である。

$$x \in \exists U \subset K^\circ, \forall i \geq 1, U \cap \gamma_i U = \emptyset$$

とできる。実際、 M が Hausdorff で γ_i が同相写像であることから、

$$x \in \exists U_i \subset K^\circ, x \in \exists V_i \subset K^\circ, U_i \cap \gamma_i V_i = \emptyset$$

となるから $U := \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap V_i)$ とおけばよい。

さらに、この U について

$$\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}, U \cap \gamma U = \emptyset$$

⁵この場合 p を使う習慣だが素数とは限らない。

である。 $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ については $U \cap \gamma U \subset K \cap \gamma K = \emptyset$ となるからである。

そこで $\pi|_U$ は単射である。実際、 $x, y \in U$, $\pi(x) = \pi(y)$ とすると $\exists \gamma \in \Gamma$, $y = \gamma x$ であるが、 $y = \gamma x \in U \cap \gamma U \neq \emptyset$ より $\gamma = 1$ ゆえに $y = x$ となる。

あとは π が連続かつ開であることから分かる。 $\square$

chart の取り方: Claim (i) により、

$\forall x \in M$, $\exists (U_x, \varphi_x, V_x)$: chart of M s.t. $x \in U_x$, $\pi|_{U_x} : U_x \rightarrow \pi(U_x)$ は同相写像である。

Claim (ii). $\{(\pi(U_x), \varphi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1}, V_x)\}_{x \in M}$ は C^∞ atlas になっている。

Claim (ii) の証明. $x, y \in M$ とする。 $\varphi_x(U_x \cap \Gamma U_y)$ および $\varphi_y(U_y \cap \Gamma U_x)$ が $\mathbb{R}^m$ の開集合であることに注意する。つぎの可換図式の下横の写像が C^∞ であることを示せばよい

$$\begin{array}{ccc} & \pi(U_x) \cap \pi(U_y) & \\ \varphi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1} \swarrow \approx & & \searrow \approx \varphi_y \circ (\pi|_{U_y})^{-1} \\ \varphi_x(U_x \cap \Gamma U_y) & \xrightarrow{\quad} & \varphi_y(U_y \cap \Gamma U_x). \end{array}$$

いま、 $U_x \cap \Gamma U_y = \coprod_{\gamma \in \Gamma} (U_x \cap \gamma U_y)$ であるが、それぞれの $U_x \cap \gamma U_y$ の上でこの写像は

$$\varphi_y \circ (\pi|_{U_y})^{-1} (\varphi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1})^{-1} = \varphi_y \circ (\pi|_{U_y})^{-1} \pi \varphi_x^{-1} = \varphi_y \gamma^{-1} \varphi_x^{-1}$$

であり、右辺は C^∞ である。 $\square$

かくして M/Γ には C^∞ 多様体の構造が定まった。さらに、

$\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ は C^∞ 写像かつ局所 C^∞ 微分同相写像

である。実際、 $\varphi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1} \circ \pi \circ \varphi_x^{-1} = 1_{V_x}$ は C^∞ かつ局所 C^∞ 微分同相写像だからである。

以下、(1)(2)(3) を示す。

(1) $O \subset M/\Gamma$ から C^∞ 多様体 N への写像 $f : O \rightarrow N$ を考える。

f が C^∞ ならば $f \circ \pi$ も C^∞ である。実際、 π は C^∞ 写像だからである。

逆に $f \circ \pi : \pi^{-1}(O) \rightarrow N$ が C^∞ であるとする。 N の任意の chart ψ_λ について、 M/Γ の chart $\varphi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1}$ をつかって計算すると

$$\psi_\lambda \circ f \circ (\varphi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1})^{-1} = \psi_\lambda \circ (f \circ \pi) \circ \varphi_x^{-1}$$

となって、仮定から右辺は C^∞ である。ゆえに f は $O \subset M/\Gamma$ 上で C^∞ である。

なお、(1) から M/Γ の C^∞ 多様体としての構造は (U_x, φ_x, V_x) たちのとり方によらない⁶。

(2) U_x のとり方から $\gamma \neq \gamma'$ について $\gamma U_x \cap \gamma' U_x = \emptyset$ だから、disjoint union への分解 $\pi^{-1}\pi(U_x) = \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma U_x$ がなりたつ。もちろんこの disjoint union は Γ 同変な C^∞ 微分同相 $U_x \times \Gamma \xrightarrow{\cong} \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma U_x$, $(y, \gamma) \mapsto \gamma y$, をもつ。 $O := \pi(U_x) \approx U_x$ とし、これらの合成写像 $U_x \times \Gamma \xrightarrow{\cong} \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma U_x = \pi^{-1}\pi(U_x)$ の逆写像を Φ とすればよい。

(3) (1) を局所 C^∞ 微分同相写像 $\pi \times 1_L : M \times L \rightarrow (M/\Gamma) \times L$ に適用してえられる C^∞ 全単射 $(M \times L)/\Gamma \rightarrow (M/\Gamma) \times L$ は局所 C^∞ 微分同相写像だから C^∞ 微分同相である。 $\square$

⁶別のとり方で M/Γ に C^∞ 構造をいれたものを $(M/\Gamma)'$ とする。これも、おなじく (1) の性質をもつ。まず、 M/Γ についての (1) を $O = M/\Gamma$ と $N = (M/\Gamma)'$ に適用すると、恒等写像 $M/\Gamma \rightarrow (M/\Gamma)'$ は C^∞ となる。役割を交換して $(M/\Gamma)'$ の (1) の性質から、恒等写像 $(M/\Gamma)' \rightarrow M/\Gamma$ も C^∞ であることがわかる。したがって、 M/Γ と $(M/\Gamma)'$ は同じ C^∞ 多様体の構造をもつ。

[Möbius 変換]

一般に群 Γ が **torsion-free** であるとは、単位元以外の位数有限の元 (torsion という) をもたないことをいう。たとえば、Möbius 変換 $PSL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ については次がなりたつ。

命題 3.15. $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ を離散部分群とする。つまり Γ は Fuchs 群である。このとき、
 (1) Γ の $\mathbb{H}$ への Möbius 変換の作用は固有不連続である。
 (2) Γ の $\mathbb{H}$ への Möbius 変換の作用が、自由であるためには、 Γ が torsion-free であることが必要充分である。

証明. は今回の例題演習にまわす。 □

(注意) 種数が 2 以上の任意の compact Riemann 面 C は、ある torsion-free な Fuchs 群 $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ によって、複素解析多様体として $C = \mathbb{H}/\Gamma$ と表される (Riemann の写像定理/一意化定理)。

torsion-free 部分群について次の事実が知られている。

定理. (A. Borel, Topology **2**(1963), pp.111-122, Theorem B (i), p.112)

G を連結半単純 Lie 群とし、 $\Gamma \subset G$ を有限生成な離散部分群とする。このとき、 Γ には torsion-free な有限指数の正規部分群 $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$ が存在する。

(たとえば伊原信一郎「リー群の離散部分群」上智大学数学講究録 (1984), 定理 3.7, p.65, も参照。)

なお、 $\Gamma \subset GL_n(\mathbb{Z})$ については古典的に知られている (たとえば K.S. Brown, 'Cohomology of Groups,' Springer, 1982, pp.40-41 を参照。)

§4. 接空間 (前半)

[接空間の考え方]

C^∞ 多様体の間の C^∞ 写像についても「Jacobi 行列」(写像の微分) を考えたい。

接空間とは「Jacobi 行列」の source と target のことである。

接空間を座標のとり方によらない形で定義したい。

この講義では、 C^∞ 曲線に沿う方向微分の考え方を利用して、

C^∞ 曲線の同値類として接ベクトルすなわち接空間の元を定める。

[集合としての接空間の定義]

$m, n \geq 0$, M : m 次元 C^∞ 多様体⁷, $p \in M$, N : n 次元 C^∞ 多様体, $F: M \rightarrow N$: C^∞ 写像とする。

これから定義するもの

接 (ベクトル) 空間 $T_p M (\cong \mathbb{R}^m)$

写像の微分 $(dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ (実線型写像)

$M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ のときには、自然な同一視 $T_p M = \mathbb{R}^m$, $T_{F(p)} N = \mathbb{R}^n$ ができて、この同一視のもとで $(dF)_p = (JF)_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ である (次回の補題 4.11)。

⁷次元を右肩に乗せて M^m という書き方をすることがある。

この状況では Jacobi 行列 $(JF)_p$ が曲線の微分を使って計算できることを思い出す。 p を通る C^∞ 曲線 つまり $c(0) = p$ をみたす C^∞ 写像 $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$, について、速度ベクトル $\dot{c}(0) = \frac{d}{dt}c(t)\big|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ は chain rule により次をみたす

$$(JF)_p \dot{c}(0) = \frac{d}{dt}F(c(t))\big|_{t=0} \in \mathbb{R}^m.$$

いまの事実を踏まえて、一般の C^∞ 多様体 M についても接空間 $T_p M$ を定義する。点 $p \in M$ を通る C^∞ 曲線 $c(t)$ たちの間に同値関係をさだめ、その同値類 $[c]$ を接ベクトル $\in T_p M$ と理解する。その上で

$$(dF)_p : [c] \in T_p M \mapsto [F \circ c] \in T_{F(p)} N$$

と定義するのである。

そこで、この講義だけの記号として

$$\hat{T}_p M := \{c; \varepsilon > 0, c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M : C^\infty \text{ 写像}, c(0) = p\}$$

と定める⁸。この集合 $\hat{T}_p M$ での同値関係を $c, c' \in \hat{T}_p M$ について、関係 $c \sim c'$ を条件

$$\forall f: p \text{ のある開近傍で定義された実数値 } C^\infty \text{ 関数}, \quad \frac{d}{dt}f(c(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(c'(t))\big|_{t=0}$$

によって定義する⁹。反射律、対称律、推移律は明らかになりたつから、 $\sim$ は同値関係である。この同値関係 $\sim$ による商集合を

$$T_p M \stackrel{\text{定義}}{=} \hat{T}_p M / \sim$$

とあらわし、点 p における M の接（ベクトル）空間（tangent (vector) space）とよぶ。 $c \in \hat{T}_p M$ の同値類を

$$\dot{c}(0) = \frac{dc}{dt}(0) = \frac{d}{dt}c(t)\big|_{t=0} = [c] := c \bmod \sim \in T_p M$$

とあらわし、曲線 c に沿う（ c の定める）接ベクトル（tangent vector）とよぶ。

[chart を使って観察する]

いまの構成を chart を使って観察する。 (U, φ, V) を $p \in U$ をみたす M の chart とする。成分にわけて以下のように表す

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, \dots, a_m) := \varphi(p) \in V \subset \mathbb{R}^m \\ \varphi &= (x_1, x_2, \dots, x_m) : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m, \quad q \mapsto \varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), \dots, x_m(q)). \end{aligned}$$

⁸ $c, c' \in \hat{T}_p M$ について、 $0 \in \mathbb{R}$ の充分小さい近傍で一致するとき $c \approx c'$ として同値関係を定義し、この同値関係 $\approx$ による商集合をとる方が、行儀がよいが、これから別の同値関係 $\sim$ をとるので、この講義ではそこまでしない。

⁹この定義は chart の取り方によらないが、どうやって確かめればよいのか？わからない。このあとの補題 4.1 で chart を使って確かめる方法を述べる。

よく使う記号として $p \in U_0^{\text{open}} \subset U$ で定義された C^1 関数 $f: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(q)) \quad (q \in U_0)$$

と表す。つまり

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

である¹⁰。これは C^0 関数である。次がなりたつ

$$(\sharp) \quad \frac{d}{dt}f(c(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{d}{dt}x_i(c(t)) \Big|_{t=0}.$$

実際、chain rule により (左辺) $= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ c)(t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \frac{d}{dt}x_i(c(t)) \Big|_{t=0} =$ (右辺) となるからである。

補題 4.1. $c, c' \in \widehat{T}_p M$ について次は同値である

- (a) $c \sim c'$,
- (b) $1 \leq \forall i \leq m, \quad \frac{d}{dt}x_i(c(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}x_i(c'(t)) \Big|_{t=0}.$

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). x_i は $(p \in)U$ 上の C^∞ 関数である。

(b) $\Rightarrow$ (a). 式 $(\sharp)$ による。

□

これで well-defined な単射

$$(d\varphi)_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \dot{c}(0)(= c \bmod \sim) \mapsto \left(\frac{d}{dt}x_i(c(t)) \Big|_{t=0} \right)_{i=1}^m$$

がえられた。

補題 4.2. 写像 $(d\varphi)_p$ は全単射である。

証明. 全射性を示せばよい。 $\varphi(p) = a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in V \subset \mathbb{R}^m, \forall \lambda = {}^t(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ について $c(t) := \varphi^{-1}(a + \lambda t) = \varphi^{-1}(a_1 + \lambda_1 t, \dots, a_m + \lambda_m t), |t| \ll 1$, とおく。このとき $c \in \widehat{T}_p M$ であって

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 + \lambda_1 t \\ \vdots \\ a_m + \lambda_m t \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda$$

である。全射性が示された。

□

¹⁰微積分での記号 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ と同様に、 x_i だけで決まるのではなく局所座標 $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 全体によって決まることに注意する。微積分と同様に、適切な記号とは言えないが、正確に書こうとすると煩雑になるので、このように書く習慣である。

よく使う記号. $1 \leq i \leq m$ について $e_i = {}^t(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ とし、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p &:= (d\varphi)_p^{-1}(e_i) \in T_p M \\ &= \dot{c}_i(0) \end{aligned}$$

と定める。ただし、 $c_i(t) := \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_m)$ とした。

$$\left\{ (d\varphi)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^m = \{e_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m \quad \text{基底}$$

である。

注意. 記号 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ は函数 x_i だけでなく chart φ 全体に依存する。

(O, ψ, W) : もう一つの chart, $p \in O$, $\psi = (y_1, \dots, y_m)$ について $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap O) \rightarrow \psi(U \cap O)$ は C^∞ 微分同相写像であった。

補題 4.3.

$$(d\psi)_p (d\varphi)_p^{-1} = J(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

とくにこれは実線型同型である。

証明. $a = \varphi(p)$ とおき、任意の $\lambda = {}^t(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ について $c(t) := \varphi^{-1}(a + \lambda t)$ とおくと次がなりたつ

$$(d\psi)_p (d\varphi)_p^{-1}(\lambda) = \frac{d}{dt} \psi(c(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\psi \circ \varphi^{-1})(a + \lambda t) \Big|_{t=0} \stackrel{\text{Chain rule}}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(a) \lambda_i = J(\psi \circ \varphi^{-1})_a \lambda.$$

□

全単射 $(d\varphi)_p : T_p M \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$ が実線型同型となるように $T_p M$ に実ベクトル空間の構造を入れる。(⇐ 補題 4.3 により chart (U, φ, V) のとり方によらない。) そこで

$T_p M$: p における接 (ベクトル) 空間

とよび、 $T_p M$ の元を p における M の接ベクトルとよぶ。また、 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^m$ は $T_p M$ の基底である。とくに $\dim_{\mathbb{R}} T_p M = m = \dim M$ がなりたつ。

[余接空間]

接空間の双対をとって

$T_p^* M := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, \mathbb{R})$ 点 p における M の余接空間 (cotangent space)

と定める。 $\dim_{\mathbb{R}} T_p^* M = \dim_{\mathbb{R}} T_p M = \dim M$ である。

p の近傍で定義された C^1 函数 f について $(df)_p \in T_p^* M$ を

$$(df)_p : \dot{c}(0) \mapsto (df)_p(\dot{c}(0)) := \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0}$$

によって定める。 $(df)_p$ の実線型性は式 (♯) からわかる。次の式がなりたつ。

$$(##) \quad (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p)$$

なぜなら、 $c_i(t) = \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_m)$ とすると $(df)_p$ の定義から、左辺は

$$\left. \frac{d}{dt} f(c_i(t)) \right|_{t=0} \stackrel{(♯)}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} (p) \left. \frac{d}{dt} x_j(c_i(t)) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} (p) \delta_{ij} = (\text{右辺})$$

となるからである。

補題 4.4.

$$(1) \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

$$(2) \quad \{(dx_i)_p\}_{i=1}^m \text{ は } \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^m \text{ の双対基である。とくに } T_p^*M \text{ の基底であり}$$

$$\forall v \in T_p M, \quad v = \sum_{i=1}^m (dx_i)_p(v) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

$$(3) \quad (df)_p = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p) (dx_i)_p.$$

$$(4) \quad (O, \psi, W): \text{ もう一つの chart, } p \in O, \psi = (y_1, \dots, y_m) \text{ について}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) (p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

$$(5) \quad (4) \text{ の状況で、 } U_0^{\text{open}} \subset M \text{ 上で定義された実数値 } C^1 \text{ 関数 } f: U_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ について、}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

が $U_0 \cap U \cap O$ 上の関数の関係式としてなりたつ。

証明. (1) 上述の $c_i(t)$ をつかうと $\frac{d}{dt} x_j(c_i(t)) = \delta_{ij}$ である。

(2) (1) と (##) による。

(3) (2) と (##) により $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ における両辺の値はひとしい。

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^m \left((dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \stackrel{(##)}{=} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) (p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

(5) (4) の両辺に $(df)_p$ を施す。 □

次回は写像の微分 $(dF)_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, $[c] \mapsto [F \circ c]$, を構成する。

[例題演習]

例題演習 第 5 回

上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ への $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ の Möbius 変換による作用を考える。 $A \in SL_2(\mathbb{R})$ の定める $PSL_2(\mathbb{R})$ の元を $\pm A \in PSL_2(\mathbb{R})$ と表すことが多い。 $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{H}$ について、 C^∞ 写像 $\pi: PSL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}$, $g \mapsto gi$, をとる。

$$(1) i \in \mathbb{H} \text{ における } PSL_2(\mathbb{R}) \text{ のイソトロピー群が } PSO(2) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}$$

であることを示せ。

(2) C^∞ 微分同相 $PSL_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H} \times PSO(2)$ を示せ。

(3) 任意の compact 部分集合 $K \subset \mathbb{H}$ について、逆像 $\pi^{-1}(K)$ が compact であることを示せ。

(4) 任意の compact 部分集合 $K \subset \mathbb{H}$ について、 $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ について $K \cap g(K) \neq \emptyset$ であることと $\pi^{-1}(K) \cap g(\pi^{-1}(K)) \neq \emptyset$ であることが同値であることを示せ。

(5) 離散部分群 $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ の一次分数変換による $\mathbb{H}$ への作用が固有不連続であることを示せ。(補題 3.9 は既知としてよい。)

(6) $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ が有限位数ならば、ある $z_0 \in \mathbb{H}$ について $gz_0 = z_0$ となることを示せ。

(7) 離散部分群 $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ の Möbius 変換による $\mathbb{H}$ への作用が自由であるためには、 Γ が torsion free であることが必要充分であることを示せ。