

幾何学 I

第3回

河澄響矢

今回の内容: C^r 多様体, 開部分多様体, 0 次元多様体, C^r 写像, 微分同相写像, 微分同相, 直積, atlas の同値性, 極大 atlas, 部分多様体.

§2. 多様体の定義

[C^r 多様体の定義]

C^∞ 多様体: 微積分ができる位相空間。

- 容れものは不要。diffeo で矛盾なく貼り合っていることがポイント。
- 商空間（貼り合わせ、軌道空間など）について容れもののことは考えたくない。

$m \geq 0, r = 0, 1, 2, \dots, \infty$ とする。

定義 2.1. $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A})$ m 次元 C^r 多様体 (m -dimensional C^r manifold¹⁾)

$\xLeftrightarrow{\text{定義}}$ 0) M : Hausdorff 空間

A : 添字集合

$U_\alpha \subset M, V_\alpha \subset \mathbb{R}^m, \varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha$: 上への同相写像, $(\forall \alpha \in A)$

1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ つまり $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は M の開被覆である。

2) $\forall \alpha, \forall \beta \in A, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)$: C^r 写像。

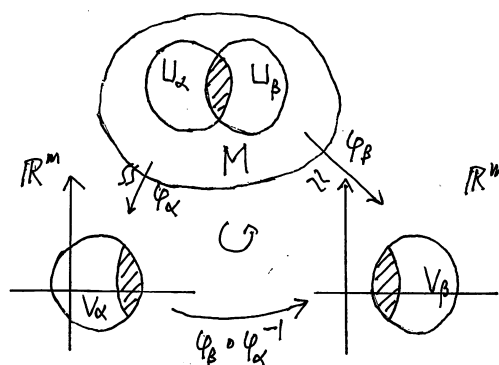
(注意) (1) $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ および $\varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合だから、 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が C^r 写像であるという主張は意味を持つ。

(2) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は C^r 微分同相である。実際、条件 2) で α と β の役割をいれかえると逆写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ も C^r 写像だからである。

(3) $r = 0$ のとき条件 2) は条件 0) から自動的に成り立つ。 C^0 多様体を位相多様体 (topological manifold) とよぶ。

(4) $0 \leq s \leq r$ ならば、 C^r 多様体はすべて C^s 多様体である。とくに位相多様体である。

(5) 位相多様体は局所 compact Hausdorff 空間である²⁾。



¹⁾ manifold は mfd と略記することが多い。 C^r m -manifold という言い方もする。

²⁾ Hausdorff 空間であることは位相多様体の定義に含まれている。任意の開集合 $O \subset M$ と任意の点 $p \in O$ が与えられたとする。 $p \in U_\alpha$ をみたす $(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$ をとる。 φ_α は同相写像だから $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap O)$ は $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ の開集合であり、 $\varphi_\alpha(p)$ が含まれる。そこで、充分小さい $r > 0$ をとると $B_m(\varphi_\alpha(p), r) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O)$ となる。 $K := \varphi_\alpha^{-1}(\overline{B}_m(\varphi_\alpha(p), r/2))$ とおく。 $\overline{B}_m(\varphi_\alpha(p), r/2)$ は V_α に含まれる compact 集合であり、 $\varphi_\alpha(p)$ はその内部に属する。そこで、 φ_α は同相写像だから K は compact であり、 p は K の内部に属する。取り方から $K \subset O$ である。これで M が局所 compact であることが示された。

ことば.

$m = \dim M$ と書いて M の次元 (dimension) とよぶ。

$(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$ を (C^r) chart³, (C^r) 座標近傍 (coordinate neighborhood) とよぶ。

φ_α を (C^r) 局所座標 (local coordinate) とよぶ。

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を (C^r) atlas (座標近傍系) とよぶ。

例 (0) $O \subset \mathbb{R}^m$ について $(O, \{(O, 1_O, O)\})$: m -dim C^∞ mfd.

(0') $O \subset \mathbb{R}^m$ について $(O, \{(U, \varphi, V); U \subset O, V \subset \mathbb{R}^m, \varphi: U \xrightarrow{\cong} V, C^\infty \text{ diffeo.}\})$ も m -dim C^∞ mfd である。今回の後半以降では (0) と (0') を同一視する。

(1)

$$S^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}; \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}, \quad m\text{-sphere}$$

は Hausdorff 空間である⁴。 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ について $\|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$ と表すことにする。 $1 \leq a \leq m+1$ について

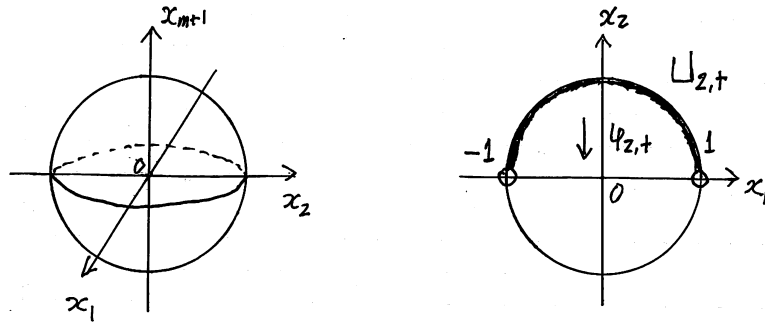
$$U_{a,+} := S^m \cap \{x_a > 0\} \subset S^m, \quad \text{open}$$

$$U_{a,-} := S^m \cap \{x_a < 0\} \subset S^m, \quad \text{open}$$

$$V_{a,\pm} := \{y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m; \|y\| < 1\} \subset \mathbb{R}^m, \quad \text{open}$$

$$\varphi_{a,\pm}: U_{a,\pm} \rightarrow V_{a,\pm}, \quad (x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{a-1}, x_{a+1}, \dots, x_{m+1})$$

と定義する (下図参照)。



各 $\varphi_{a,\pm}$ は同相写像である。連続な逆写像

$$(y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_{a-1}, \pm \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_a, \dots, y_m)$$

がとれるからである。

$a < b$, $U_{a,-} \cap U_{b,+}$ について貼り合わせをしらべる。

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{a,-}(U_{a,-} \cap U_{b,+}) & \xrightarrow{\quad} & \varphi_{b,+}(U_{a,-} \cap U_{b,+}) \\ & \searrow (\varphi_{a,-})^{-1} \quad \nearrow \varphi_{b,+} & \\ & U_{a,-} \cap U_{b,+} & \end{array}$$

³chart の定義は p.7 で与える。

⁴ $\mathbb{R}^{m+1}$ は距離空間で Hausdorff 空間だからである。

において $y = (y_1, \dots, y_m) \in \varphi_{a,-}(U_{a,-} \cap U_{b,+})$ は次のように写像する

$$y \mapsto (y_1, \dots, y_{a-1}, -\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_a, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_{a-1}, -\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_a, \dots, y_{b-2}, y_b, \dots, y_m).$$

この写像は y について C^∞ である。他の場合も同様であるから、

$$(S^m, \{(U_{a,+}, \varphi_{a,+}, V_{a,+}), (U_{a,-}, \varphi_{a,-}, V_{a,-})\}_{a=1}^{m+1})$$

は m 次元 C^∞ 多様体である。これを (exotic S^m との対比で) standard S^m ともよぶ。

[開部分多様体, 0 次元多様体, 非 Hausdorff 局所 Euclid 空間]

補題 2.2. m 次元 C^r 多様体 M の開集合 $O \subset^{\text{open}} M$ は、 M の各 chart を O に制限することにより O は m 次元 C^r 多様体となる。この O を M の開部分多様体 (open submanifold) とよぶ。

証明. 証明のポイントは $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap O}$ が同相写像であって、 $\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap O)}$ が C^r であるということである。

補題 1.19 により Hausdorff 空間 M の部分空間 O は Hausdorff 空間である。 $O = M \cap O = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap O)$ であり、 $U_\alpha \cap O$ は O の開集合である。 $U_\alpha \cap O$ は U_α の開集合だから、 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap O)$ は $V_\alpha^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^m$ の開集合であり $\mathbb{R}^m$ の開集合である。同相写像 φ_α の制限である $\varphi_\alpha : U_\alpha \cap O \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O)$ も同相写像である。任意の $\alpha, \beta \in A$ について $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap O) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap O)$ は C^r である。もともとの $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ が C^r であって、その開部分集合への制限だからである。□

たとえば $O \subset^{\text{open}} \mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の開部分多様体である。

補題 2.3. 位相空間 M について次の同値が成り立つ

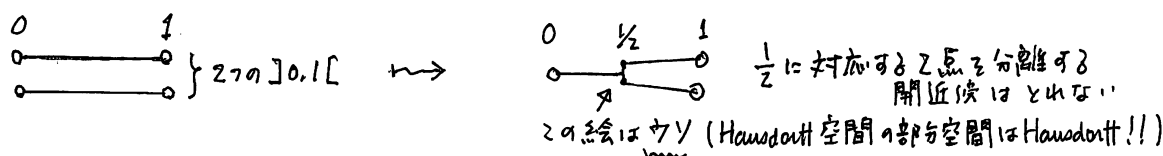
$$M : 0 \text{ 次元位相多様体} \iff M : \text{discrete}.$$

証明. $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ の開集合は、一点集合 $\{0\}$ と空集合 $\emptyset$ のみであることに注意する。

($\Leftarrow$) M が離散位相をもつとする。添字集合 A を M 自身とし、 $x \in A = M$ について $U_x := \{x\}$, $V_x = \{0\}$ とおくと、それぞれ離散位相空間 M および $\mathbb{R}^0$ の開集合であり、 $\varphi_x : x \in U_x \mapsto 0 \in \mathbb{R}^0$ とおけばこれが同相写像である。

($\Rightarrow$) $M \neq \emptyset$ としてよい。任意の $x \in M$ について、ある添字 $\alpha \in A$ が存在して $x \in U_\alpha \subset^{\text{open}} M$ となる。 U_α は $\mathbb{R}^0$ の空でない開集合 V_α すなわち一点集合 $\{0\}$ に同相だから $U_\alpha = \{x\}$ となる。つまり $\{x\}$ は M の開集合である。 $x \in M$ は任意だから M は離散位相をもつ。□

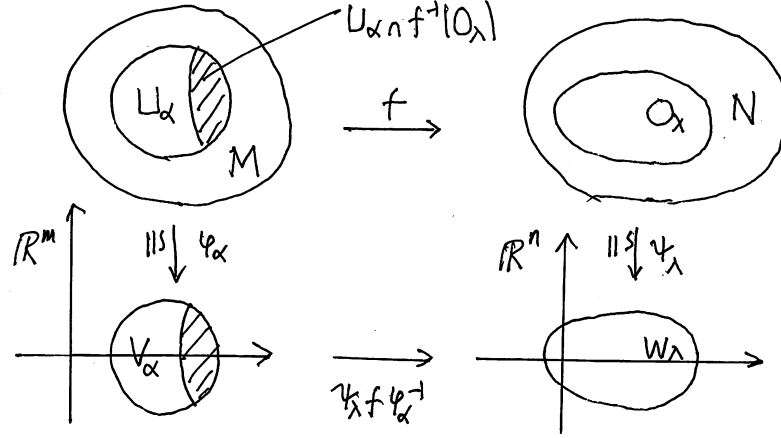
(注意) 位相多様体について Hausdorff 性の仮定をはずしたものを局所 Euclid 空間 (locally Euclidean space) という。位相多様体ではない locally Euclidean space の典型例として、2つの $]0, 1[$ を $]0, \frac{1}{2}[$ だけで貼り合わせた空間 (商空間) がある⁵ (下図参照)。 $\frac{1}{2}$ に対応する2点を分離する開近傍は取れないが、locally Euclidean である。



⁵ (無視してよい註) より一般的な例としては、 C^∞ 関数の芽の層がある。

[C^r 写像, C^r 函数]

C^r 写像. $(M, \mathcal{U}) = (M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A})$ を m 次元 C^r 多様体とし、
 $(N, \mathcal{O}) = (N, \{(O_\lambda, \psi_\lambda, W_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ を n 次元 C^r 多様体とする。



定義 2.4. $f: (M, \mathcal{U}) \rightarrow (N, \mathcal{O})$: C^r 写像 (C^r map)

$\Longleftrightarrow$ 1) $f: M \rightarrow N$ は連続写像である。

2) $\forall \alpha \in A, \forall \lambda \in \Lambda, \psi_\lambda \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda)) \rightarrow W_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ は C^r 写像である (上図参照)。

(注意) (1) f は連続だから $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda)) \subset \mathbb{R}^m$ であり、 $\psi_\lambda f \varphi_\alpha^{-1}$ について C^r 写像ということができる。

(2) 条件 2) はすべての charts についてなりたつと言っているので、このままの形で check するのは難しいことがある。

(3) $r = 0$ のとき、条件 2) は条件 1) から自動的に導かれる。

(4) $(N, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \{(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})\})$ のとき C^r 写像を C^r 函数 (C^r function) とよぶ。

(5) $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ のとき、ここでの C^r 写像 $(M, \{(M, 1_M, M)\}) \rightarrow (N, \{(N, 1_N, N)\})$ と、微積分での C^r 写像 $M \rightarrow N$ とは同値な概念である。

C^r 多様体の定義で貼り合わせの C^r 性を課している理由は次の補題にある。

補題 2.5. 連続写像 $f: M \rightarrow N$ について、次は互いに同値である。

(a) $f: (M, \mathcal{U}) \rightarrow (N, \mathcal{O})$ は C^r 写像である。

(b) $\forall x \in M, \exists \alpha (= \alpha_x) \in A, \exists \lambda (= \lambda_x) \in \Lambda,$

s.t. $x \in U_\alpha, f(x) \in O_\lambda$ かつ

$\psi_\lambda f \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda)) \rightarrow W_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ は $\varphi_\alpha(x)$ の近傍で C^r である。

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). 明らか。

(b) $\Rightarrow$ (a). $\forall \beta \in A, \forall \mu \in \Lambda, \forall x \in U_\beta \cap f^{-1}(O_\mu)$ について $\psi_\mu f \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\beta \cap f^{-1}(O_\mu)) \rightarrow W_\mu \subset \mathbb{R}^n$ が $\varphi_\beta(x)$ の近傍で C^r であることを示せばよい⁶。 x に (b) を適用して $\exists \alpha \in A, \exists \lambda \in \Lambda, \psi_\lambda f \varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(x)$ の近傍で C^r である。そこで、 $\varphi_\beta(x)$ の近傍で

$$\psi_\mu f \varphi_\beta^{-1} = (\psi_\mu \psi_\lambda^{-1})(\psi_\lambda f \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})$$

の右辺の 3 つの写像はいずれも C^r だから左辺も C^r である。 □

⁶写像が C^r であるという性質は局所的だからである。

これにより、 $\forall \alpha \in A$ について $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ は M の開部分多様体 U_α から $\mathbb{R}^m$ の開部分多様体 V_α の上への C^r 微分同相である。 $1_{V_\alpha} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = 1_{V_\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ は C^r だから φ_α は C^r であり、 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ 1_{V_\alpha} = 1_{V_\alpha}$ により φ_α^{-1} も C^r だからである。

補題 2.6. (1) 恒等写像は C^r 写像である。

(2) 二つの C^r 写像の合成は C^r 写像である。

証明. (1) 任意の $\alpha, \beta \in A$ について $\varphi_\beta \circ 1_M \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は C^r 写像である。

(2) 証明のポイントは C^r 性が局所的であることである。

任意の $\alpha \in A$, $\theta \in \Theta$ および $\lambda \in \Lambda$ をとる。

$$\chi_\theta \circ (g \circ f) \circ \varphi_\alpha^{-1} = \chi_\theta \circ g \circ \psi_\lambda^{-1} \circ \psi_\lambda \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

において、右辺は $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda) \cap (g \circ f)^{-1}(Y_\theta))$ の上で C^r である。ここですべての $\lambda \in \Lambda$ を走るから、 C^r は局所的な性質であることと $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda) = M$ により、 $\chi_\theta \circ (g \circ f) \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap (g \circ f)^{-1}(Y_\theta))$ 全体の上で C^r である。これが示すべきことであった。 $\square$

[C^r 微分同相]

$(M, \mathcal{U})$, $(N, \mathcal{O})$ を上述のとおりとする。

定義. $f : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (N, \mathcal{O})$: C^r 微分同相写像 (C^r diffeomorphism)

$\stackrel{\text{定義}}{\iff}$ 1) $f : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (N, \mathcal{O})$: C^r 写像。

2) $\exists g : (N, \mathcal{O}) \rightarrow (M, \mathcal{U})$: C^r 写像

s.t. $g \circ f = 1_M$, $f \circ g = 1_N$.

$\iff$ 1) $f : M \rightarrow N$ は全単射である。

2) $f : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (N, \mathcal{O})$ と $f^{-1} : (N, \mathcal{O}) \rightarrow (M, \mathcal{U})$ はともに C^r 写像である。

局所微分同相写像も同様に定義する。

定義. $(M, \mathcal{U}) \cong (N, \mathcal{O})$ C^r 微分同相 (C^r diffeomorphic⁷)

$\stackrel{\text{定義}}{\iff} \exists f : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (N, \mathcal{O})$: C^r diffeomorphism.

補題 2.7. $r \geq 1$, $M \neq \emptyset$, $M \cong N$: C^r diffeomorphic とするとき $\dim M = \dim N$ である⁸。

証明. $M \neq \emptyset$ により $x \in M$ がとれる。 $\exists \alpha \in A$, $\exists \lambda \in \Lambda$, $x \in U_\alpha$, $f(x) \in O_\lambda$ である。

$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda)) \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ かつ $\psi_\lambda(f(U_\alpha) \cap O_\lambda) \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ であって、

$$\psi_\lambda f \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda)) \rightarrow \psi_\lambda(f(U_\alpha) \cap O_\lambda) \quad \text{および}$$

$$\varphi_\alpha f^{-1} \psi_\lambda^{-1} : \psi_\lambda(f(U_\alpha) \cap O_\lambda) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(O_\lambda))$$

は互いに逆な C^r 写像 ($r \geq 1$) である。そこで補題 1.3 により $\dim M = m = n = \dim N$ となる。 $\square$

⁷語尾の違いに注意。

⁸ (無視してよい註) 補題 2.7 は $r = 0$ でもなりたつ (位相多様体の次元の位相不変性)。任意の $x \in M$ について空間対 $(M, M \setminus \{x\})$ の第 k ホモロジー群は

$$H_k(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \stackrel{\text{切除同型}}{\cong} H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } k = m, \\ 0, & \text{if } k \neq m, \end{cases}$$

をみtas。そこで、もし、 $\exists f : M \xrightarrow{\sim} N$: 同相写像, $M \neq \emptyset$ かつ $n \neq m$ と仮定すると、 $x \in M$ がとれて $\mathbb{Z} \cong H_m(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \stackrel{f_*}{\cong} H_m(N, N \setminus \{f(x)\}; \mathbb{Z}) \stackrel{m \neq n}{\neq} 0$ ゆえに $\mathbb{Z} \cong 0$ となって矛盾が生じる。

[多様体の直積]

$(M, \mathcal{U}) = (M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A})$: m 次元 C^r 多様体,
 $(N, \mathcal{O}) = (N, \{(O_\lambda, \psi_\lambda, W_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$: n 次元 C^r 多様体とする。

補題 2.8. このとき M の chart と N の chart の直積からなる atlas $\{(U_\alpha \times O_\lambda, \varphi_\alpha \times \psi_\lambda, V_\alpha \times W_\lambda)\}_{(\alpha, \lambda) \in A \times \Lambda}$ により $M \times N$ は $(m+n)$ 次元 C^r 多様体となる。

証明. 補題 1.20 により $M \times N$ は Hausdorff 空間である。 $U_\alpha \times O_\lambda$ および $V_\alpha \times W_\lambda$ は、それぞれ $M \times N$ および $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ の開集合である。 $\varphi_\alpha \times \psi_\lambda$ は、連続な逆写像 $\varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\lambda^{-1}$ をもつから、同相写像である。 $\bigcup_{(\alpha, \lambda) \in A \times \Lambda} U_\alpha \times O_\lambda = M \times N$ である。最後に、任意の $(\alpha, \lambda), (\beta, \mu) \in A \times \Lambda$ について $(\varphi_\beta \times \psi_\mu) \circ (\varphi_\alpha \times \psi_\lambda)^{-1} = (\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}, \psi_\mu \psi_\lambda^{-1})$:

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\lambda)((U_\alpha \cap U_\beta) \times (O_\lambda \cap O_\mu)) \rightarrow (\varphi_\beta \times \psi_\mu)((U_\alpha \cap U_\beta) \times (O_\lambda \cap O_\mu))$$

は C^r 写像 $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ と $\psi_\mu \psi_\lambda^{-1}$ を並べたものだから、これも C^r である。□

こうしてえられる $M \times N$ は積多様体とも呼ばれる。射影

$$\begin{aligned} \varpi_1 : M \times N &\rightarrow M, & (x, y) &\mapsto x, & \text{the first projection,} \\ \varpi_2 : M \times N &\rightarrow N, & (x, y) &\mapsto y, & \text{the second projection,} \end{aligned}$$

はいずれも C^r 写像である。たとえば ϖ_1 について、可換図式

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times O_\lambda & \xrightarrow{\varpi_1} & U_\alpha \\ \varphi_\alpha \times \psi_\lambda \downarrow \cong & & \cong \downarrow \varphi_\alpha \\ V_\alpha \times W_\lambda & \xrightarrow{\varpi_1} & V_\alpha \end{array}$$

において、下の $\varpi_1 : V_\alpha \times W_\lambda \rightarrow V_\alpha, (v, w) \mapsto v$, は C^r だからである。 ϖ_2 についても同様である。

補題 2.9. C^r 多様体 L からの二つの写像 $f : L \rightarrow M$ および $g : L \rightarrow N$ の直積

$$f \times g : L \rightarrow M \times N, \quad z \mapsto (f(z), g(z)),$$

を考える。このとき

$$f \times g : C^r \iff (f : C^r \text{ かつ } g : C^r)$$

証明. まず、 $f \times g$ が C^r であるとする。このとき $f = \varpi_1 \circ (f \times g)$ および $g = \varpi_2 \circ (f \times g)$ は C^r である。

つぎに、 f および g が、ともに C^r であるとする。 L の任意の chart $(Y_\theta, \chi_\theta, E_\theta)$ について

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\lambda) \circ (f \times g) \circ \chi_\theta^{-1} = (\varphi_\alpha \circ f \circ \chi_\theta^{-1}) \times (\psi_\lambda \circ g \circ \chi_\theta^{-1})$$

であって、右辺の 2 つの成分はともに C^r だから左辺も C^r である。ゆえに $f \times g$ も C^r である。□

まず、 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ と C^∞ 微分同相である。 $1_{\mathbb{R}^n} \times 1_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ が C^∞ 微分同相写像だからである。積多様体の非自明な典型例としては $n \geq 1$ についての n 次元トーラス⁹がある

$$T^n := \overbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}^n.$$

⁹ トーラスの単数形は torus 複数形は tori

[atlas の同値性]

$(M, \mathcal{U}), (M, \mathcal{O})$ を同一の Hausdorff 空間 M 上の m 次元 C^r 多様体の構造とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A} \\ \mathcal{O} &= \{(O_\lambda, \psi_\lambda, W_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}\end{aligned}$$

であって、ここでは A と Λ はそれぞれ重複はないものとする。写像をその graph と同一視する。一般に集合 X について $\wp(X) := \{X \text{ の部分集合} \}$ と表すと

$$(\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha) \in \wp(U_\alpha \times V_\alpha) \subset \wp(M \times \mathbb{R}^m)$$

とみることができる。重複はないという仮定から

$$\mathcal{U}, \mathcal{O} \subset (\wp(M) \times) \wp(M \times \mathbb{R}^m) (\times \wp(\mathbb{R}^m))$$

とみなすことができる¹⁰。

定義. $\mathcal{U} \cong \mathcal{O}$: $\mathcal{U}$ と $\mathcal{O}$ は同値である。

$\stackrel{\text{定義}}{\iff} 1_M : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (M, \mathcal{O})$ identity は C^r 微分同相である。

$\iff 1_M : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (M, \mathcal{O})$ と $1_M : (M, \mathcal{O}) \rightarrow (M, \mathcal{U})$ はともに C^r 写像である。

$\iff \forall \alpha \in A, \forall \lambda \in \Lambda$ について

$\psi_\lambda \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O_\lambda) \rightarrow \psi_\lambda(U_\alpha \cap O_\lambda)$ および

$\varphi_\alpha \psi_\lambda^{-1} : \psi_\lambda(U_\alpha \cap O_\lambda) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O_\lambda)$ はともに C^r 写像である。

$\iff (M, \mathcal{U} \cup \mathcal{O})$ は C^r 多様体である。

この関係 $\cong$ は反射律、対称律、推移律をみたす。このとき

$$(M, \mathcal{U}) = (M, \mathcal{O})$$

と考えることにして $\forall (O_\lambda, \psi_\lambda, W_\lambda) \in \mathcal{O}$ をも $(M, \mathcal{U})$ の chart とよぶ。

さらに $O \subset^{\text{open}} M, W \subset^{\text{open}} \mathbb{R}^m, \psi : O \xrightarrow{\sim} W$: (上への) 同相写像 について

定義. (O, ψ, W) は $(M, \mathcal{U})$ の (C^r) 座標近傍 (chart) である。

$\stackrel{\text{定義}}{\iff} \psi : (O, \{(U_\alpha \cap O, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap O}, \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O))\}_{\alpha \in A}) \rightarrow (W, \{(W, 1_W, W)\})$: C^r diffeomorphism

$\iff \forall x \in O, \exists \alpha = \alpha_x \in A,$

$\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O) \rightarrow \psi(U_\alpha \cap O)$ および

$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1} : \psi(U_\alpha \cap O) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O)$ は $\varphi_\alpha(x)$ および $\psi(x)$ の近傍で C^r である。

$\iff \forall \alpha \in A,$

$\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O) \rightarrow \psi(U_\alpha \cap O)$ および

$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1} : \psi(U_\alpha \cap O) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap O)$ はともに C^r である。

$\iff (M, \mathcal{U} \cup \{(O, \psi, W)\})$ は C^r 多様体である。

ここだけの記号.

$$\mathcal{U}^{\max} := \{(O, \psi, W); \text{いまの意味で } (M, \mathcal{U}) \text{ の chart である.}\}$$

¹⁰ 右辺の括弧は省略できる。実際、 $p_1(\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha) = U_\alpha$ であって、 φ_α の全射性により $p_2(\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha) = V_\alpha$ だからである。

これを atlas $\mathcal{U}$ の極大 atlas (maximal atlas) とよぶ。このとき、

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{O} \iff \mathcal{O} \subset \mathcal{U}^{\max} \iff \mathcal{O}^{\max} = \mathcal{U}^{\max}$$

である。 C^r 多様体とは、 $(M, \mathcal{U}^{\max})$ のことであると理解する。以下、単に M と書くことにする。

例. (1) $O \subset \mathbb{R}^m$ について (0') で与えた atlas が $\{(O, 1_O, O)\}^{\max}$ である。

(2) (有限次元実 vector 空間) V を m 次元実 vector 空間とする。

このとき実線形同型写像 $\varphi: V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$ がとれる。

φ が同相になるように V に位相をいれる。(とくに V は Hausdorff 空間である。)

$(V, \{(V, \varphi, \mathbb{R}^m)\}^{\max})$ は m 次元 C^∞ 多様体となる。

このとき V 上の位相構造も C^∞ 多様体の構造も φ のとり方によらない。

証明. 別の実線形同型写像 $\psi: V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$ について、 $\varphi\psi^{-1}, \psi\varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ はともに正則行列で表され、とくに C^∞ 写像である。つまり $\{(V, \varphi, \mathbb{R}^m)\} \cong \{(V, \psi, \mathbb{R}^m)\}$ である。□

以下、このやり方で有限次元実 vector 空間を C^∞ 多様体とみなす。

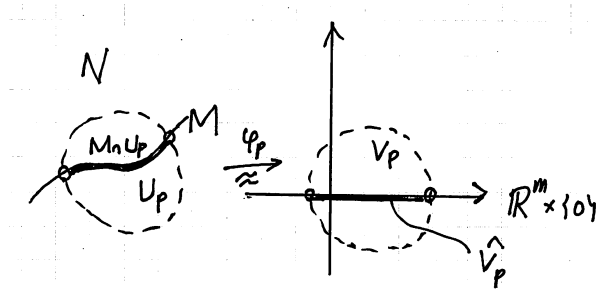
[部分多様体]

以下、簡単のため $r = \infty$ とする。chart と言ったら C^∞ 極大 atlas の元すなわち C^∞ chart のことだとする。

部分多様体 (submanifold) $0 \leq m \leq n$, N : n 次元 C^∞ 多様体とする。

定義 2.10. 部分集合 $M \subset N$ が N の m 次元 C^∞ 部分多様体である。

$\stackrel{\text{定義}}{\iff} \forall p \in M, \exists (U_p, \varphi_p, V_p): N \text{ の chart, s.t. } p \in U_p, M \cap U_p = \varphi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})^{11}.$



例. (0) chart (U_p, φ_p, V_p) は極大 atlas の元であればなんでもよい。 N に C^∞ 多様体の構造を定義するときにとる atlas の元である必要は全くない。

(1) $m = n$ のとき $M \subset N$ つまり開部分多様体に他ならない。

(2) $m = 0$ のとき、任意の $p \in N$ について一点集合 $\{p\}$ は N の 0 次元 C^∞ 部分多様体である。

(3) $N = \mathbb{R}^n$ のときは、定義 1.9 と同じである。

これからしばらく

$$\iota: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto (u, 0)$$

と表す。これももちろん C^∞ 写像である。

¹¹ 補題 1.13 で議論したように $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の m 次元実 affine 部分空間でよい。

補題 2.11. 定義 2.10 の状況で $\widehat{V}_p := \{u \in \mathbb{R}^m; (u, 0) \in V_p\} = \iota^{-1}(V_p)^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^m$ とし、 $\widehat{\varphi}_p: M \cap U_p \rightarrow \widehat{V}_p$ を $\varphi_p|_{M \cap U_p} = \iota \circ \widehat{\varphi}_p$ をみたすものとして定める。つまり、 $q \in M \cap U_p$ について $\varphi_p(q) = (\widehat{\varphi}_p(q), 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$ である。このとき

- (1) $(M, \{(M \cap U_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{V}_p)\}_{p \in M})$ は m 次元 C^∞ 多様体である。
- (2) 包含写像 (inclusion map)

$$i: M \hookrightarrow N, \quad p \mapsto p,$$

は C^∞ 写像であり、次がなりたつ:

$\forall L: C^\infty$ 多様体、 $\forall f: L \rightarrow M$ 写像について

$$f: C^\infty \iff i \circ f: L \rightarrow N: C^\infty.$$

とくに、 M 上の C^∞ 多様体の構造は (U_p, φ_p, V_p) たちの取り方によらない。

$$\begin{array}{ccc} M & \xhookrightarrow{i} & N \\ f \uparrow & \nearrow i \circ f & \\ L & & \end{array}$$

証明. (1) N は Hausdorff だから M も Hausdorff である。 $\widehat{\varphi}_p$ は同相写像である。 $\varphi_p^{-1}|_{V_p \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}$ が連続な逆写像を与えるからである。 $p, p' \in M$ について可換図式

$$\begin{array}{ccc} & M \cap U_{p'} \cap U_p & \\ \widehat{\varphi}_p \swarrow \cong & & \searrow \widehat{\varphi}_{p'} \cong \\ \iota^{-1}(\varphi_p(U_p \cap U_{p'})) & \xrightarrow{\quad} & \iota^{-1}(\varphi_{p'}(U_p \cap U_{p'})) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \varphi_p(U_p \cap U_{p'}) & \xrightarrow{\varphi_{p'} \varphi_p^{-1}} & \varphi_{p'}(U_p \cap U_{p'}) \end{array}$$

を考える。下横の $\varphi_{p'} \varphi_p^{-1}$ は C^∞ だから、中横の写像も C^∞ である。

(2) 可換図式

$$\begin{array}{ccc} M \cap U_p & \xhookrightarrow{i} & U_p \\ \widehat{\varphi}_p \downarrow \cong & & \cong \downarrow \varphi_p \\ \widehat{V}_p & \xrightarrow{\iota} & V_p \end{array}$$

において ι は C^∞ だから i も C^∞ である。

($\Rightarrow$) i が C^∞ であることから明らか。

($\Leftarrow$) $i \circ f$ が C^∞ であるとする。 $\iota \circ (\widehat{\varphi}_p \circ f) = \varphi_p \circ (i \circ f)$ の右辺は C^∞ だから、左辺も C^∞ である。そこで $\widehat{\varphi}_p \circ f$ も C^∞ ゆえに f も C^∞ である。 $\square$

補題 2.12. N を C^∞ 多様体とする。 $M \subset N$ および $L \subset M$ が C^∞ 部分多様体であるとき、 $L \subset M$ も C^∞ 部分多様体である。

証明. $n = \dim N$, $m = \dim M$ および $l = \dim L$ とする。 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{m-l} \times \mathbb{R}^{n-m}$ とみなす。任意の $p \in L$ をとる。仮定により、 N の chart (U_p, φ_p, V_p) と M の chart (U'_p, φ'_p, V'_p) であって、 $p \in U_p$, $p \in U'_p$, $U_p \cap M = \varphi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ およ

び $U'_p \cap L = \varphi'_p{}^{-1}(\mathbb{R}^l \times \{0\})$ をみたすものがとれる。補題 2.11 の証明で導入した $\widehat{\varphi}_p : M \cap U_p \rightarrow \widehat{V}_p = \{u \in \mathbb{R}^m; (u, 0) \in V_p\}$ をとる。 $(M \cap U_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{V}_p)$ は M の chart である。 $O' := (M \cap U_p) \cap U'_p$ および $O := \varphi_p{}^{-1}(\widehat{\varphi}_p(O') \times \mathbb{R}^{n-m})$ とおく。 O' は M における p の開近傍であるから、 $\varphi'_p(O') \overset{\text{open}}{\subset} V'_p \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ かつ $\widehat{\varphi}_p(O') \overset{\text{open}}{\subset} \widehat{V}_p \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ であって $p \in O \overset{\text{open}}{\subset} U_p \overset{\text{open}}{\subset} N$ である。ここで、 $\varphi'_p \circ \widehat{\varphi}_p{}^{-1} : \widehat{\varphi}_p(O') \rightarrow O' \rightarrow \varphi'_p(O')$ は C^∞ 微分同相写像であるから、合成写像

$$\psi := ((\varphi'_p \circ \widehat{\varphi}_p{}^{-1}) \times 1_{\mathbb{R}^{n-m}}) \circ \varphi_p : O \xrightarrow{\varphi_p} \widehat{\varphi}_p(O') \times \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{(\varphi'_p \circ \widehat{\varphi}_p{}^{-1}) \times 1_{\mathbb{R}^{n-m}}} \varphi'_p(O') \times \mathbb{R}^{n-m}$$

は $W := ((\varphi'_p \circ \widehat{\varphi}_p{}^{-1}) \times 1_{\mathbb{R}^{n-m}})((\widehat{\varphi}_p(O') \times \mathbb{R}^{n-m}) \cap V_p) \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ の上への C^∞ 微分同相写像であり、 (O, ψ, W) は p の開近傍で定義された M の chart である。あとは $\psi^{-1}(\mathbb{R}^l \times \{0\} \times \{0\}) = L \cap W$ を示せばよい。まず $q \in W$ が $\psi(q) \in \mathbb{R}^l \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{m-l} \times \mathbb{R}^{n-m}$ であるとする。 $\varphi_p(q) = ((\varphi'_p \circ \widehat{\varphi}_p{}^{-1}) \times 1_{\mathbb{R}^{n-m}})^{-1} \psi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ だから $q \in M$ であり $\varphi_p(q) = (\widehat{\varphi}_p(q), 0)$ となる。そこで $\psi(q) = (\varphi'_p(q), 0) \in \mathbb{R}^l \times \{0\} \times \{0\}$ だから $q \in \varphi'_p{}^{-1}(\mathbb{R}^l \times \{0\}) = L \cap U'_p$ つまり $q \in L \cap W$ となる。逆に、 $q \in L \cap W$ とすると、 $q \in M \cap U'_p$ より $\varphi_p(q) = (\widehat{\varphi}_p(q), 0)$ だから $\psi(q) = ((\varphi'_p \circ \widehat{\varphi}_p{}^{-1}) \times 1_{\mathbb{R}^{n-m}})(\widehat{\varphi}_p(q), 0) = (\varphi'_p(q), 0) \in \mathbb{R}^l \times \{0\} \times \{0\}$ となる。これが示すべきことであつた。

なお、後述するように C^∞ 部分多様体であることと C^∞ 埋め込みの像であることは同値である。そこで、2つの C^∞ 埋め込みの合成は C^∞ 埋め込みであることから、この補題は得られる。□

例 (1) $S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}; \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ であつた。任意の $p = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in S^m$ について、 $\exists x_i \neq 0$ である。たとえば $x_{m+1} > 0$ のとき

$$\begin{aligned} U_p &:= \{(x_1, \dots, x_{m+1}); x_{m+1} > 0, x_1^2 + \dots + x_m^2 < 1\} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{m+1} \\ V_p &:= \{(x_1, \dots, x_{m+1}); x_{m+1} > -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^m x_i^2}, x_1^2 + \dots + x_m^2 < 1\} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{m+1} \\ \varphi_p : U_p &\xrightarrow{\cong} V_p, \quad (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \mapsto \left(x_1, \dots, x_m, x_{m+1} - \sqrt{1 - \sum_{i=1}^m x_i^2}\right) \end{aligned}$$

とおくと (U_p, φ_p, V_p) は $\mathbb{R}^{m+1}$ の chart であつて、 $S^m \cap U_p = \varphi_p{}^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ である。したがって S^m は $\mathbb{R}^m$ の C^∞ 部分多様体である。 $\widehat{\varphi}_p$ は先ほどの $\varphi_{m+1,+}$ に一致する。したがって、この部分多様体としての C^∞ 多様体の構造は、今回の前半でのべた C^∞ 多様体の構造に一致する。

(2) $SO(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元 C^∞ 部分多様体であるから C^∞ 多様体である。とくに $n=2$ のとき次がなりたつ

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}; x^2 + y^2 = 1 \right\} \cong S^1 \subset \mathbb{R}^2.$$

(3) $SU(n) \subset \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ は $n^2 - 1$ 次元 C^∞ 部分多様体であるから C^∞ 多様体である。とくに $n=2$ のとき次がなりたつ

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}; z, w \in \mathbb{C}, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

次回は多様体の例を扱う: $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$, Lie 群, $\mathbb{H}$: Hamilton 四元数 (quaternion)。

[例題演習]

例題演習 第3回

ベクトル $u, v \in \mathbb{R}^3$ の生成する実線型部分空間を $\langle u, v \rangle \subset \mathbb{R}^3$ と表す。 $\langle u, v \rangle = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}^3$ とも書ける。2つの $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の直積 $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2$ の同値関係 $\sim$ を、任意の $u, v, u', v' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ について

$$(u, v) \sim (u', v') \iff \langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle$$

によって定義する。この同値関係による商空間を X とし、標準射影を $\pi: (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2 \rightarrow X$ と表す。また、 $A = \{(u, v) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2; \dim \langle u, v \rangle = 2\}$ とおく。

- (1) X が連結かつコンパクトであることを示せ。
- (2) $\pi(A) \subset X$ がコンパクトであることを示せ。
- (3) $\pi(A) \subset X$ が開集合であることを示せ。
- (4) X は Hausdorff 空間か？証明つきで答えよ。