幾何学 I　第 11 回　河澄響矢

今回の内容:

§8. 第二可算公理と paracompact 性: 第二可算公理, paracompact, compact exhaustion, 1 の分割.

§9. Riemann 計量 (前半): Riemann 計量, Riemann 多様体, (局所) 等長写像, Riemann 計量の存在, 曲線の長さ.

§8. 第二可算公理と paracompact 性

[第二可算公理]

まず、位相空間論の復習から行う。X を位相空間とする。

定義. $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$: X の可算基
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $U_i \overset{\text{open}}{\subset} X$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, 可算個
2) $\forall O \overset{\text{open}}{\subset} X$, $\forall x \in O$, $\exists i$, $x \in U_i \subset O$.

定義. X: **第二可算公理をみたす**（second-countable）
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ X は可算基をもつ。

補題 8.1. 次の空間は第二可算公理をみたす。
(1) $\mathbb{R}^n$.
(2) 第二可算公理をみたす空間の部分空間.
(3) compact (C^∞) 多様体.

証明. (1) $B_n(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|y - x\| < r\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, とする。このとき $\mathcal{B} := \{B_n(x, r);\ x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の可算基である[1]。ここで $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0}$ が可算集合であることに注意する。
(2) 可算基 $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ をもつ位相空間 X の部分空間 A は可算基 $\{U_i \cap A\}_{i=1}^{\infty}$ をもつ。
(3) 定理 5.7 により compact (C^∞) 多様体は $\mathbb{R}^n$, $n \gg 1$, の部分空間とみなせる。 □

[paracompact 性]

定義. X: paracompact
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 1) X: Hausdorff 空間.
2) X の任意の開被覆は局所有限な（locally finite）細分（refinement）をもつ。つまり、
$\forall \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$: X の開被覆, $\exists \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: X の開被覆, s.t.,
局所有限. $\forall x \in X$, $x \in \exists W_x \overset{\text{open}}{\subset} X$, s.t., $\sharp\{\lambda \in \Lambda;\ W_x \cap V_\lambda \neq \emptyset\} \lneqq \infty$.
細分. (開被覆であって) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists \alpha \in A$,　$V_\lambda \subset O_\alpha$.

（細分をとる必要性を示す例）$X = \mathbb{R}$, $U_n =]-1, 1[\cup]n-1, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.
（注意）（A.H. Stone）距離空間は paracompact である。
（森田紀一）CW 複体は paracompact である。

ここでは次の証明を与える。

[1] 任意の $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ について $x \in B_n(x', r') \subset B_n(x, r)$ をみたす $x' \in \mathbb{Q}^n$, $r' \in \mathbb{Q}_{>0}$ が存在することを示せばよい。$\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{R}^n$ において、$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において、それぞれ稠密だから、$\exists x' \in B_n(x, r/3) \cap \mathbb{Q}^n$, $\exists r' \in]r/3, 2r/3[\cap \mathbb{Q}$ である。このとき $x \in B_n(x', r') \subset B_n(x, r)$ である。

定理 8.2. 第二可算公理をみたす局所 compact Hausdorff 空間 X はparacompact である。

証明の準備

補題 8.3. 定理の X について、その可算基を $\mathcal{B}=\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ とする。このとき、$\{U_i \in \mathcal{B};\ \overline{U_i} : \text{compact}\} \subset \mathcal{B}$ も X の可算基をなす。

証明. $\forall O \overset{\text{open}}{\subset} X$, $\forall x \in O$ とする。X は局所 compact Hausdorff だから $x \in \exists V \overset{\text{open}}{\subset} X$, $\overline{V}$: compact かつ $\overline{V} \subset O$ となる。ここで $\mathcal{B}$ が基であることをつかって、$x \in \exists U_i \subset V$ であるが、$\overline{U_i} \overset{\text{closed}}{\subset} \overline{V}$ より $\overline{U_i}$ は compact である。 □

補題 8.4. 定理の X について compact 部分空間の列

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots \subset X$$

が存在して、$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ および $\forall i \geq 1$ について $A_i \subset (A_{i+1})^\circ$ をみたす。（ここで $(A_{i+1})^\circ$ は A_{i+1} の X における内部を表す。）このような compact 部分空間の列を **compact 汲み尽くし列**（compact exhaustion）とよぶ。

証明. 補題 8.3 により X の可算基 $\mathcal{B}=\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ であって、$\forall i$ について $\overline{U_i}$: compact であるものがとれる。これを使って i について帰納的に A_i を定める。まず、

$$A_1 := \overline{U_1} :\ \text{compact}$$

とする。$i \geq 1$ とし、A_i まで得られたとする。A_i は compact だから

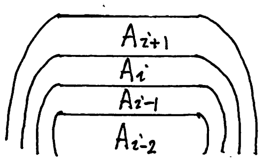
$$j_i := \min\{j;\ A_i \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_j\}$$

は有限の値として決まる。そこで

$$A_{i+1} := \overline{U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{j_i}} \cup \overline{U_{i+1}}$$

とおくと、これは compact であって、$A_i \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{j_i} \subset (A_{i+1})^\circ$ であり、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset X$ となる。 □

定理 *8.2* の証明. X の開被覆 $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。$i \geq 1$ について $O_{i,\alpha} := ((A_{i+1})^\circ \setminus A_{i-2}) \cap O_\alpha$ とおく（下図参照）。ここで $A_{-1} = A_0 = \emptyset$ とする。



各 $i \geq 1$ について、$\bigcup_{\alpha \in A} O_{i,\alpha} \supset A_i \setminus (A_{i-1})^\circ$: compact だから、次がなりたつ

$$\exists \nu_i \geq 1, \exists \alpha_{i,1}, \ldots, \exists \alpha_{i,\nu_i} \in A,\ A_i \setminus (A_{i-1})^\circ \subset \bigcup_{j=1}^{\nu_i} O_{i,\alpha_{i,j}}.$$

$\{O_{i,\alpha_{i,j}};\ i \geq 1,\ 1 \leq j \leq \nu_i\}$ は X の開被覆で局所有限かつ $\{O_\alpha\}$ の細分である。 □

（注意）連結成分が可算個の位相多様体については

$$\text{第二可算} \iff \text{paracompact}$$

である。($\Rightarrow$) は定理 8.2 に他ならないが、($\Leftarrow$) は、たとえば [松島] p.88, 第 II 章, §5, 定理 1 を参照。

[1 の分割]

定理 8.5 (1 の分割). M を第二可算公理をみたす m 次元 C^∞ 多様体とし、$\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の開被覆とする。このとき、$\exists\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset C^\infty(M)$: M 上の C^∞ 函数の集合, s.t.,

(1) $\forall p \in M$, $0 \le \chi_\lambda(p) \le 1$.
(2) $\operatorname{supp}\chi_\lambda (:= \overline{\{p\in M;\ \chi_\lambda(p)\neq 0\}})$: compact.
(3) $\{\operatorname{supp}\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の局所有限な閉被覆で、$\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の細分である。
(4) $\forall p\in M$, $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda(p) = 1$.
（$\{\operatorname{supp}\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が局所有限であるから左辺は有限和である。）

この $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を開被覆 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従う **1 の分割**（partition of unity）とよぶ。

証明. 補題 8.2 により compact 汲み尽くし列

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots \quad X = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$$
$$\forall i \ge 1,\ A_i : \text{compact},\ A_i \subset (A_{i+1})^\circ$$

がとれる。$A_{-1} = A_0 = \emptyset$ とする。いま $\forall i \ge 1$, $\forall p \in A_i \setminus (A_{i-1})^\circ$, $\exists (U_p, \varphi_p, V_p)$: chart of M, s.t.

(i) $p \in U_p$, $\varphi_p(p) = 0 \in V_p$.
(ii) $\exists \alpha \in A$, $U_p \subset O_\alpha$.
(iii) $U_p \subset (A_{i+1})^\circ \setminus A_{i-2}$.
(iv) $\varphi_p(U_p) = V_p = B_n(0,3) (= \{x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\| < 3\})$.

である。それには、(ii) (iii) をみたす chart をとり、必要なら平行移動と scalar 倍を施して (i) (iv) をみたすようにすればよい。

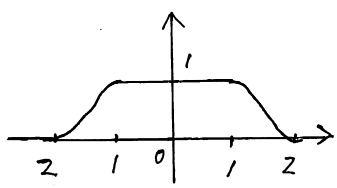
各 $A_i \setminus (A_{i-1})^\circ$ は compact だから、$\exists \nu_i \ge 1$, $\exists p_{i,1}, \ldots, \exists p_{i,\nu_i} \in A_i \setminus (A_{i-1})^\circ$, s.t.,

$$\bigcup_{j=1}^{\nu_i} {\varphi_{p_{i,j}}}^{-1}(B_m(0,1)) \supset A_i \setminus (A_{i-1})^\circ$$

となる。これらの $p_{i,j}$, $1 \le j \le \nu_i$, について $\exists \hat\chi_{i,j} : M \to \mathbb{R}$: C^∞ 函数, s.t., $\forall p \in M$,

$$0 \le \hat\chi_{i,j}(p) \le 1,$$
$$\hat\chi_{i,j}(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } \|\varphi_{p_{i,j}}(p)\| \le 1, \\ 0, & \text{if } p \in M \setminus {\varphi_{p_{i,j}}}^{-1}(B_m(0,2)), \end{cases}$$

とできる（下図参照）。



このとき $1 \le \forall j \le \nu_i$ について $\operatorname{supp}\hat{\chi}_{i,j} \subset (A_{i+1})^\circ \setminus A_{i-2}$ だから、M の閉被覆 $\{\operatorname{supp}\hat{\chi}_{k,l}\}$ は局所有限である。そこで、和 $\sum_{k,l}\hat{\chi}_{k,l}$ は、各点の近傍で C^∞ 函数の有限和である[2]から、M 上の C^∞ 函数である。また、$\hat{\chi}_{k,l}$ のとり方から、任意の $p \in M$ について $\sum_{k,l}\hat{\chi}_{k,l}(p) \ge 1$ である。したがって、$\chi_{i,j} := \hat{\chi}_{i,j}/(\sum_{k,l}\hat{\chi}_{k,l})$ とおけば、望む性質をみたす。 □

系 8.6. $C \overset{\text{closed}}{\subset} M,\ C \subset U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とし、$f : U \to \mathbb{R}$ を C^∞ 函数とする。このとき、

$$\exists \tilde{f} : M \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 函数},\ \text{s.t.}, \tilde{f}|_C = f|_C,\ \tilde{f}|_{M\setminus U} = 0.$$

証明. 開被覆 $\{U, M\setminus C\}$ に従う 1 の分割 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。$\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda;\ (\operatorname{supp}\chi_\lambda) \cap C \neq \emptyset\}$ とおく。このとき、$\forall \lambda \in \Lambda_0$ について $\operatorname{supp}\chi_\lambda \subset U$ であるから、$\{M \setminus \operatorname{supp}\chi_\lambda, U\}$ は M の開被覆である。$f\chi_\lambda$ は、U 上で C^∞ であるが、一方で $U \setminus \operatorname{supp}\chi_\lambda$ 上で 0 だから $M \setminus \operatorname{supp}\chi_\lambda$ 上に 0 として C^∞ に拡張する。したがって、$f\chi_\lambda$ は $M \setminus U$ 上では 0 として、M 全体の上で定義された C^∞ 函数に拡張する。

$$\tilde{f} := \sum_{\lambda\in\Lambda_0} f\chi_\lambda$$

と定義する。$\{\operatorname{supp}\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の局所有限性により、右辺は、各点の近傍で C^∞ 函数の有限和である。そこで $\tilde{f}$ は M 上で C^∞ である。

いま $p \in C$ とすると、$\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\chi_\lambda(p) = 1$ だから $\tilde{f}(p) = f(p)$ である。つまり $\tilde{f}|_C = f|_C$ である。一方、$\{\tilde{f} \neq 0\} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0}\operatorname{supp}\chi_\lambda \subset U$ だから、$\tilde{f}|_{M\setminus U} = 0$ である。以上で系が示された。 □

[2]局所有限性がここで効いている。

§9. Riemann 計量 (前半)

[Riemann 計量の定義]

$m \geq 1$, M: m-dim C^∞ mfd, $\pi : TM \to M$: 接束とする。

$$g = \{g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}\}_{p \in M}$$

であって、$\forall p \in M$ について g_p が T_pM 上の正定値対称双一次形式（つまり内積）であるものを考える。$v \in T_pM$ について

$$\|v\| = \|v\|_g := \sqrt{g_p(v,v)}$$

と表す。このとき次がなりたつ。

定義-補題 9.1. 次の (a)-(d) は互いに同値である。

(a) $\|\cdot\|_g{}^2 : TM \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|_g{}^2 = g_p(v,v)$, は C^∞ 函数である。

(b) $\forall O \overset{\text{open}}{\subset} M$, $\forall X, \forall Y \in \mathrm{Vect}(O)$, 函数 $g(X,Y) : p \in O \mapsto g_p(X_p, Y_p) \in \mathbb{R}$ は C^∞ である。

(c) $\forall (U, \varphi, V)$: M の chart, $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, と $1 \leq \forall i, \forall j \leq m$ について、函数

$$g_{ij}(p) := g_p(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p)$$

は $p \in U$ について C^∞ である。

(d) $\forall p \in M$, $\exists (U, \varphi, V)$: M の chart, $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, について $p \in U$ かつ g_{ij} は p のまわりで C^∞ である。

このとき g を M の C^∞ **Riemann 計量**（Riemannian metric）とよび、組 (M, g) を（m 次元 C^∞）**Riemann 多様体**（Riemannian manifold）とよぶ[3]。

証明. $\underline{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$. $g(X,Y) = \frac{1}{2}(\|X+Y\|_g{}^2 - \|X\|_g{}^2 - \|Y\|_g{}^2)$ であり、右辺は (a) により C^∞ 函数である。

$\underline{\text{(b)}\Rightarrow\text{(c)}\Rightarrow\text{(d)}}$. 明らか。

$\underline{\text{(d)}\Rightarrow\text{(a)}}$. $v = \sum_{i=1}^m \xi_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すとき、ξ_i, x_i, $1 \leq i \leq m$, は C^∞ 多様体 TM の座標とみなせるから、$\|v\|_g{}^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\xi_i\xi_j$ は T_pM の近傍で C^∞ である。 □

（注意）$(dx_i)_p \in T_p^*M$ をつかうと

$$g_p = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(p)(dx_i)_p \otimes (dx_j)_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$$

とみなすことができる。接束 TM と同様に、

$$T^*M \otimes T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^*M \otimes T_p^*M$$

には $m + m^2$ 次元 C^∞ 多様体の構造が定義される。補題 9.1 の条件は写像

$$g : M \to T^*M \otimes T^*M, \quad p \mapsto g_p,$$

[3] Riemann 多様体は Riemannian manifold だが、Riemann 面は Riemann surface である。

が C^∞ であることを言っている。その意味で局所的には以下のように表す

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j.$$

例. (1) $M = \mathbb{R}^m$, $1_M = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : M = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: standard coordinate について

$$g := \sum_{i=1}^m dx_i \otimes dx_i, \quad \text{つまり} \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

を Euclidean metric とよび、組 $(M, \sum_{i=1}^m dx_i \otimes dx_i)$ を Euclidean space とよぶ。言い換えると同一視 $T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto (p, (u_i)_{i=1}^m)$, の下で次がなりたっている

$$\forall (p,u), \forall (p,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad g((p,u),(p,v)) = {}^t uv.$$

(2) $M = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \Im z > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$.

$$g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) \quad \textbf{双曲計量}\text{（hyperbolic metric）}$$

つまり $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = g(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{y^2}$, $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 0$ である。ここで g を $(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ まで広げて考えて

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy, \quad d\overline{z} = dx - \sqrt{-1}dy$$

という記号を使うと

$$\begin{aligned} dz \otimes d\overline{z} &= dx \otimes dx + dy \otimes dy - \sqrt{-1}dx \otimes dy + \sqrt{-1}dy \otimes dx, \\ d\overline{z} \otimes dz &= dx \otimes dx + dy \otimes dy + \sqrt{-1}dx \otimes dy - \sqrt{-1}dy \otimes dx \end{aligned}$$

だから次がなりたつ

$$\frac{1}{2(\Im z)^2}(dz \otimes d\overline{z} + d\overline{z} \otimes dz) = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

[Riemann 計量のひきもどし]

$n \geq 1$, N: n-dim C^∞ mfd, $\pi : TN \to N$: tangent bundle, $F : N \to M$: C^∞ immersion（とくに $n \leq m$）について

$$F^*g = \{(F^*g)_q\}_{q \in N} :\ g \text{ の } F \text{ による引き戻し（pullback）}$$

を、各点 $q \in N$ において、次で定める

$$(F^*g)_q(u,v) := g_{F(q)}((dF)_q u, (dF)_q v), \quad (u, v \in T_qN).$$

補題 9.1. (1) F^*g は N 上の C^∞ Riemannian metric である。（induced metric ともいう。）

(2) 恒等写像 $1_M : M \to M$ について ${1_M}^* g = g$.

(3) $G : P \to N$: C^∞ immersion について $(F \circ G)^*g = G^*(F^*g)$.

証明. (1) $\forall q \in N$ について $(F^*g)_q$ は、$(dF)_q$ が線型写像だから対称双一次形式であり、$(dF)_q$ が単射だから正定値である。また、写像

$$\|\cdot\|_{F^*g}{}^2 : TN \xrightarrow{dF} TM \xrightarrow{\|\cdot\|_g{}^2} \mathbb{R}$$

は C^∞ 写像の合成だから C^∞ である。

(2) 明らか。

(3) $\forall x \in P$, $\forall u, \forall v \in T_xP$ について次がなりたつ

$$\begin{aligned}&((F\circ G)^*g)_x(u,v) = g_{F(G(x))}((dF)(dG)u, (dF)(dG)v)\\ =&(F^*g)_{G(x)}((dG)u,(dG)v) = (G^*(F^*g))_x(u,v).\end{aligned}$$

□

$N \subset M$: C^∞ submfd については inclusion $i : N \hookrightarrow M$, $q \mapsto q$, による引き戻し i^*g によって Riemannian metric を入れる。

[等長変換]

定義. (M,g), (N,h): Riemannian manifolds.

(1) $F : (M,g) \to (N,h)$: **local isometry**（局所等長写像）

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 0) $F : M \to N$: C^∞ map, locally diffeomorphic （とくに $\dim M = \dim N$ である。）

1) $g = F^*h$.

(2) F: **等長写像**（isometry）$\overset{\text{定義}}{\iff}$ local isometry かつ diffeo.

(3) $\mathrm{Isom}(M,g) := \{F : (M,g) \to (M,g);\ \text{isometry}\}$ **等長変換群**（isometry group). これは群になる。isometry の定義に diffeo が入っているからである。

例. (1) $\mathbb{R}^m$ 上の Euclidean metric を考える。

(1-1) $\forall \gamma \in \mathbb{R}^m$ について平行移動 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto x+\gamma$, は isometry である。

(1-2) $A \in GL_m(\mathbb{R})$ を $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ とみるとき $g = \sum dx_i \otimes dx_i$ Euclidean metric と $\forall p \in \mathbb{R}^m$, $\forall u, \forall v \in \mathbb{R}^m$ について

$$(A^*g)((p,u),(p,v)) = g((Ap,Au),(Ap,Av)) = {}^t(Au)(Av) = {}^tu{}^tAAv$$

であるから、A: isometry $\iff {}^tAA = I \iff A \in O(m)$: 直交群, である。

(2) $\mathbb{H} = \{\Im z > 0\}$ 上の hyperbolic metric を考える。$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$（とくに $ps - qr = 1$ である。）による一次分数変換 $Az = \dfrac{pz+q}{rz+s}$, $z \in \mathbb{H}$, は、hyperbolic metric の isometry $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を定める。実際、

$$\begin{aligned}\Im Az &= \Im\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{1}{|rz+s|^2}\Im((pz+q)(r\bar{z}+s)) = \frac{\Im(psz+qr\bar{z})}{|rz+s|^2} = \frac{\Im z}{|rz+s|^2},\\ d(Az) &= d\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{p(rz+s)-r(pz+q)}{(rz+s)^2}dz = \frac{1}{(rz+s)^2}dz,\end{aligned}$$

となる。上の 2 式の最後の等式はいずれも $ps - qr = 1$ による。そこで

$$\begin{aligned}&A^*\left(\frac{1}{2|\Im z|^2}(dz\otimes d\bar{z} + d\bar{z}\otimes dz)\right) = \frac{1}{2|\Im Az|^2}(d(Az)\otimes d(\overline{Az}) + d(\overline{Az})\otimes d(Az))\\ =&\frac{|rz+s|^4}{2|\Im z|^2}\cdot\frac{1}{|rz+s|^4}(dz\otimes d\bar{z} + d\bar{z}\otimes dz) = \frac{1}{2|\Im z|^2}(dz\otimes d\bar{z} + d\bar{z}\otimes dz)\end{aligned}$$

となる。これは A が双曲計量に関して isometry であることを言っている。

(3) $n \geq 1$ とし、$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ に Euclidean metric を入れ、

$$S^{2n-1} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^n$$

に induced metric を入れる。$p \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$ はそれぞれ p と互いに素であるとする。lens 空間 $L(p; q_2, \ldots, q_n) = S^{2n-1}/(\mathbb{Z}/p)$ を定義するための作用 $\mathbb{Z}/p \curvearrowright S^{2n-1}$

$$(k \bmod p, (z_1, z_2, \ldots, z_n)) \mapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}k/p} z_1, e^{2\pi\sqrt{-1}q_2 k/p} z_2, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}q_n k/p} z_n)$$

は unitary 変換の制限だから isometry である。したがって、次の補題により lens 空間 $L(p; q_2, \ldots, q_n)$ には S^{2n-1} の Euclidean metric から誘導される Riemannian metric が入る。

[等長固有不連続作用による商多様体]

補題 9.3. Γ: (離散位相をもつ) 群, (M, g): C^∞ Riemannian manifold, $\Gamma \curvearrowright M$, 自由かつ固有不連続な C^∞ 作用であって、$\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma^* g = g$ つまり isometry であるとする。$\pi : M \to M/\Gamma$ を quotient map とする。

このとき、π が local isometry となるように M/Γ に Riemannian metric が（ただ一つ）定まる。

証明. $\forall q \in M/\Gamma$ について $\pi(p) = q$ なる $p \in M$ をとる。実線型同型

$$(d\pi)_p : T_p M \to T_q(M/\Gamma)$$

により g_p を $T_q(M/\Gamma)$ 上の正定値対称双一次形式とみたす。（ここから一意性がわかる。）$p \in \pi^{-1}(q)$ のとり方によらないことは、別の $p' \in \pi^{-1}(q)$ については $\exists \gamma \in \Gamma$, $p' = \gamma p$, となり、可換図式

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[rr, "(d\gamma)_p", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "(d\pi)_p"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5ex, "\circlearrowright"] & & T_{\gamma p}M \arrow[dl, "\cong"', "(d\pi)_{\gamma p}"] \\
& T_q(M/\Gamma) &
\end{tikzcd}$$

において $(d\gamma)_p$ は双一次形式を保つからである。また、$p \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} M$ について $\pi|_U : U \to \pi(U)$ は C^∞ diffeo となるが、$\pi|_U$ は isometry だから M/Γ 上のこの計量も C^∞ である。 □

例. (1) $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$: discrete subgroup とする。ある $n \leq m$ について $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ である。$n = m$ のとき $\mathbb{R}^m/\Lambda$ に Euclidean metric を入れたものを**平坦トーラス**（flat torus）とよぶ。

(2) $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$: Fuchsian group について $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ が free であることと Γ が torsion free であることとは同値であった。このとき、$\mathbb{H}/\Gamma$ には hyperbolic metric が入る。

(3) lens space $L(p; q_2, \ldots, q_n)$ には S^{2n-1} から誘導される metric が入る.

[Riemann 計量の存在]

命題 9.4. M: m-dim C^∞ mfd, second-countable とする。このとき、M 上には C^∞ Riemannian metric が存在する。

証明. $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を（極大とは限らない）M のある atlas とし、$\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従う 1 の分割とする。$\forall\lambda\in\Lambda$, $\exists\alpha=\alpha(\lambda)\in A$, s.t., $\operatorname{supp}\chi_\lambda\subset U_{\alpha(\lambda)}$ である。そこで $\varphi_{\alpha(\lambda)}=(x_{\lambda,1},x_{\lambda,2},\ldots,x_{\lambda,m})$ とあらわし、$U_{\alpha(\lambda)}(\cong V_{\alpha(\lambda)}\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^m)$ 上の Riemannian metric g^λ を（何でもよいから）一つとっておく。$\forall p\in M$ について

$$g_p:=\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda(p)(g^\lambda)_p$$

と定義する。右辺は局所的に有限和だから意味をもつ。$\forall u,\forall v\in T_pM$ について

$$g_p(u,v)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda(p)(g^\lambda)_p(u,v)$$

と定義している。対称双一次であることは明らかである。正定値であることは $\exists\lambda_0\in\Lambda$, $\chi_{\lambda_0}(p)\gneqq 0$ かつ $\forall\lambda\in\Lambda$, $\chi_\lambda(p)\geq 0$ であることによる。最後に C^∞ 性を示す。定義により

$$\|\cdot\|_g{}^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda\|\cdot\|_{g^\lambda}{}^2$$

であるが、$\{\operatorname{supp}\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の局所有限性により、右辺が各点の近傍で C^∞ 函数の有限和となっていることから、左辺も C^∞ である。 □

[曲線の長さ]

$m\geq 1$, (M,g): m-dim C^∞ Riemannian mfd とする。$a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$, について C^∞ 写像（つまり C^∞ 曲線）$\gamma:[a,b]\to M$ を考える。すなわち、$\exists\varepsilon>0$, $\exists\tilde\gamma:]a-\varepsilon,b+\varepsilon[\to M$: C^∞ map, s.t., $\tilde\gamma|_{[a,b]}=\gamma$ である。このとき、

$$L(\gamma)=L_g(\gamma):=\int_a^b\left\|\dot\gamma(t)\right\|_g dt=\int_a^b\sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}dt$$

と定め、γ の g に関する**長さ**（length）とよぶ。

補題 9.5. (1) $p,q\in\mathbb{R}$, $p\leq q$, $\tau:[p,q]\overset{\cong}{\to}[a,b]$, $s\mapsto\tau(s)$, C^∞ diffeo, $\forall s\in[p,q]$, $\tau'(s)\gneqq 0$, とする。このとき

$$L_g(\gamma\circ\tau)=L_g(\gamma)$$

である。とくに、このことから $\gamma:[0,1]\to M$ だけを考えれば充分である。

(2) N: n-dim C^∞ mfd, $F:N\to M$: C^∞ immersion, $\gamma:[a,b]\to N$: C^∞ map について

$$L_{F^*g}(\gamma)=L_g(F\circ\gamma)$$

である。とくに $F:(M,g)\to(M,g)$: isometry のとき、任意の C^∞ map $\gamma:[a,b]\to M$ について $L_g(\gamma)=L_g(F\circ\gamma)$ である。

証明. (1) $\forall s\in[a,b]$, $\tau'(s)\gneqq 0$ および $\frac{d}{ds}(\gamma\circ\tau)(s)=\dot\gamma(\tau(s))\tau'(s)$ であることから

$$L_g(\gamma\circ\tau)=\int_p^q\sqrt{g_{\gamma(\tau(s))}(\dot\gamma(\tau(s)),\dot\gamma(\tau(s)))}\tau'(s)ds=\int_a^b\sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}dt=L_g(\gamma)$$

となる。

(2)

$$L_{F^*g}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(F^*g)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt = \int_a^b \sqrt{g_{F(\gamma(t))}((dF)\dot{\gamma}(t), (dF)\dot{\gamma}(t))}dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{g_{F(\gamma(t))}(F \dot{\circ} \gamma(t), F \dot{\circ} \gamma(t))}dt = L_g(F \circ \gamma).$$

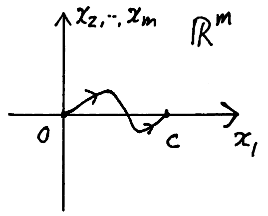
□

例. (1) $\mathbb{R}^m$ 上の Euclidean metric を考える。$\forall p \neq \forall q \in \mathbb{R}^m$ について、p と q を結ぶ C^∞ 曲線のうち線分が最短である。

証明. 平行移動と直交変換によって

$$p = (0, 0, \ldots, 0), \quad q = (c, 0, \ldots, 0), \quad c > 0,$$

としてよい。$c =$ (p と q を結ぶ線分の長さ) である（下図参照)。



このとき、$\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ をみたす任意の C^∞ 写像 $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, について

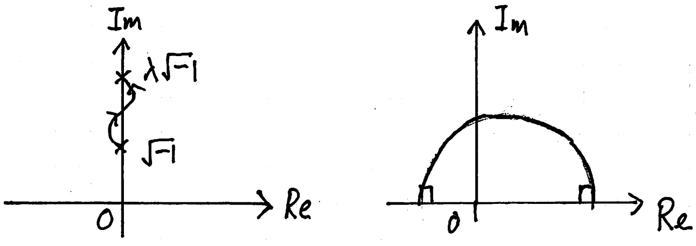
$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma_1}(t)^2 + \dot{\gamma_2}(t)^2 + \cdots + \dot{\gamma_m}(t)^2}dt$$
$$\geq \int_0^1 \left|\dot{\gamma_1}(t)\right| dt \geq \int_0^1 \dot{\gamma_1}(t)dt = \gamma_1(1) - \gamma_1(0) = c$$

となる。等号成立は $\forall t \in [0, 1]$ について $\dot{\gamma_2}(t) = \cdots = \dot{\gamma_m}(t) = 0$ かつ $\dot{\gamma_1}(t) \geq 0$ である、つまり γ が線分であるとき、そのときに限られる。 □

(2) $\mathbb{H} = \{x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C};\ x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 上の hyperbolic metric $g = \dfrac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ を考える。すでに見たように一次分数変換の群 $PSL_2(\mathbb{R})$ は $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ に含まれているが、複素解析で習ったように、一次分数変換は等角性をもち、円円対応する。このことから、

実軸 $\mathbb{R}$ と直交する円が最短線であり、最短線は実軸 $\mathbb{R}$ と直交する円の一部である。

証明. $p \neq q \in \mathbb{H}$ とする。一次分数変換で動かして $p = \sqrt{-1}$, $q = \lambda\sqrt{-1}$, $\lambda > 1$, であるとしてよい（下図参照）。C^∞ 写像 $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{H}$, $\gamma(0) = \sqrt{-1}$, $\gamma(1) = \lambda\sqrt{-1}$, $\gamma(t) = x(t) + \sqrt{-1}y(t)$, について



$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{y(t)}\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\dot{y}(t)\right|}{y(t)}dt$$
$$\geq \int_0^1 \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\log(y(t)))dt = \log y(1) - \log y(0) = \log\lambda$$

となる。等号成立は、 $\forall t \in [0,1]$ について $\dot{x}(t) = 0$ かつ $\dot{y}(t) \geq 0$ のとき、つまり γ が虚軸（の一部）であるとき、そのときに限られる。虚軸を一次分数変換で動かすと、等角性と円円対応によって、実軸 $\mathbb{R}$ と直交する円となる[4]。 □

次回は最終回であるが最短線をふくむ測地線の一般論を解説する。

[4]ビデオでは「$PSL_2(\mathbb{R})$ の元は実軸を動かさない」と言いましたが、より正確には「実軸を保つ」というべきで、実軸の各点は実軸の別の点に動き得ます。

[例題演習]

例題演習 第11回

（この例題の目的は 1 次元連結 Riemann 多様体の分類である。）

M を空でない 1 次元連結 Riemann 多様体とする。開区間 $I \subset \mathbb{R} = \{t \in \mathbb{R}\}$ にはつねに Euclid 計量 $dt \otimes dt$ の引き戻しが入っているものとする。とくに、$\frac{\partial}{\partial t}$ は I 上の長さ 1 のベクトル場である。次を証明せよ。

(1) M の任意の点について、その開近傍 $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と U 上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathrm{Vect}(U)$ が存在して、任意の開区間 I で定義された任意の C^∞ 写像 $c : I \to U$ について、c が local isometry であることと、c が X または $-X$ の積分曲線であることとは同値である。

(2) 任意の $p_0 \in M$ についてある開集合 $p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とある開区間 $0 \in I \subset \mathbb{R}$ および $c(0) = p_0$ をみたす local isometry $c : I \to U$ が存在する。

(3) 開区間 $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ と local isometry $c_1 : I_1 \to M$, $c_2 : I_2 \to M$ について、ある $t_0 \in I_1 \cap I_2$ において $c_1(t_0) = c_2(t_0) \in M$ とする。このとき、次のいずれかがなりたつ。

(a) 任意の $t \in I_1 \cap I_2$ について $c_1(t) = c_2(t) \in M$ である。

(b) （$I_2 =]a, b[$ であるとき $a < t_0 < b$ であるが、$I_2' =]2t_0 - b, 2t_0 - a[$ と表し、$c_2' : I_2' \to M$ を $c_2'(t) := c_2(2t_0 - t)$ によって定義する。このとき、）任意の $t \in I_1 \cap I_2'$ について $c_1(t) = c_2'(t) \in M$ である。

（ヒント: $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cap I_2'$ の連結性と M, TM の Hausdorff 性を用いる。）

(4) 開区間 I で定義された local isometry $c : I \to M$ が、ある $a_1, a_2 \in I$, $a_1 < a_2$, において $c(a_1) = c(a_2) \in M$ をみたすとする。このとき、$\dot{c}(a_1) = \dot{c}(a_2)$ である。

（ヒント: (3) を使う。）

(5) 点 $p_0 \in M$ と長さ 1 の接ベクトル $v_0 \in T_{p_0}M$ を一つ固定する。開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され、 $c(0) = p_0$ および $\dot{c}(0) = v_0$ をみたす local isometry $c : I \to M$ のうち、I が極大であるものを $c_{\max} : I_{\max} \to M$ と表すことにする。（(3) を用いて §7 での極大な積分曲線の存在証明と同様にして、極大な local isometry の存在が示される。）このとき、$c_{\max} : I_{\max} \to M$ は全射である。（したがって、$c_{\max} : I_{\max} \to M$ は、もし単射ならば、局所 C^∞ 微分同相写像であることから、isometry となる。つまり、M は Euclid 内積をもつ開区間 $I_{\max}$ に isometric である。）

(6) (5) の状況で、local isometry $c_{\max} : I_{\max} \to M$ が単射ではないとする。このとき、$I_{\max} = \mathbb{R}$ であって、$c_{\max}$ は、ある $L > 0$ について isometry $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \cong M$ を誘導する。

空でない任意の開区間は $\mathbb{R}$ に C^∞ 微分同相である。また、任意の $L > 0$ について $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ は S^1 に C^∞ 微分同相である。第二可算公理をみたす 1 次元連結 C^∞ 多様体は、Riemann 計量をもつから、円周 S^1 または実直線 $\mathbb{R}$ に C^∞ 微分同相である。