幾何学 I　第 2 回　河澄響矢

今回の内容: Euclid 空間の部分多様体の定義についての補足, 正則点, 臨界点, 正則値, 臨界値, 特殊線型群, 直交群, 複素多項式写像の Jacobi 行列, 陰函数定理の「dual」, （次回の準備として）Hausdorff 性の復習.

§1. 逆写像定理と Euclid 空間の部分多様体（後半）

[前回の復習と補足]

復習と補足. 以下簡単のため C^∞ で考える。

定理 1.7.bis.（陰函数定理, Implicit function theorem） $0 \le m \le n$ とし、$0 \in O \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする。C^∞ 写像 $F: O \to \mathbb{R}^m$ が、$F(0) = 0$ および $\operatorname{rank}(JF)_0 = m$（つまり $(JF)_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は全射である）とする。（これは、$1 \le \exists k_1 < \cdots < \exists k_m \le n$ について $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k_j}}(0)\right)_{1\le i,j\le m} \neq 0$ であることを意味する。）このとき、

$$\begin{aligned}&0 \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} O,\ 0 \in \exists V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n,\ \exists \varphi : U \overset{\cong}{\to} V : C^\infty \text{ 微分同相写像},\\ &\text{s.t. } \varphi(0) = 0,\\ &\qquad F \circ \varphi^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_m), \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V\end{aligned}$$

となる。（上式右辺は y_m で打ち切って y_{m+1} から y_n までを捨てていることに注意する。）とくに次がなりたつ

$$\{p \in U;\ F(p) = 0 (= F(p_0))\} = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}) (= \varphi^{-1}((\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}) \cap V)).$$

注意 1.8.bis. $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_m\} = \{l_1 < l_2 < \ldots < l_{n-m}\}$ とすると、合成写像

$$V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}) \overset{\varphi^{-1}}{\to} \{p \in U;\ F(p) = 0\} \overset{{}^t(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-m}})}{\longrightarrow} \mathbb{R}^{n-m}$$

は原点 $0 \in V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ の近傍で局所 C^∞ 微分同相的である。

$l \ge 0$ とする。行列 $A \in M(n, m; \mathbb{R}) = \{m \times n\ \mathbb{R}$ 行列 $\} = \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbb{R}$ 線型写像 $\}$ についての条件 $\operatorname{rank} A \ge l$ は 'open condition' である。つまり、

補題 1.12.（rank の半連続性 semi-continuity） 任意の $n, m, l \ge 0$ について

$$\{A \in M(n, m; \mathbb{R});\ \operatorname{rank} A \ge l\} \overset{\text{open}}{\subset} M(n, m; \mathbb{R})$$

である。つまり A を少し摂動 (perturb) しても $\operatorname{rank} A \ge l$ という性質は保たれる[1]。

証明. $A_0 = (a^0_{ij}) \in \{\operatorname{rank} \ge l\}$ つまり $\operatorname{rank} A_0 \ge l$ であるとする。仮定より

$$1 \le \exists i_1 < \cdots < \exists i_l \le m,\ 1 \le \exists j_1 < \cdots < \exists j_l \le n,\ \det(a^0_{i_\alpha j_\beta})_{1\le\alpha,\beta\le l} \neq 0$$

である。ここで

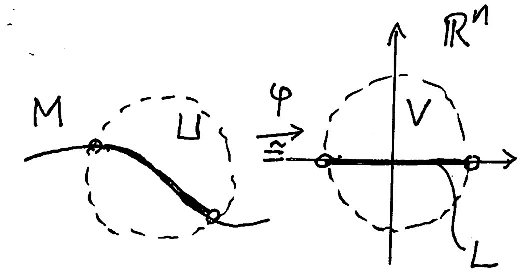
$$f : A = (a_{ij}) \in M(n, m; \mathbb{R}) \mapsto \det(a_{i_\alpha j_\beta})_{1\le\alpha,\beta\le l} \in \mathbb{R}$$

とおくと、これは連続函数だから $A_0 \in \{f \neq 0\} \overset{\text{open}}{\subset} M(n, m; \mathbb{R})$ であるが、$\{f \neq 0\} \subset \{\operatorname{rank} \ge l\}$ であるので、$\{\operatorname{rank} \ge l\}$ は $M(n, m; \mathbb{R})$ における A_0 の近傍である。$A_0 \in \{\operatorname{rank} \ge l\}$ は任意にとれるので、$\{\operatorname{rank} \ge l\}$ は $M(n, m; \mathbb{R})$ の開集合である。 □

[1]ちなみに、closed condition というのは極限をとっても保たれる条件ということである。

定義 1.9.bis. （$\mathbb{R}^n$ の C^∞ submfd[2]） $0 \leq l \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
& M \subset \mathbb{R}^n,\ l\text{-dim. } C^\infty \text{ submfd} \\
\overset{\text{定義}}{\iff}\ & \forall p \in M,\ p \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n,\ \exists V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n,\ \exists \varphi : U \overset{\cong}{\to} V,\ C^\infty \text{ diffeo},\ \text{s.t.}, M \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^l).
\end{aligned}
$$



（注意）空集合 $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ は任意の次元の submfd である。

補題 1.13. 定義 1.9 における $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ は、任意の $L \subset \mathbb{R}^n$ l-dim $\mathbb{R}$-affine subsp におきかえてよい。

証明. $L \subset \mathbb{R}^n$ が l-dim $\mathbb{R}$ **linear** subsp のとき。L の基底 $\{v_1, \ldots, v_l\}$ をとる。これに対して $\exists \{u_1, \ldots, u_{n-l}\} \subset \mathbb{R}^n$, s.t., $\{u_1, \ldots, u_{n-l}, v_1, \ldots, v_l\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。そこで $T := (u_1, \ldots, u_{n-l}, v_1, \ldots, v_l) \in M(n, n; \mathbb{R})$ とおく。$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ 線型同型写像であって、$T(\{0\} \times \mathbb{R}^l) = L$ である。この T を合成すればよい。

l-dim $\mathbb{R}$-affine subsp とは l-dim $\mathbb{R}$-linear subsp を平行移動したものである。 □

系 1.10.bis $n, m \geq 0$, $O \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $F : O \to \mathbb{R}^m$ を C^∞ 写像とし、$q_0 \in \mathbb{R}^m$ とする。さらに、任意の $p \in F^{-1}(q_0)$ について $(JF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は全射である[3]とする。このとき、$F^{-1}(q_0) \subset \mathbb{R}^n$ は $(n-m)$-dim C^∞ submfd である。

（注意）(1) $p_0 \in F^{-1}(q_0)$ について注意 1.8 の $l_1 < \cdots < l_{n-m}$ をとると

$$
{}^t(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-m}}) : F^{-1}(q_0) \to \mathbb{R}^{n-m}
$$

は p_0 のまわりで $F^{-1}(q_0)$ の「C^∞ 局所座標」になっている。

(2) 「局所的には」系 1.10 の逆がなりたつ。（逆写像定理を使う。考えてみてください。）

[正則点と正則値]

正則点と正則値. $n, m \geq 0$, $O \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし、$F : O \to \mathbb{R}^m$ を C^∞ 写像とする。

定義 1.14. $p \in O$ とする。

(1)
$$
\begin{aligned}
& p \text{ は } F \text{ の\textbf{臨界点}（critical point）である} \\
\overset{\text{定義}}{\iff}\ & \operatorname{rank}(JF)_p \lneqq m \iff (JF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ が全射でない}
\end{aligned}
$$

[2] 微分幾何では「正則部分多様体」という。
[3] この条件にこれから名前をつける。

$$(2)\quad \begin{aligned} & p \in O \text{ は } F \text{ の正則点（regular point）である} \\ \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}\ & p \text{ は } F \text{ の臨界点ではない} \quad \Longleftrightarrow \quad (JF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ が全射である} \end{aligned}$$

（注意）(1) $n \lneqq m$ のとき、任意の $p \in O$ は F の臨界点である。

(2) $n = m$ のときは、逆写像定理によって、p が F の正則点であることと、F が p のまわりで局所微分同相であることとは同値である。

定義 1.5. $q \in \mathbb{R}^m$ とする。

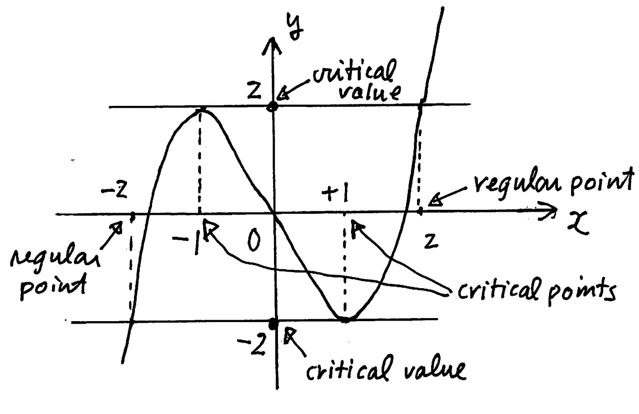
(1)　q は F の**臨界値**（critical value）である $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists p \in F^{-1}(q) : F$ の臨界点

$$(2)\quad \begin{aligned} & q \text{ は } F \text{ の正則値（regular value）である} \\ \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}\ & q \text{ は } F \text{ の臨界値ではない} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall p \in F^{-1}(q),\ \mathrm{rank}\,(JF)_p = m \end{aligned}$$

（注意）(1) 任意の $q \in \mathbb{R}^m \setminus F(O)$ は F の正則値である。

(2) $n \lneqq m$ のとき $\{F$ の臨界値$\} = F(O)$ である。

例. $n = m = 1$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x$, を考える。
臨界点は、$3x^2 - 3 = 0$ を解いて、$x = \pm 1$ である。
臨界値は、$F(\pm 1) = \mp 2$ により、$y = \pm 2$ である。
したがって、正則値全体の集合は $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ である（下図参照）。



系 1.10 の言い換え. $q_0 \in \mathbb{R}^m$ が F の正則値である。
$\Longrightarrow$　$F^{-1}(q_0) \subset \mathbb{R}^n$ は $(n-m)$ 次元 C^∞ 部分多様体である。

[行列群]

行列群. $M_n(\mathbb{R}) := M(n, n; \mathbb{R}) = \{n$ 次実正方行列$\} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ とする。まず、行列式（determinant）$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \mapsto \det A$, が C^∞ 写像であることに注意する。とくに連続だから

$$GL_n(\mathbb{R}) := \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \overset{\text{open}}{\subset} M_n(\mathbb{R})$$

である。これを**一般線型群**（general linear group）とよぶ。つぎに、

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+t & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は A の第 (i,j) 余因子行列式に一致する。とくに、$(J\det)_A \neq 0$ であるための必要充分条件は $\operatorname{rank} A \geq n-1$ である。さらに、$\lambda \in \mathbb{R}$ が $\det$ の正則値であることと $\lambda \neq 0$ は同値である。実際、ゼロ行列 O は $(J\det)_O = 0$ より $\det$ の臨界点であり、$\det(O) = 0 \in \mathbb{R}$ だから $0 \in \mathbb{R}$ は臨界値である。逆に、$\det A \neq 0$ ならば、少なくとも一つの余因子は 0 でないから $(J\det)_A \neq 0$ であり、A は $\det$ の正則点である。とくに $1 \in \mathbb{R}$ は $\det$ の正則値であり

$$SL_n(\mathbb{R}) := \det{}^{-1}(1) \subset M_n(\mathbb{R}), \quad (n^2-1) \text{ 次元 } C^\infty \text{ 部分多様体}$$

である。これを**特殊線型群**（special linear group）とよぶ。$n \geq 2$ のとき $SL_n(\mathbb{R})$ は compact ではない。実際、任意の $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ について対角行列 $\operatorname{diag}(a, a^{-1}, 1, \ldots, 1)$ は $SL_n(\mathbb{R})$ の元であるが、これらは $M_n(\mathbb{R})$ において有界ではないからである。

直交群（orthogonal group）　ここだけの記号として $\operatorname{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{n \text{ 次実対称行列 }\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ とする。C^∞ 写像

$$F : M_n(\mathbb{R}) \to \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto {}^tAA$$

を考える。任意の $A, X \in M_n(\mathbb{R})$ について

$$(JF)_A(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} {}^t(A+tX)(A+tX) = {}^tXA + {}^tAX$$

つまり、$(JF)_A : M_n(\mathbb{R}) \to \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto {}^tXA + {}^tAX$, である。この計算から単位行列 $I = I_n \in \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$ が写像 F の正則値であることがわかる。実際、${}^tAA = I$ とする。任意の対称行列 $Y \in \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$ について $X = \frac{1}{2}AY$ とおけば

$$(JF)_A(X) = {}^tXA + {}^tAX = \tfrac{1}{2}{}^tY{}^tAA + \tfrac{1}{2}{}^tAAY = \tfrac{1}{2}{}^tY + \tfrac{1}{2}Y = Y$$

となる。最後の等式は Y が対称行列であることによる。したがって、$(JF)_A : M_n(\mathbb{R}) \to \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$ は全射である。これが示すべきことであった。

$$O(n) := F^{-1}(I) = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ {}^tAA = I\} \subset M_n(\mathbb{R})$$

と定める。$M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の $(n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)) = \frac{1}{2}n(n-1)$ 次元 C^∞ 部分多様体である。これを直交群とよぶ。

$O(n)$ は compact である。実際、F は連続写像で $\{I\} \subset \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$ は閉集合だから $O(n) = F^{-1}(I)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の閉集合である。また、$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_n(\mathbb{R})$ について、$A \in O(n)$ であることと $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ が標準内積に関する $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることとは同値である。そこで $O(n) \subset (\overline{B}_n(0,1))^n$ となって $O(n)$ は有界である。つまり $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の有界閉集合であり compact である。

[複素多項式の定める部分多様体]

複素多項式. $n, m \geq 1$,

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} {z_1}^{k_1} {z_2}^{k_2} \cdots {z_n}^{k_n}, \quad a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$$

とする。複素多項式 $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ を写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, とみなすことにする。また、

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n, \quad (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \mapsto (x_1 + \sqrt{-1}y_1, \ldots, x_n + \sqrt{-1}y_n) \\ &\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto u + \sqrt{-1}v \end{aligned}$$

と同一視したときの f を

$$f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$$

と書くことにする。これは $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ の多項式だから、C^∞ 写像である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} (x_1 + \sqrt{-1}y_1)^{k_1} \cdots (x_n + \sqrt{-1}y_n)^{k_n} \right) \\ &= \sum k_j a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} (x_1 + \sqrt{-1}y_1)^{k_1} \cdots (x_j + \sqrt{-1}y_j)^{k_j - 1} \cdots (x_n + \sqrt{-1}y_n)^{k_n} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z_j} \\ \frac{\partial f}{\partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} (x_1 + \sqrt{-1}y_1)^{k_1} \cdots (x_n + \sqrt{-1}y_n)^{k_n} \right) \\ &= \sqrt{-1} \sum k_j a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} (x_1 + \sqrt{-1}y_1)^{k_1} \cdots (x_j + \sqrt{-1}y_j)^{k_j - 1} \cdots (x_n + \sqrt{-1}y_n)^{k_n} \\ &= \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial z_j} \end{aligned}$$

ここで $u = \Re f$, $v = \Im f$ とおくと $f = u + \sqrt{-1}v$, $f^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ であって、

$$\frac{\partial u}{\partial y_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)$$

ゆえに Cauchy-Riemann 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v}{\partial y_j} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_j} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \end{cases}$$

がなりたつ[4]

　少し一般化して、複素多項式写像 $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$,

$$F(z_1, \ldots, z_n) = {}^t(f_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_m(z_1, \ldots, z_n)),$$

[4]変数 $\overline{z_j}$ が混ざっていないということ。

を考える。各 $f_i(z_1,\ldots,z_n)$ は複素多項式とする。$F^{\mathbb{R}} := {}^t({f_1}^{\mathbb{R}},\ldots,{f_m}^{\mathbb{R}}) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$ とみなす。$u_i = \Re f_i$, $v_i = \Im f_i$ とおき、簡単のため $(u_i)_{x_j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $(f_i)_{z_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}$ などと表す。このとき、次の Cauchy-Riemann 方程式がなりたつ

$$\begin{cases}(u_i)_{x_j} = (v_i)_{y_j}\\ (u_i)_{y_j} = -(v_i)_{x_j}.\end{cases}$$

補題 1.16 $\forall p \in \mathbb{R}^{2n}$, $\operatorname{rank}(JF^{\mathbb{R}})_p = 2\operatorname{rank}(JF)_p$.

証明. このとき Cauchy-Riemann 方程式により

$$JF^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \ddots \\ & (u_i)_{x_j} & (u_i)_{y_j} & \\ & (v_i)_{x_j} & (v_i)_{y_j} & \\ \ddots & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \ddots \\ & (u_i)_{x_j} & -(v_i)_{x_j} & \\ & (v_i)_{x_j} & (u_i)_{x_j} & \\ \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となる。$A := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ 1 & -\sqrt{-1}\end{pmatrix}$ とおく。$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1}\end{pmatrix}$ であって、

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}(u_i)_{x_j} & -(v_i)_{x_j}\\ (v_i)_{x_j} & (u_i)_{x_j}\end{pmatrix}A^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\\ 1 & -\sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(u_i)_{x_j} & -(v_i)_{x_j}\\ (v_i)_{x_j} & (u_i)_{x_j}\end{pmatrix}A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}(f_i)_{z_j} & \sqrt{-1}(f_i)_{x_j} \\ \overline{(f_i)_{z_j}} & -\sqrt{-1}\overline{(f_i)_{z_j}}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(f_i)_{z_j} & 0 \\ 0 & \overline{(f_i)_{z_j}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & A\end{pmatrix}(JF^{\mathbb{R}})\begin{pmatrix} A^{-1} & & & \\ & A^{-1} & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & A^{-1}\end{pmatrix}$$

は $m \times n$ 個の行列 $\begin{pmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial z_j} & 0 \\ 0 & \overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)}\end{pmatrix}$ をならべた $(2m)\times(2n)$ 行列となる。行と列の入れ替えによって、この行列は $\begin{pmatrix} JF & 0 \\ 0 & \overline{JF}\end{pmatrix}$ に変形できる。ゆえに $\operatorname{rank}(JF^{\mathbb{R}})_p = \operatorname{rank}(JF)_p + \operatorname{rank}(\overline{JF})_p = 2\operatorname{rank}(JF)_p$ である。 □

例. (1) $n \geq 1$, $f(z,w) = z^n + w^n - 1$ とし、

$$C = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ z^n + w^n = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

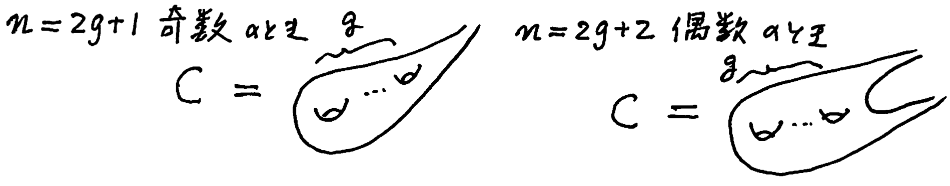
とおく。$Jf = (\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}) = (nz^{n-1}, nw^{n-1})$ であるが、集合 C 上では $Jf \neq (0,0)$ である。つまり f は $0 \in \mathbb{C}$ を正則値にもつ。ゆえに $C \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ は（実）2 次元 C^∞ 部分多様体である[5]。

[5] C を compact 化したものは Fermat curve と呼ばれる。

(2) $n \geq 3$, $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$, $a_k \in \mathbb{C}$, とする。$f(z)$ は n 次多項式である。$h(z,w) := w^2 - f(z)$, $C = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ h(z,w) = 0\}$ とおく。

$$\begin{cases} h_z = -f'(z) \\ h_w = 2w \end{cases}$$

である。ここで $f(z)$ が重根、つまり $f(z) = f'(z) = 0$ をみたす z をもたないと仮定すると、連立方程式 $h_z = h_w = h = 0$ は解をもたない。とくに $C \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ は（実）2 次元 C^∞ 部分多様体である[6]。なお、注意 1.8 により、$C \cap \{w \neq 0\} \overset{\text{局所的}}{=} \{w = \sqrt{f(z)}\}$ では z が局所座標にとれる。また、$C \cap \{f'(z) \neq 0\}$ では陰函数定理により z は w の函数として解けるから、w が局所座標にとれる。実は、C は次のような形をしている（下図参照）。



(3) 複素直交群 $O(n,\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, 実 $n(n-1)$ 次元 C^∞ 部分多様体。
複素特殊線型群 $SL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, 実 $2(n^2-1)$ 次元 C^∞ 部分多様体。
これらについては、さきほどの計算がそのまま使える。しかし、unitary 群

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C});\ {}^t\overline{A}A = I\}$$

については（$O(n)$ と同様であるが）手直しが必要である[7]。$U(n)$ は $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ の実 n^2 次元 C^∞ 部分多様体である[8]。

[陰函数定理の **'dual'**]

陰函数定理の 'dual'

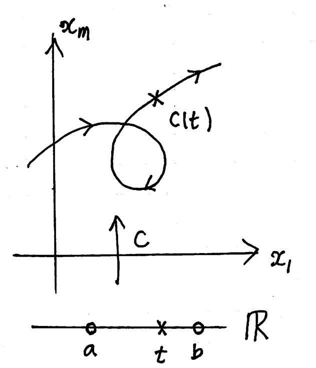
$\mathbb{R}^n$ 内の「なめらかな図形」（C^∞ 部分多様体）の表示の方法:
(1) 零点集合として表す — いままでやってきた。
(2) parameter 表示 — いまから少しだけやる。
(2) の例。開区間 $]a,b[\subset \mathbb{R}$ で定義された C^∞ 写像

$$c :]a,b[\to \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^m$ 内の曲線と見ることができる（下図参照）。

---

[6] C を compact 化したものは超楕円曲線（hyperelliptic curve）と呼ばれる。
[7] A の函数 ${}^t\overline{A}A$ は複素共役を含むので Cauchy-Riemann 方程式をみたさない。
[8] 複素多様体の実次元は偶数であるが、n が奇数のとき n^2 は奇数である。



定理 1.7（陰函数定理の 'dual'[9]） $n, m \geq 0$, $0 \in O \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし C^∞ 写像 $F = {}^t(f_1, \ldots, f_m) : O \to \mathbb{R}^m$ を考える。$F(0) = 0$ をみたし、 $(JF)_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が単射である[10]とする。このとき、

$$\begin{aligned}
&0 \in \exists O_1 \overset{\text{open}}{\subset} O,\ 0 \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m,\ 0 \in \exists V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m,\ \exists \psi : U \overset{\cong}{\to} V,\ C^\infty \text{ diffeo} \\
&\text{s.t. } \psi(0) = 0,\ F(O_1) \subset U, \\
&\qquad (\psi \circ F)(x_1, \ldots, x_n) = {}^t(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in O_1,
\end{aligned}$$

となる。とくに $F(O_1)$ は $\mathbb{R}^m$ の C^∞ 部分多様体である[11]。

証明. $e_i = {}^t(0, \ldots, 0, \overset{\overset{i}{\smile}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq m$, とする。仮定により

$$1 \leq \exists j_1 < \cdots < \exists j_n \leq m,\ \det \left(\frac{\partial f_{j_\alpha}}{\partial x_\beta}(0) \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} \neq 0$$

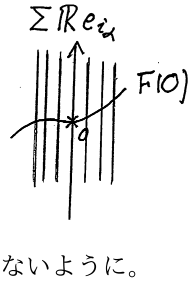
となる。$\{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m}\}$ とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(0), e_{i_1}, \cdots, e_{i_{m-n}} :\ \mathbb{R}^m \text{ の基底}$$

となる。そこで、

$$\Psi : O \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m, \quad (p, t_1, \ldots, t_{m-n}) \mapsto \Psi(p, t_1, \ldots, t_{m-n}) := F(p) + \sum_{\alpha=1}^{m-n} t_\alpha e_{i_\alpha}$$

と定める（下図参照）。ここで $O \times \mathbb{R}^{m-n} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$ とみなす。



[9] 単なる冗談なので、こういう言い方はしないように。
[10] したがって $n \leq m$ となる。
[11] F を O_1 に制限していることに注意する。ここでは U を $U \cap \psi^{-1}(O_1 \times \mathbb{R}^{m-n})$ に制限して考えている。

この Ψ は $\Psi(0)=0$ であるが、

$$\det(J\Psi)_0 = \det\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(0), e_{i_1}, \cdots, e_{i_{m-n}}\right) \neq 0$$

となる。det の中身は $\mathbb{R}^m$ の基底だからである。そこで逆写像定理[12]により

$$0 \in \exists V \overset{\text{open}}{\subset} O \times \mathbb{R}^{m-n} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m,\ 0 \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m,\ \text{s.t.},\ \Psi : V \overset{\cong}{\to} U,\ C^\infty \text{ diffeo}$$

となる。 $\psi := \Psi^{-1} : U \overset{\cong}{\to} V$, C^∞ diffeo, $O_1 := \{p \in O;\ (p,0) \in V$ かつ $\Psi(p,0) \in U\} \overset{\text{open}}{\subset} O$ とおく。このとき $\psi(0)=0$ であり、$\forall(x_1,\ldots,x_n) \in O_1$ について

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \Psi(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0) \in U \quad （よって\ F(O_1) \subset U）$$
$$\psi F(x_1,\ldots,x_n) = \Psi^{-1}\Psi(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0) = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$$

となる。2 行目の式は $(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0) \in V$ による。これが示すべきことであった。 □

注意 1.18. このとき合成写像

$$(f_{j_1},\ldots,f_{j_n}) : O_1 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})} \mathbb{R}^n$$

は局所 C^∞ 微分同相的だから、$(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ は $F(O_1)$ の「局所座標」である。

（注意）F を O_1 に制限してはじめて $F(O_1)$ は部分多様体となる。

(1) F の自己交叉。

(2) F が単射であっても、像が漸近する。

といったことが起こりうるからである。(2) の例としては、無理数 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の定める irrational flow

$$\mathbb{R} \to T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \quad t \mapsto (t, \alpha t) \bmod \mathbb{Z}^2$$

がある。これは像が稠密であることが知られている。

[Hausdorff 性の復習]

最後に、次回の準備として **Hausdorff 性の復習** をおこなう[13]。X を位相空間とする。X が Hausdorff 空間であるとは、

$$\forall x_1 \neq \forall x_2 \in X,\ x_1 \in \exists U_1 \overset{\text{open}}{\subset} X,\ x_2 \in \exists U_2 \overset{\text{open}}{\subset} X,\ \text{s.t. } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

がなりたつ[14]ことを言う。たとえば距離空間は Hausdorff 空間である。とくに $\mathbb{R}^n$ の部分空間は Hausdorff 空間である。

補題 1.19. $A \subset X$ を Hausdorff 空間 X の部分空間（つまり相対位相をいれた部分集合）とするとき、A も Hausdorff 空間である。

証明. $\forall a_1 \neq \forall a_2 \in A$ について、X は Hausdorff 空間だから

$$a_1 \in \exists U_1 \overset{\text{open}}{\subset} X,\ a_2 \in \exists U_2 \overset{\text{open}}{\subset} X,\ \text{s.t. } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

であるが、相対位相の入れ方から $a_1 \in U_1 \cap A \overset{\text{open}}{\subset} A$ および $a_2 \in U_2 \cap A \overset{\text{open}}{\subset} A$ である。もちろん $(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である。 □

---

[12] $O \times \mathbb{R}^{m-n} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ で定義された Ψ に適用する。

[13] Hausdorff 性は大域的な性質であることに注意する

[14] U_1, U_2 を x_1 と x_2 を分離する開近傍とも言う。

補題 1.20. Hausdorff 空間 X_1 と X_2 の直積空間 $X_1 \times X_2$ も Hausdorff 空間である。

証明. $(x_1', x_2') \neq (x_1'', x_2'') \in X_1 \times X_2$ とすると $x_1' \neq x_1''$ または $x_2' \neq x_2''$ である。

$x_1' \neq x_1''$ のとき、X_1 は Hausdorff 空間だから、$x_1' \in \exists U_1' \overset{\text{open}}{\subset} X,\ x_1'' \in \exists U_1'' \overset{\text{open}}{\subset} X,$ s.t. $U_1' \cap U_1'' = \emptyset$ となる。このとき、$(x_1', x_2') \subset U_1' \times X_2 \overset{\text{open}}{\subset} X_1 \times X_2$, $(x_1'', x_2') \subset U_1'' \times X_2 \overset{\text{open}}{\subset} X_1 \times X_2$, $(U_1' \times X_2) \cap (U_1'' \times X_2) = (U_1' \times U_1'') \times X_2 = \emptyset$ である。

$x_2' \neq x_2''$ のときも同様である。 □

Hausdorff 性のいいかえ

補題 1.21. 位相空間 X について、その**対角集合**（diagonal set）$\Delta = \Delta_X := \{(x, x) \in X \times X;\ x \in X\}$ を考える。このとき、

$$X \text{ は Hausdorff である} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \overset{\text{closed}}{\subset} X \times X.$$

証明. $x_1, x_2 \in X$ について、 $x_1 \neq x_2$ であることと $(x_1, x_2) \in X \times X \setminus \Delta$ は同値である。また、部分集合 $U_1, U_2 \subset X$ について、$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ であることと $U_1 \times U_2 \subset X \times X \setminus \Delta$ は同値である。そこで、以下の同値変形ができる

$$\begin{aligned}
& X\text{: Hausdorff 空間} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall (x_1, x_2) \in X \times X \setminus \Delta,\ x_1 \in \exists U_1,\ x_2 \in \exists U_2,\ U_1 \times U_2 \subset X \times X \setminus \Delta \\
\Longleftrightarrow\ & X \times X \setminus \Delta \overset{\text{open}}{\subset} X \times X \\
\Longleftrightarrow\ & \Delta \overset{\text{closed}}{\subset} X \times X.
\end{aligned}$$

□

Hausdorff 性を考える少なくとも 2 つの理由: 系 1.22 と補題 1.23.

系 1.22. 位相空間 Z から Hausdorff 空間 X への 2 つの連続写像 $f, g : Z \to X$ について次がなりたつ

$$\{z \in Z;\ f(z) \neq g(z)\} \overset{\text{open}}{\subset} Z$$
$$\{z \in Z;\ f(z) = g(z)\} \overset{\text{closed}}{\subset} Z.$$

証明. $f \times g : Z \to X \times X,\ z \mapsto (f(z), g(z))$, は連続であり、$\{f \neq g\} = (f \times g)^{-1}(X \times X \setminus \Delta)$ および $\{f = g\} = (f \times g)^{-1}(\Delta)$ がなりたつ。したがって系は補題 1.21 から従う。 □

補題 1.23. Hausdorff 空間 X の compact な部分空間 $K \subset X$ は閉である $K \overset{\text{closed}}{\subset} X$.

証明. $x_0 \in X \setminus K$ とする。X は Hausdorff だから、任意の $y \in K$ について $x_0 \in \exists U_y \overset{\text{open}}{\subset} X$, $y \in V_y \overset{\text{open}}{\subset} X,\ U_y \cap V_y = \emptyset$ である。このとき $\bigcup_{y \in K} V_y \supset K$ で K は compact だから $\exists y_1, \ldots, \exists y_n \in K,\ K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ となる。そこで、$U_0 := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \overset{\text{open}}{\subset} X$ とおくと、$x_0 \in U_0$ かつ $U_0 \cap K \subset U_0 \cap \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} = \emptyset$ となる。ゆえに $U_0 \subset X \setminus K$ であり、$X \setminus K \overset{\text{open}}{\subset} X$ がわかる。 □

系 1.24. Hausdorff 空間 X の部分集合 $K \subset U \subset X$ について、K は compact 部分空間で、U は X の開集合であるとする。このとき、連続函数 $f : U \to \mathbb{R}$ が、$f|_{U \setminus K} = 0$ をみたすならば、任意の $x \in X \setminus U$ について $f(x) := 0$ とおくことによって、f は X 全体で定義された連続函数 $X \to \mathbb{R}$ に拡張する。

証明. 補題 1.23 により $\{X \setminus K, U\}$ は X の開被覆であり、拡張された函数 f はこれら 2 つの開集合それぞれの上で連続である。 □

系 1.24 と同様に補題 1.23 を用いて、 ある開集合で定義された compact 台をもつ C^∞ 函数を C^∞ 多様体全体に C^∞ に拡張することができる。ここで Hausdorff 性が必要不可欠である[15]。この拡張の存在は、C^∞ 多様体において局所と大域を結びつける鍵となる[16]。さらに C^∞ 多様体に第二可算公理を仮定すると、この函数の拡張をつかって、C^∞ 多様体を充分大きい N についての $\mathbb{R}^N$ に埋め込むことができる。逆に、$\mathbb{R}^N$ に埋め込めるなら、補題 1.19 より Hausdorff でなければならない。

次回は多様体（manifold）を定義する。

[例題演習]

例題演習 第 2 回

$g \geq 1$ について $J_g := \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \in M_{2g}(\mathbb{R})$ とおく。symplectic 群 $Sp_{2g}(\mathbb{R}) := \{P \in M_{2g}(\mathbb{R});\ {}^tPJ_gP = J_g\}$ を考える。

(1) $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ が $GL_{2g}(\mathbb{R})$ の部分集合であることを示せ。

(2) $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ が $M_{2g}(\mathbb{R})$ の C^∞ 部分多様体であることを示せ。

[[以下の補足はビデオで解説していません。]]

第 2 回の補足

陰函数定理のヴァリアントを紹介する。なるべくなら、ここに書いた証明を見る前に、各自で証明してみると勉強になると思う。

一般に、実 vector 空間 W_1, W_2, W_3 および実線型写像 $\alpha_1 : W_1 \to W_2$, $\alpha_2 : W_2 \to W_3$ について列

$$W_1 \xrightarrow{\alpha_1} W_2 \xrightarrow{\alpha_2} W_3$$

が完全（exact）であるとは $\operatorname{Ker}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_1$ が成立つことをいう。

定理 1.25. $m, n, l \geq 0$ とする。開集合 $O \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ から開集合 $O' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ への C^∞ 写像 $F : O \to O'$ と C^∞ 写像 $G : O' \to \mathbb{R}^l$ および点 $a_0 \in O$, $b_0 \in O'$, $c_0 \in \mathbb{R}^l$ について、

[15] ちなみに、位相空間 X が weak Hausdorff であるとは、任意の compact 空間 K と任意の連続写像 $g : K \to X$ について $g(K) \overset{\text{closed}}{\subset} X$ となることをいう。

[16] たとえば、後で述べる vector 場の議論を参照。

(i) $F(a_0) = b_0$.

(ii) $GF(O) = \{c_0\}$.

(iii) 線型写像の列 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{(JF)_{a_0}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{(JG)_{b_0}} \mathbb{R}^l$ は完全である

であるとする。このとき、$b_0 \in W \subset O'$ をみたす開集合 $W \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ が存在して、

$$W \cap F(O) = W \cap G^{-1}(c_0)$$

がなりたち、 $W \cap F(O)$ は $\mathbb{R}^m$ の C^∞ 部分多様体となる。

証明. a_0, b_0 および c_0 はそれぞれの Euclid 空間の原点であると仮定して一般性は失わない。行列 $(JF)_0$ および $(JG)_0$ の階数をそれぞれ ρ および r とする。完全性により

$$\rho + r = m \tag{$*$.1}$$

である。全射線型写像 $\pi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^r$ であって $\mathrm{Im}(JG)_0 \subset \mathbb{R}^l$ への制限が同型であるものをとる。これは $\mathrm{Ker}\,\pi \cap \mathrm{Im}(JG)_0 = 0$ をみたすから、

$$\mathrm{Ker}(\pi \circ (JG)_0) = \mathrm{Ker}(JG)_0 \tag{$*$.2}$$

である。また、$J(\pi \circ G)_0 = \pi \circ \mathrm{Im}(JG)_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ は全射だから、陰函数定理により、原点の開近傍 $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $V' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と C^∞ 微分同相写像 $\psi : U' \to V'$ が存在して $U' \subset O'$, $\psi(0) = 0$ かつ任意の $(y_1, \ldots, y_m) \in V'$ について $(\pi \circ G \circ \psi^{-1})(y_1, \ldots, y_m) = (y_1, \ldots, y_r)$ となる。V' を小さくとり直して充分小さい $\varepsilon_1 > 0$ について $V' =]{-\varepsilon_1}, \varepsilon_1[^m$ であるとしてよい。このとき $\pi \circ G \circ F(O) = \pi(0) = 0$ とあわせて

$$\psi(F(O) \cap U') \subset \psi((\pi \circ G)^{-1}(0) \cap U') = \{0\} \times]{-\varepsilon_1}, \varepsilon_1[^\rho \subset \{0\} \times \mathbb{R}^\rho \tag{$*$.3}$$

となる。また、

$$\mathrm{Ker}\, J(\pi \circ G \circ \psi^{-1})_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^\rho \tag{$*$.4}$$

である。ここで ($*$.1) を使っている。

($*$.3) を踏まえて線型写像 $\varpi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\rho$, $(y_1, \ldots, y_m) \mapsto (y_{r+1}, \ldots, y_m)$, を考える。$F^{-1}(U') \subset O$ 上の C^∞ 写像

$$\varpi \circ \psi \circ F : F^{-1}(U') \xrightarrow{\psi \circ F} V' \xrightarrow{\varpi}]{-\varepsilon_1}, \varepsilon_1[^\rho \subset \mathbb{R}^\rho$$

を考える。ここで $\{0\} \times \mathbb{R}^\rho \overset{(*.4)}{=\!=\!=} \mathrm{Ker}\, J(\pi \circ G \circ \psi^{-1})_0 = \mathrm{Ker}\left((J\pi)_0 \circ (JG)_0 \circ {(J\psi)_0}^{-1}\right) = (J\psi)_0 \mathrm{Ker}\,(\pi \circ (JG)_0) \overset{(*.4)}{=\!=\!=} (J\psi)_0 \mathrm{Ker}\,(JG)_0 \overset{\text{(iii)}}{=\!=\!=} (J\psi)_0 \mathrm{Im}\,(JF)_0 = \mathrm{Im}((J\psi)_0 (JF)_0) = \mathrm{Im}(J(\psi \circ F)_0)$ であるから、$\mathrm{Im}\, J(\varpi \circ \psi \circ F)_0 = \mathrm{Im}(\varpi \circ J(\psi \circ F)_0) = \varpi \mathrm{Im}\, J(\psi \circ F)_0 = \varpi(\{0\} \times \mathbb{R}^\rho) = \mathbb{R}^\rho$ である。つまり $J(\varpi \circ \psi \circ F)_0$ は全射だから、陰函数定理により、原点の開近傍 $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ と C^∞ 微分同相写像 $\varphi : U \to V$ が存在して $U \subset O$, $\varphi(0) = 0$ かつ任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ について $(\varpi \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_\rho)$ となる。V を小さくとり直して充分小さい $\varepsilon_2 > 0$ について $V =]{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2[^n$ であるとしてよい。このとき、$(\varpi \circ \psi \circ F)(U) = (\varpi \circ \psi \circ F \circ \psi^{-1})(V) =]{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2[^\rho$ であり、($*$.3) により $\psi(F(U)) = \{0\} \times]{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2[^\rho$ である。とくに $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ である。そこで $W = \psi^{-1}(]{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2[^m)$ とおけば $W \overset{\text{open}}{\subset} U'$ であって $\{0\} \times]{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2[^\rho = \psi(F(U)) = \psi(F(U) \cap W) \subset \psi(F(O) \cap W) \subset \psi((\pi \circ G)^{-1}(0) \cap W) = \{0\} \times]{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2[^\rho$ である。ここで ($*$.3) をつかった。したがって、$F(O) \cap W = (\pi \circ G)^{-1}(0) \cap W$ であって、これは $\mathbb{R}^m$ の C^∞ 部分多様体となる。$F(O) \cap W \subset G^{-1}(0) \cap W \subset (\pi \circ G)^{-1}(0) \cap W$ だから $F(O) \cap W = G^{-1}(0) \cap W$ である。以上で定理が示された。 □