幾何学 I　第 12 回　河澄響矢

今回の内容: 最短線, energy 汎函数, $\Omega(M;p,q)$, Christoffel 記号, 測地線の方程式, geodesic spray, 測地線, 測地線の存在, Euclid 空間の超曲面での測地線, 指数写像.

今回の参考文献:

- 坪井俊「幾何学 I – 多様体入門」（東京大学出版会）第 7 章
- 今野宏「微分幾何学」（東京大学出版会）第 4 章
- J. Milnor 'Morse Theory', Princeton University Press, §§8–12
- S. Lang 'Differential Manifolds', Springer, 第 VII 章

§9. Riemann 計量（後半）

[前回の復習]

$m \geq 1$, M: m-dim C^∞ mfd, $\pi : TM \to M$: tangent bundle とする。

定義. $g = \{g_p\}_{p\in M}$: C^∞ Riemannian metric
$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 0) $\forall p \in M$, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$: 正定値対称双一次形式
（$\|v\|_g := \sqrt{g_p(v,v)}$, $v \in T_pM$）
1) $\|\cdot\|_g^{\,2} : TM \to \mathbb{R}$: C^∞ function.
このとき (M,g): m-dim C^∞ Riemannian manifold とよぶ。

曲線の長さ. $\gamma : [0,1] \to M$: C^∞ map（C^∞ curve）とする。つまり $\exists \varepsilon > 0, \exists \tilde{\gamma} :]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to M$: C^∞ map, s.t., $\tilde{\gamma}|_{[0,1]} = \gamma$ である。このとき

$$L(\gamma) = L_g(\gamma) := \int_0^1 \left\|\dot{\gamma}(t)\right\|_g dt = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t))}dt$$

と定め、γ の g に関する長さとよぶ。

補題 9.5(再). (1) 長さは parameter のとり方によらない。
(2) $L_{F^*g}(\gamma) = L_g(F \circ \gamma)$.

例. (1) $\sum_{i=1}^m dx_i \otimes dx_i$ on $\mathbb{R}^m = \{(x_1,\dots,x_m)\}$, Euclidean metric. 最短線は線分である。
(2) $\frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ on $\mathbb{H} = \{x + y\sqrt{-1};\ x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$, hyperbolic metric. 最短線は実軸に直交する円である。

[**energy 汎函数**]

今回やること. 変分法を用いて**測地線**（geodesic）を導入する。一般の状況で $p, q \in M$ を結ぶ最短線の性質を調べる。

記号.

$$\Omega(M;p,q) := \{\gamma : [0,1] \to M;\ C^\infty \text{ map}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

長さをとる函数 $L : \Omega(M;p,q) \to \mathbb{R}$ の最小値をとる点 $\in \Omega(M;p,q)$ を調べたい。しかし、L の被積分函数には $\sqrt{\ }$ が入っていて厄介である。そこで代わりに

$$E : \Omega(M;p,q) \to \mathbb{R}, \quad \textbf{energy 汎函数}（\text{energy functional}）$$
$$E(\gamma) := \int_0^1 \left\|\dot{\gamma}(t)\right\|_g^{\,2} dt = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t))dt \geq 0$$

を考える。（注意: $E(\gamma \circ \tau) \neq E(\gamma)$.）

補題 9.6.

$$\forall \gamma \in \Omega(M; p, q),\ L(\gamma)^2 \leq E(\gamma).$$

等号成立は $\forall t \in [0,1],\ \|\dot{\gamma}(t)\|_g = L(\gamma)$ (const) のとき、そのときに限られる。

証明には次の Cauchy-Schwarz の不等式を使う。

Cauchy-Schwarz の不等式. $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$: 連続函数について次がなりたつ

$$\left| \int_0^1 \alpha(t)\beta(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 \alpha(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \beta(t)^2 dt}$$

等号成立は α と β が一次従属であるとき、そのときに限られる。

補題 *9.6* の証明. Cauchy-Schwarz の不等式において $\alpha(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|_g$, $\beta(t) = 1$, とおくと望む不等式がえられる。

$$\text{等号成立} \iff \left\| \dot{\gamma}(t) \right\|_g = \text{const}\,(= L_0 \text{ とおく})$$

であるが、このとき $L(\gamma) = \int_0^1 L_0 dt = L_0$ である。 □

ここからしばらく、Cauchy-Schwarz の不等式の証明を復習する。

まず、一般の実ベクトル空間 V の上に実双線型写像 $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ が与えられていて、正定値対称であるとする。つまり、任意の $u, v \in V$ について $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ であり（対称性）、$\langle u, u \rangle \geq 0$ であって $\langle u, u \rangle = 0$ ならば $u = 0$ である（正定値）とする。$\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}$ と表す。このとき、Cauchy-Schwarz の不等式

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

が任意の $u, v \in V$ について成り立つ。さらに等号成立は u と v が一次従属のとき、そのときに限られる。

実際、$u = 0$ のとき明らかに成り立つから $u \neq 0$ とする。$\|u\| \neq 0$ である。任意の $s \in \mathbb{R}$ について $s^2\|u\|^2 + 2s\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \langle su + v, su + v \rangle = \|su + v\|^2 \geq 0$ である。最高次係数 $\|u\|^2$ が 0 でないから、これを s の二次不等式とみることができて、判別式の $1/4$ は 0 以下である: $\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$. これは Cauchy-Schwarz の不等式に他ならない。等号成立の場合には判別式が 0 だから、ある $s_0 \in \mathbb{R}$ において $\|s_0 u + v\|^2 = 0$ となる。つまり $v = -s_0 u$ となり u と v は一次従属である。 □

V として区間 $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^m$ に値をもつ連続函数の全体を考える。$u, v \in V$ について pairing

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 {}^t u(t) v(t) dt$$

は正定値対称双線型形式である。したがってこの pairing についても Cauchy-Schwarz の不等式が成り立つ。なお、この pairing が対称双線型であることは定義から明らかであるが、正定値であることをは次の補題による。$h(t)$ が compact 台をもつことにしてあるのは、あとでこの形で使うからである。

補題. 開区間 $]0,1[$ 上の $\mathbb{R}^m$ に値をもつ C^∞ 函数（resp. 連続函数）$u :]0,1[\to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto u(t) = (u_i(t))_{i=1}^m$, を考える。compact 台をもつ任意の C^∞ 函数（resp. 連続函数）$h :]0,1[\to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto h(t) = (h_i(t))_{i=1}^m$, について

$$\int_0^1 {}^t u(t)h(t)dt \left(= \sum_{i=1}^m \int_0^1 u_i(t)h_i(t)dt \right) = 0$$

を充たすならば、任意の $0 < t_0 < 1$ について $u(t_0) = 0$ である。

証明. $\delta > 0$ を $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset]0,1[$ となるようにとり、非負実数値 C^∞ 函数 $\chi :]0,1[\to \mathbb{R}$ を $]0, t_0 - \frac{2}{3}\delta[\cup]t_0 + \frac{2}{3}\delta, 1[$ 上で 0 で $[t_0 - \frac{1}{3}\delta, t_0 + \frac{1}{3}\delta]$ 上で 1 となるようにとる。このとき、$\chi u :]0,1[\to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \chi(t)u(t)$ は compact 台をもつから、仮定により $0 = \int_0^1 \chi(t)\|u(t)\|^2 dt$ となる。ここでもし $u(t_0) \neq 0$ とすると、ある $c > 0$ について $\|u(t_0)\|^2 > c$ である。そこで $\|u(t)\|^2$ の連続性から、ある $0 < a < \frac{1}{3}\delta$ が存在して任意の $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$ について $\|u(t)\|^2 > c$ となる。$\chi(t)\|u(t)\|^2$ が非負であることと a のとりかたから $0 = \int_0^1 \chi(t)\|u(t)\|^2 dt \geq \int_{t_0-a}^{t_0+a} \|u(t)\|^2 dt \geq 2ac > 0$ となる。これは矛盾である。補題が示された。 □

それでは本論にもどる。

補題 9.7. $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ が $\forall t \in [0,1]$, $\dot\gamma(t) \neq 0$ をみたし、函数 $L : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$ の最小値をとるとする。このとき、C^∞ 狭義単調増大函数 $\tau : [0,1] \xrightarrow{\cong} [0,1]$ つまり parameter のとりかえが存在して $E : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$ は $\gamma \circ \tau$ において最小値をとる。

証明. 弧長函数の $L(\gamma)^{-1}$ 倍

$$\sigma(t) := \frac{1}{L(\gamma)} \int_0^t \left\| \dot\gamma(s) \right\|_g ds, \quad t \in [0,1],$$

を考える。これは C^∞ 函数であるが、仮定より $\dfrac{d\sigma}{dt} = L(\gamma)^{-1} \left\| \dot\gamma(t) \right\|_g \gneqq 0$ であって[1]、$\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ であるから、逆函数

$$\tau := \sigma^{-1} : [0,1] \to [0,1], \quad s \mapsto \tau(s),$$

がとれて C^∞ である。$\dfrac{d\tau}{ds} = \left(\dfrac{d\sigma}{dt}(\tau(s)) \right)^{-1} = \dfrac{L(\gamma)}{\left\| \dot\gamma(\tau(s)) \right\|_g}$ であるから $\|\dfrac{d}{ds}\gamma(\tau(s))\|_g = \left\| \dot\gamma(\tau(s)) \dfrac{d\tau}{ds} \right\|_g = L(\gamma)$ (const) となる。そこで、補題 9.6 （等号成立）により

$$L(\gamma)^2 = L(\gamma \circ \tau)^2 = E(\gamma \circ \tau)$$

となる。$\forall \hat\gamma \in \Omega(M; p, q)$ について

$$E(\hat\gamma) \geq L(\hat\gamma)^2 \overset{\text{仮定}}{\geq} L(\gamma)^2 = E(\gamma \circ \tau)$$

である。つまり、$\gamma \circ \tau$ は E の最小値をとる。 □

[1] γ の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ はつねに 0 でないと仮定しているので、その長さは (0 以上よりも) 0 より大と言うべきでした。これにより τ は C^∞ 狭義短調増大函数つまり C^∞ 微分同相写像になります。

[変分法による測地線の方程式の導出]

以下、parameter をとりかえて $\gamma \circ \tau$ をあらためて γ とする。最小値は「極値」であることに注意すると「無限次元多様体」$\Omega(M; p, q)$ 上で

$$「(dE)_\gamma = 0」$$

となるはずである。この式を変分法によって書き下して測地線の方程式を導く。

変分法の計算の準備として $E(\gamma)$ を局所座標で表しておく。(U, φ, V): M の chart, $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, とし、

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) : U \to \mathbb{R},\ C^\infty \text{ function},\ 1 \le i, j \le m,$$

とおく。そこで、$a, b \in \mathbb{R}, a \le b, \gamma : [a, b] \to U$: C^∞ 写像について $\varphi(\gamma(t)) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)) \in V \subset \mathbb{R}^m$ と表すと

$$g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma_i}(t)\dot{\gamma_j}(t)$$

となる。とくに $\gamma([a, b]) \subset U$ のとき

$$E(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma_i}(t)\dot{\gamma_j}(t)dt$$

と表される。

さて、行列 $(g_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ は正定値対称行列だから逆行列をもつ。これを

$$(g^{kl})_{1 \le k,l \le m} := ((g_{ij})_{1 \le i,j \le m})^{-1}$$

と表す。Cramer の公式により $1 \le \forall k, \forall l \le m$ について $g^{kl} : U \to \mathbb{R}$ は C^∞ 函数である。

以上の記号の準備のもとで、$1 \le i, j, l \le m$ について **Christoffel 記号**（Christoffel symbol） $\Gamma_{ij}^l : U \to \mathbb{R}$, C^∞ 函数を

$$\Gamma_{ij}^l(p) := -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} g^{kl}(p)\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(p)\right), \quad p \in U,$$

によって定義する。定義から

$$(\star) \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(p) = -2\sum_{l=1}^{m} g_{kl}(p)\Gamma_{ij}^l(p)$$

である。次の補題が今回の授業の山場である。

補題 9.8. $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ において E が最小ならば、$\forall t \in \left(\gamma|_{]0,1[}\right)^{-1}(U)$, $1 \le \forall l \le m$, について

$$(*) \qquad \frac{d^2\gamma_l}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^l(\gamma(t))\frac{d\gamma_i}{dt}(t)\frac{d\gamma_j}{dt}(t) = 0, \quad \text{(測地線の方程式)}$$

がなりたつ。ここで $\varphi(\gamma(t)) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ である。

証明. $\left(\gamma|_{]0,1[}\right)^{-1}(U) \overset{\text{open}}{\subset}]0,1[$ は開区間の disjoint 和である。その任意の一つ $]a,b[,\ 0 \le a < b \le 1,$ の上で測地線の方程式 $(*)$ がなりたつことを示せばよい。

以下、この証明では $\varphi\circ\gamma,\ g_{ij}\circ\varphi^{-1},\ \Gamma^l_{ij}\circ\varphi^{-1}$ をそれぞれ $\gamma,\ g_{ij},\ \Gamma^l_{ij}$ と略記する。

$$h :]a,b[\to \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t)),$$

を compact 台をもつ C^∞ 函数とする。このとき（$\|h\|$ は compact 台をもつ連続函数であることから有界だから）

$$\exists s_0 > 0, |\forall s| < s_0, \forall t \in]a,b[,\ (\gamma + sh)(t) = \gamma(t) + sh(t) \in V$$

である（下図参照）。

E が γ において最小であることから、$E(\gamma+sh)$ も $s=0$ において最小となり、

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma+sh) \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\gamma(t)+sh(t))(\dot\gamma_i(t)+s\dot h_i(t))(\dot\gamma_j(t)+s\dot h_j(t))dt \\
&= \sum_{i,j,k=1}^m \int_a^b \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t))h_k(t)\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t)dt + 2\sum_{i,j=1}^m \int_a^b g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\dot h_j(t)dt.
\end{aligned}$$

となる。最後の等式は $g_{ij} = g_{ji}$ による。ここで第 2 項は部分積分によって次のように計算できる。ここで $\operatorname{supp} h \subset]a,b[$ により、部分積分の際の両端点の寄与は 0 である。

$$\begin{aligned}
&(\text{第 2 項}) = -2\sum_{i,j=1}^m \int_a^b \frac{d}{dt}\left(g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\right) h_j(t)dt \\
&= -2\sum_{i,j,k=1}^m \int_a^b \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t))\dot\gamma_k(t)\dot\gamma_i(t)h_j(t)dt - 2\sum_{i,j=1}^m \int_a^b g_{ij}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t)h_j(t)dt \\
&\overset{k\text{ と }j\text{ を取り替える}}{=\!=\!=} -2\sum_{i,j,k=1}^m \int_a^b \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\gamma(t))\dot\gamma_j(t)\dot\gamma_i(t)h_k(t)dt - 2\sum_{i,k=1}^m \int_a^b g_{ik}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t)h_k(t)dt \\
&\overset{\dot\gamma_j(t)\text{ と }\dot\gamma_i(t)\text{ の対称性}}{=\!=\!=} -\sum_{i,j,k=1}^m \int_a^b \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\gamma(t)) + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)\dot\gamma_j(t)\dot\gamma_i(t)h_k(t)dt \\
&\qquad\qquad - 2\sum_{i,k=1}^m \int_a^b g_{ik}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t)h_k(t)dt
\end{aligned}$$

したがって次がえられる

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma+sh) \\
&= \sum_{k=1}^m \int_a^b h_k(t)\left(\sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\gamma(t)) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)\dot\gamma_j(t)\dot\gamma_i(t) - 2\sum_{i=1}^m g_{ik}(\gamma(t))\ddot\gamma_i(t)\right)dt.
\end{aligned}$$

ここで $h(t)$ は任意にとれるから、（p.3 の補題により）大きな括弧の中身は $=0$ である。したがって、$1 \leq \forall k \leq m$ について

$$\sum_{i=1}^{m} g_{ik}(\gamma(t))\ddot{\gamma}_i(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\gamma(t)) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t)$$

となり、左辺の添字の i と l を付け替え、右辺に $(\star)$ を適用して

$$\sum_{l=1}^{m} g_{kl}(\gamma(t))\ddot{\gamma}_l(t) = -\sum_{i,j,l=1}^{m} g_{kl}(\gamma(t))\Gamma_{ij}^{l}(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t)$$

となる。両辺に $(g^{kl}) = (g_{kl})^{-1}$ を施して

$$\ddot{\gamma}_l(t) = -\sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{l}(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t)$$

を得る。これが示すべきことであった。 □

[測地線の方程式の幾何的解釈]

こうして得られた**測地線の方程式**は、未知函数 $\gamma_i(t)$ についての 2 階の常微分方程式系

$$\ddot{\gamma}_l(t) = -\sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{l}(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t), \quad 1 \leq l \leq m,$$

である。そこで、$\zeta_i(t) := \dot{\gamma}_i(t)$ とおくと TM 上の曲線 $(\gamma_i(t), \zeta_i(t))$ についての 1 階の常微分方程式系

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{\gamma}_l(t) = \zeta_l(t), \\ \dot{\zeta}_l(t) = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{l}(\gamma(t))\zeta_i(t)\zeta_j(t), \end{cases}$$

に書き換えられる。この 1 階の常微分方程式系は $TM|_U$ 上の vector 場とみることができる。実際、φ にともなう chart $(TM|_U, \widehat{\varphi}, V \times \mathbb{R}^m)$ は

$$\xi_i := dx_i : TM|_U \to \mathbb{R}, \quad v \in T_pM \mapsto (dx_i)_p(v) = v(x_i), \quad p \in U,\ 1 \leq i \leq m,$$

とおくと、$\widehat{\varphi} = (x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ と表されるが、

$$Y^{(\varphi)} := \sum_{l=1}^{m} \xi_l \frac{\partial}{\partial x_l} - \sum_{i,j,l=1}^{m} (\Gamma_{ij}^{l} \circ \pi)\xi_i\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_l}$$

は $TM|_U$ 上の C^∞ vector 場である。このとき、$TM|_U$ 上の曲線 $(\gamma(t), \zeta(t))$ $\left(= \sum_{l=1}^{m} \zeta_l(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_{\gamma(t)}\right)$ について

$$(**) \text{ の解} \iff Y^{(\varphi)} \text{ の積分曲線.}$$

がなりたつ。実際、次がなりたつからである

$$Y^{(\varphi)}{}_{(\gamma(t),\zeta(t))} = \sum_{l=1}^{m} \xi_l \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_{(\gamma(t),\zeta(t))} - \sum_{i,j,l=1}^{m} (\Gamma_{ij}^{l} \circ \pi)\xi_i\xi_j \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)_{(\gamma(t),\zeta(t))},$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t),\zeta(t)) = \sum_{l=1}^{m} \dot{\gamma_l}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_{(\gamma(t),\zeta(t))} + \sum_{l=1}^{m} \dot{\zeta_l}(t) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)_{(\gamma(t),\zeta(t))}.$$

補題 9.9. $TM|_U$ 上の C^∞ vector 場 $Y^{(\varphi)}$ は M 上の chart (U,φ,V) のとり方によらず Riemann 計量 g だけできまる。

証明. M の別の chart (O,ψ,W), $\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, について直接計算で $Y^{(\varphi)} = Y^{(\psi)}$ on $TM|_{O\cap U}$ を示す。$\eta_a(v) := (dy_a)(v)$, $v \in TM|_O$, によって C^∞ 函数 $\eta_a : TM|_O \to \mathbb{R}$, $1 \le a \le m$, を定めると $(TM|_O, (y_1,\ldots,y_m,\eta_1,\ldots,\eta_m), W\times\mathbb{R}^m)$ は TM の chart である。

$$\begin{aligned} y_a &= (y_a \circ \varphi^{-1})(x_1,\ldots,x_m) \\ \eta_a &= dy_a = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y_a}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y_a}{\partial x_k} \xi_k \end{aligned} \tag{1}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial y_a}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_a} + \sum_{a,k=1}^{m} \xi_k \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial}{\partial \eta_a} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_i} &= \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial y_a}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial y_a} + \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial \eta_a}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \eta_a} = \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial y_a}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \eta_a} \end{aligned} \tag{2}$$

となる。(1) と (2) について φ と ψ の役割を交換したものも成り立っている。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{m} \xi_l \frac{\partial}{\partial x_l} &= \sum_{l=1}^{m} \xi_l \left(\sum_{a} \frac{\partial y_a}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial y_a} + \sum_{a,k} \xi_k \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial}{\partial \eta_a} \right) \\ &= \sum_{a} \eta_a \frac{\partial}{\partial y_a} + \sum_{a,k,l} \xi_k\xi_l \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial}{\partial \eta_a} \end{aligned} \tag{3}$$

となる。他方、$1 \le a,b \le m$ について $h_{ab} = g(\frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial y_b})$ とおくと

$$g_{ij} = \sum_{a,b} h_{ab} \frac{\partial y_a}{\partial x_i}\frac{\partial y_b}{\partial x_j} \tag{4}$$

である。$h_{ab} = h_{ba}$ に注意すると

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_{a,b,c} \frac{\partial h_{ab}}{\partial y_c}\frac{\partial y_a}{\partial x_i}\frac{\partial y_b}{\partial x_j}\frac{\partial y_c}{\partial x_k} + 2\sum_{a,b} h_{ab}\frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial y_b}{\partial x_j}$$

である。ここで上式右辺第二項が i と k について対称であることから

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \\ &= \sum_{a,b,c} \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial y_c} - \frac{\partial h_{ac}}{\partial y_b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y_a} \right) \frac{\partial y_a}{\partial x_i}\frac{\partial y_b}{\partial x_j}\frac{\partial y_c}{\partial x_k} - 2\sum_{a,b} h_{ab}\frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial y_b}{\partial x_k} \end{aligned}$$

である。(4) の逆行列をとる。$(h^{ab}) = (h_{ab})^{-1}$ を用いて $g^{ij} = \sum_{a,b} h^{ab} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_a} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_b}$ となる。ここだけの記号として chart ψ に関する Christoffel 記号を Δ^d_{ab}, $1 \leq a, b, d \leq m$, と書く

$$\Delta^d_{ab} = -\frac{1}{2} \sum_{c=1}^{m} h^{cd} \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial y_c} - \frac{\partial h_{ac}}{\partial y_b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y_a} \right).$$

このとき、以上の計算を合わせて

$$\begin{aligned}
-2\Gamma^l_{ij} =& \sum_k g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right) \\
=& \sum_{a,b,c,d,e,k} h^{de} \frac{\partial x_k}{\partial y_d} \frac{\partial x_l}{\partial y_e} \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial y_c} - \frac{\partial h_{ac}}{\partial y_b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y_a} \right) \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \frac{\partial y_b}{\partial x_j} \frac{\partial y_c}{\partial x_k} \\
& - 2 \sum_{a,b,d,e,k} h^{de} \frac{\partial x_k}{\partial y_d} \frac{\partial x_l}{\partial y_e} h_{ab} \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial y_b}{\partial x_k} \\
=& \sum_{a,b,c,e} h^{ce} \frac{\partial x_l}{\partial y_e} \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial y_c} - \frac{\partial h_{ac}}{\partial y_b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y_a} \right) \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \frac{\partial y_b}{\partial x_j} - 2 \sum_a \frac{\partial x_l}{\partial y_a} \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j} \\
=& -2 \sum_{a,b,e} \Delta^e_{ab} \frac{\partial x_l}{\partial y_e} \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \frac{\partial y_b}{\partial x_j} - 2 \sum_a \frac{\partial x_l}{\partial y_a} \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

となる。ここで $\left(\dfrac{\partial y_a}{\partial x_i} \right)$ が $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_a} \right)$ の逆行列であることを使った。したがって

$$\Gamma^l_{ij} = \sum_{a,b,e} \Delta^e_{ab} \frac{\partial x_l}{\partial y_e} \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \frac{\partial y_b}{\partial x_j} + \sum_a \frac{\partial x_l}{\partial y_a} \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j} \tag{5}$$

が得られた。この (5) と以前に示した (3) により

$$\begin{aligned}
Y^{(\varphi)} =& \sum_l \xi_l \frac{\partial}{\partial x_l} - \sum_{l,i,j} \Gamma^l_{ij} \xi_i \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_l} \\
=& \sum_a \eta_a \frac{\partial}{\partial y_a} + \sum_{a,k,l} \xi_k \xi_l \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial}{\partial \eta_a} \\
& - \sum_{a,b,e,i,j,l} \Delta^e_{ab} \frac{\partial x_l}{\partial y_e} \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \frac{\partial y_b}{\partial x_j} \xi_i \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_l} - \sum_{a,i,j,l} \frac{\partial x_l}{\partial y_a} \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_l} \\
=& \sum_a \eta_a \frac{\partial}{\partial y_a} + \sum_{a,i,j} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial \eta_a} - \sum_{a,b,e} \Delta^e_{ab} \eta_a \eta_b \frac{\partial}{\partial \eta_e} - \sum_{a,i,j} \frac{\partial^2 y_a}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta_a} \\
=& \quad Y^{(\psi)}
\end{aligned}$$

となる。これが示すべきことであった。 □

(注意) 事実として geodesic spray Y_g は、余接束 T^*M 上の標準 symplectic 形式 ω_{can} を Riemann 計量 g の定める C^∞ 微分同相 $g : TM \overset{\cong}{\to} T^*M$ によって引き戻した接束 TM 上の symplectic 形式 $g^*\omega_{\mathrm{can}}$ に関する函数 $\|\cdot\|_g^2$ の Hamiltonian vector 場である。このことからも補題 9.9 が得られる。参考文献 [Lang] 第 VII 章 §6, pp.164-166 を参照。

したがって $Y^{(\varphi)}$ たちは貼りあって Riemann 計量 g だけで決まる C^∞ vector 場

$$Y = Y_g \in \mathrm{Vect}(TM)$$

が定まる。これを **geodesic spray** とよぶ。

定義. $-\infty \le a < b \le +\infty$ とする。

$\gamma :]a, b[\to M$: **測地線**（geodesic）

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 0) $\gamma :]a, b[\to M$: C^∞ 写像.

1) $\dot\gamma :]a, b[\to TM$, $t \mapsto \dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M \subset TM$, は geodesic spray Y_g の積分曲線である。

条件 1) は次と同値である

$\forall (U, \varphi, V) : \text{chart of } M, \varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$\Gamma_{ij}^l := (\varphi \text{ に関する } g \text{ の Christoffel 記号})$, $\varphi(\gamma(t)) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$ とするとき、

$\forall l \ge 1, \forall t \in \gamma^{-1}(U)$,

$$\ddot\gamma_l(t) = -\sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^l(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t), \text{ (測地線の方程式).}$$

[以上のまとめ]

最短線は適切な parameter のとりかえにより測地線となる。さらに、常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性の定理により、任意の点 $p \in M$ と任意の $v \in T_pM$ について、$0 < \exists a_0 \ll 1$, $\exists \gamma : [0, a_0] \to M$: 測地線, s.t., $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$ となる。この測地線 γ は (p と) v について C^∞ である。

[Euclid 空間の超曲面における測地線]

$m \ge 2$, $\sum_{i=1}^m dx_i \otimes dx_i$ on $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m)\}$: Euclid 計量, $M \subset \mathbb{R}^m$: $(m-1)$-dim C^∞ 部分多様体[2] とし、 Euclid 計量の引き戻しによる M 上の Riemann 計量を g とする。

補題 9.10. C^∞ 写像 $\gamma :]a, b[\to M \subset \mathbb{R}^m$ について次は同値である。

(a) γ は Riemann 計量 g に関する測地線である。

(b) $\forall t \in]a, b[$, $\dfrac{d^2}{dt^2}\gamma(t) \perp T_{\gamma(t)}M$.

証明. $p \in M$ とする。 $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$: $(m-1)$-次元実線型部分空間とみなす。$1 \le \exists \alpha \le m$, $\varphi := (x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_m) : M \to \mathbb{R}^{m-1}$ は p のまわりで局所微分同相である。つまり、$p \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} M$, $\exists V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{m-1}$, $\exists f : V \to \mathbb{R}$: C^∞ function, s.t.,

$$U = \{(u_1, \ldots, u_{\alpha-1}, f(u_1, \ldots, u_{m-1}), u_\alpha, \ldots, u_{m-1});\ (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in V\}$$

[2] 次元が 1 つ小さい部分多様体を**超曲面**（hypersurface）とよぶ。

となる。以下、簡単のため $\alpha = m$ の場合だけを考える。（他の場合も同様である。）このとき、$1 \leq \forall i \leq m-1$ について U 上で

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial x_m}$$

がなりたつ。ここで左辺は座標 $(u_1, \ldots, u_{m-1})$ の定める U 上の vector 場であり、左辺の $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ は V 上の偏微分である。そこで

$$(\flat) \qquad g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial u_j}, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

となる。言い換えると、$(m-1)$ 次対称行列 $G := (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq m-1}$ は f の Jacobi 行列 $Jf = (\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial u_{m-1}}) = (f_{u_1}, \ldots, f_{u_{m-1}})$ によって

$$G = I + {}^t(Jf)(Jf)$$

と表される。そこで、

$$G^t(Jf) = (I + {}^t(Jf)(Jf))^t(Jf) = (1 + \|Jf\|^2)^t(Jf)$$

となる。つまり、縦ベクトル ${}^t(Jf)$ は、行列 G の固有値 $1 + \|Jf\|^2$ に属する固有ベクトルである。逆行列 $G^{-1} = (g^{kl})_{1 \leq k,l \leq m-1}$ については ${}^t(Jf) = (1 + \|Jf\|^2)G^{-1}({}^t(Jf))$ つまり

$$(\flat\flat) \qquad \sum_{k=1}^{m-1} g^{kl} f_{u_k} = (1 + \|Jf\|^2)^{-1} f_{u_l}$$

となる。

さて、$(\flat)$ の両辺を $u_k, 1 \leq k \leq m-1,$ によって偏微分して

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_i}\frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_j} = f_{u_i u_k} f_{u_j} + f_{u_i} f_{u_j u_k}$$

となるから、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \\ =&\underline{f_{u_i u_k} f_{u_j}} + \underline{f_{u_j u_k} f_{u_i}} - f_{u_i u_j} f_{u_k} - \underline{f_{u_j u_k} f_{u_i}} - \underline{f_{u_i u_k} f_{u_j}} - f_{u_j u_i} f_{u_k} \\ =&-2 f_{u_i u_j} f_{u_k} \end{aligned}$$

となる。したがって次がえられた

$$(\sharp) \qquad \Gamma^l_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} g^{kl}(-2 f_{u_i u_j} f_{u_k}) \overset{(\flat\flat)}{=} (1 + \|Jf\|^2)^{-1} f_{u_i u_j} f_{u_l}.$$

いま、 C^∞ 写像 $\gamma :]a, b[\to U \subset M \subset \mathbb{R}^m$ は

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{m-1}(t), f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{m-1}(t))) \in \mathbb{R}^m$$

と表される。そこで

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\gamma}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^{m-1} f_{u_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right) \frac{\partial}{\partial x_m},$$
$$\ddot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \ddot{\gamma}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i,j=1}^{m-1} f_{u_i u_j}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) + \sum_{i=1}^{m-1} f_{u_i}(\gamma(t)) \ddot{\gamma}_i(t) \right) \frac{\partial}{\partial x_m},$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned}
&\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M \\
\iff & 1 \leq \forall l \leq m-1,\ \ddot{\gamma}(t) \perp \left(\frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial f}{\partial u_l} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\
\iff & 1 \leq \forall l \leq m-1,\ \ddot{\gamma}_l(t) + \sum_{i,j=1}^{m-1} f_{u_l} f_{u_i u_j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) + \sum_{i=1}^{m-1} f_{u_l} f_{u_i} \ddot{\gamma}_i(t) = 0, \\
\iff & (I + {}^t(Jf)(Jf))(\ddot{\gamma}_l(t))_{l=1}^{m-1} = - \left(\sum_{i,j=1}^{m-1} f_{u_i u_j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right) {}^t(Jf) \\
\iff & G(\ddot{\gamma}_l(t))_{l=1}^{m-1} = - \left(\sum_{i,j=1}^{m-1} f_{u_i u_j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right) {}^t(Jf) \\
\iff & (\ddot{\gamma}_l(t))_{l=1}^{m-1} = - \left(\sum_{i,j=1}^{m-1} f_{u_i u_j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right) G^{-1}({}^t(Jf)) \\
& \overset{(\flat\flat)}{=} -(1 + \|Jf\|^2)^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^{m-1} f_{u_i u_j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right) {}^t(Jf) \\
& \overset{(\sharp)}{=} \left(- \sum_{i,j=1}^{m-1} \Gamma_{ij}^l \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right)_{l=1}^{m-1} \\
\iff & \gamma \text{ は測地線である。}
\end{aligned}$$

これが示すべきことであった。 □

例. 単位球面 $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ については、測地線は大円である。（各自。）

[等長変換と測地線]

一般論にもどる。

補題 9.11. C^∞ diffeo $F : N \to M$ について

$$(dF)_*(Y_{F^*g}) = Y_g$$

がなりたつ。とくに isometry は geodesic spray を保つ。

証明. 一般に $F : N \to M$ を C^∞ 微分同相写像とする。このとき

$$(dF)_*(Y_{F^*g}) = Y_g$$

がなりたつことを示す。これが示されれば、とくに F が isometry のとき geodesic spray Y_g が F によって保たれることが分かる。

いま、F は C^∞ 微分同相だから、M の任意の chart は、ある N の chart (U, φ, V) について $(F(U), \varphi \circ F^{-1}, V)$ と表される。$\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, $\varphi \circ F^{-1} = (y_1, \dots, y_m) = (x_1 \circ F^{-1}, \dots, x_m \circ F^{-1})$ と成分表示する。Christoffel 記号を $\Gamma^{(g)}$ などと書くことにする。いま任意の $p \in U$ について $g_{ij}(F(p)) = g_{F(p)}((dF)\frac{\partial}{\partial x_i}, (dF)\frac{\partial}{\partial x_j}) = (F^*g)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})(p) = (F^*g)_{ij}(p)$ つまり $g_{ij} \circ F = (F^*g)_{ij}$ である。逆行列をとって $g^{ij} \circ F = (F^*g)^{ij}$ である。また、$\frac{\partial}{\partial x_k}(F^*g)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k}(g_{ij} \circ F) = ((dF)(\frac{\partial}{\partial x_k}))(g_{ij}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} \circ F$ である。そこで $(\Gamma^{(F^*g)})^l_{ij} = (\Gamma^{(g)})^l_{ij} \circ F$ である。さらに $dy_i = d(x_i \circ F) = (dx_i) \circ (dF)$ である。以上により $Y^{(\varphi)}_{F^*g} = (dF^{-1})_* Y^{(\varphi \circ F^{-1})}_g$ となる。chart は任意だから $(dF^{-1})_* Y_g = Y_{F^*g}$ つまり $Y_g = (dF)_* Y_{F^*g}$ となる。これが示すべきことであった。 □

[指数写像]

geodesic spray Y_g について $\mathcal{U}^{Y_g} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \times TM$ および

$$\mathcal{U}^{Y_g} \to TM, \quad (t, v) \mapsto \mathrm{Exp}(tY_g)(v),$$

がとれる。

$$O_g := \{v \in TM;\ [0,1] \times \{v\} \subset \mathcal{U}^{Y_g}\} \subset TM$$

とおく。0-section は O_g に含まれる。また、$[0,1]$ は compact だから O_g は TM の開集合である[3]。こうしてえられる C^∞ 写像

$$\mathrm{Exp} : O_g \to M, \quad v \mapsto \mathrm{Exp}(v) := \pi \circ \mathrm{Exp}(1 \cdot Y_g)(v),$$

を**指数写像**（exponential map）という。ここで $\pi : TM \to M$ は射影である。

補題 9.12. (1) $\forall p \in M$, $0_p \in T_pM$: 0-vector について $\mathrm{Exp}(0_p) = p$ である。

(2) $\forall p \in M$ について

$$d(\mathrm{Exp}|_{O_g \cap T_pM})_{0_p} = 1_{T_pM} : T_{0_p}(T_pM) = T_pM \to T_pM$$

である。とくに $\mathrm{Exp}|_{O_g \cap T_pM}$ は $0_p \in T_pM$ において local diffeo である。

証明. (1) $\gamma(\forall t) = p$ は測地線である。

(2) まず、$\forall a \in \mathbb{R}$ と $\forall \gamma(t)$: 測地線について $\gamma(at)$ も測地線である。実際、任意の chart (U, φ, V) について $\varphi(\gamma(t)) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ と表すとき $1 \le \forall l \le m$, $\dfrac{d}{dt}\gamma_l(at) = a\dot{\gamma_l}(at)$, $\dfrac{d^2}{dt^2}\gamma_l(at) = a^2\ddot{\gamma_l}(at)$, となるから、測地線の方程式 $(*)$ は両辺に同じ a^2 が掛け算されることになり、そのままなりたつからである。

[3] 位相空間 X, Y の直積 $X \times Y$ の開集合 O と X の compact 部分空間 K について集合 $V := \{y \in Y;\ K \times \{y\} \subset O\}$ は X の開集合である。実際、$y \in V$ とする。積位相の定義から、任意の $x \in K$ について $x \in \exists U_x \overset{\text{open}}{\subset} X$, $y \in \exists V_x \overset{\text{open}}{\subset} Y$, $U_x \times V_x \subset O$ となる。開集合族 $\{U_x\}$ は compact 集合 K を被覆するから、$\exists n \ge 1$, $\exists x_1, \dots, \exists x_n \in K$, $K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ となる。このとき、$V_0 := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ は Y の開集合であって、$K \times V_0 \subset O$ ゆえに $u \in V_0 \subset V$ である。したがって V は Y の開集合である。

さて任意の $v \in T_pM$ を考える。$0 < \exists s_0 \ll 1$, $s_0 v \in O_g$ である。そこで、測地線 $\gamma : [0,1] \to M, t \mapsto \gamma(t)$, であって $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = s_0 v$, をみたすものがただ一つとれる。このとき $|\forall s| \leq s_0$ について $\gamma_s(t) := \gamma(st/s_0)$ も測地線であり、$\gamma_s(0) = p$, $\dot{\gamma_s}(0) = \frac{s}{s_0} s_0 v = sv$ をみたすから、$\mathrm{Exp}(sv) = \gamma_s(1) = \gamma(s/s_0)$ となる。したがって

$$(d\mathrm{Exp})_{0_p}(v) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathrm{Exp}(sv) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(s/s_0) = {s_0}^{-1}\dot{\gamma}(0) = {s_0}^{-1} s_0 v = v$$

となる。これが示すべきことであった。 □

[等長変換への応用]

最後に一つだけ応用例をあたえる。

定理 9.13. (M, g): 連結な C^∞ Riemann 多様体, $F : (M, g) \to (M, g)$: isometry とする。もし、$\exists p_0 \in M$, $F(p_0) = p_0$ かつ $(dF)_{p_0} = 1_{T_{p_0}M}$ であるとすると、$F = 1_M : M \to M$ である。

証明.

$$A := \{p \in M;\ F(p) = p \text{ かつ } (dF)_p = 1_{T_pM}\} \subset M$$

とおく。これが閉かつ開であることを示す。

（閉）$\Delta = \Delta_{TM} \subset TM \times TM = (TM)^2$ を接束 TM の対角集合とする。$\Delta^m \subset (TM)^{2m}$ を Δ の m 個の直積とする。TM は Hausdorff だから $\Delta \overset{\text{closed}}{\subset} (TM)^2$ であり、したがって $\Delta^m \overset{\text{closed}}{\subset} (TM)^{2m}$ である。任意の chart (U, φ, V), $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$, について $U \cap A$ が U の閉集合であることを示せばよい。連続写像

$$\Phi : U \to (TM)^{2m}, \quad p \mapsto \Phi(p) := (\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, (dF)_p \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p, (dF)_p \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p),$$

を考える。$(dF)_p$ は線型写像だから $U \cap A = \Phi^{-1}(\Delta^m)$ であって、$\Phi^{-1}(\Delta^m)$ は閉集合である。これが示すべきことであった。

（開）F は isometry だから補題 9.11 により γ: geodesic $\iff$ $F \circ \gamma$: geodesic である。$p \in A$ とする。$\gamma(t)$ を $\gamma(0) = p$ をみたす測地線とすると、$(F \circ \gamma)(0) = p = \gamma(0)$ かつ $(F \circ \gamma)\dot{}(0) = (dF)_p \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(0)$ だから、常微分方程式の初期値問題の解の一意性により $\gamma(t) = F \circ \gamma(t)$ である。つまり

$$F \circ (\mathrm{Exp}|_{O_g \cap T_pM}) = \mathrm{Exp}|_{O_g \cap T_pM} \text{ near } 0_p \in T_pM$$

となる。補題 9.12 により、これは A が p の近傍であることを意味する。$p \in A$ は任意だから $A \overset{\text{open}}{\subset} M$ である。

以上により、A は連結な位相空間 M において閉かつ開だから $A = \emptyset$ または $A = M$ である。しかるに仮定より $p_0 \in A \neq \emptyset$ だから $A = M$ したがって $F = 1_M$ である。 □

幾何学 I の講義はここまでとする。

[例題演習]

例題演習 第12回

$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=z^2,\ z>0\} \subset \mathbb{R}^3$ を考える。 $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\}$ 上の Euclid 計量 $dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ が M に誘導する Riemann 計量 g を考える。

(1) M が $\mathbb{R}^3$ の C^∞ 部分多様体であることを示せ。

(2) C^∞ 写像

$$F : O := \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ r>0\} \to M, \quad (r,\theta) \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\sqrt{2}\theta, \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\sqrt{2}\theta, \frac{1}{\sqrt{2}} r),$$

が局所微分同相であることを示せ。また、全射であることも示せ。

(3) F による引き戻し F^*g を具体的に記述せよ。

(4) (M,g) の測地線 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ であって定数ではなく周期的であるものは存在するか？証明付きで答えよ。