

幾何学 I

第 10 回

河澄響矢

今回の内容: compact 台をもつ vector 場は完備である, 1-parameter 変換群, 括弧積と $\text{Exp}(tX)$, 可換な vector 場の組, 平面場, 対合的平面場, Frobenius の定理.

§7. vector 場の積分曲線 (後半)

[前回の復習]

$m \geq 1$, M : m -dim C^∞ mfd, $X \in \text{Vect}(M)$: C^∞ vector field on M , $I \subset \mathbb{R}$: open interval, とする。このとき、 X の積分曲線 (定義 7.1) とは、 $\forall t \in I, \dot{c}(t) = X_{c(t)}$ をみたす C^∞ 写像 $c: I \rightarrow M$ のことであった。

ここだけの記号. $p \in M$ とする。

$$\mathcal{I}(p, X) := \{I \subset \mathbb{R}; 0 \in I: \text{開区間}, \exists c^I: I \rightarrow M; X \text{ の積分曲線, s.t., } c^I(0) = p\} \neq \emptyset,$$

$$I^p = I^{p, X} := \bigcup_{I \in \mathcal{I}(p, X)} I \subset \mathbb{R}, \text{ open interval,}$$

$$c^p: I^p \rightarrow M, \text{ integral curve of } X, c^p(0) = p, \text{ (補題 7.2 (2))},$$

$$\mathcal{U}^X := \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M; t \in I^{p, X}\}^{\text{open}} \subset \mathbb{R} \times M \text{ (定理 7.4 (1))},$$

$$\Phi^X: \mathcal{U}^X \rightarrow M, (t, p) \mapsto \Phi^X(t, p) := c^p(t) = (\text{Exp } tX)(p), C^\infty \text{ map, (定理 7.4 (2))}.$$

とおく。 Φ^X は X の生成する M の 1-径数変換群 (flow) (the 1-parameter transformation group generated by X , the flow generated by X) と呼ばれる。

[compact 台をもつ vector 場は完備である]

vector 場 X が完備 (complete) である (定義 7.3) とは $\mathcal{U}^X = \mathbb{R} \times M$ つまり、各点 $p \in M$ を通る X の積分曲線が $\mathbb{R}$ 全体に延びていることをいう。一般に vector 場 X の台 (support) $\text{supp } X$ を

$$\text{supp } X := \overline{\{p \in M; X_p \neq 0\}} \subset M$$

で定義する。右辺は M における閉包とする。

定理 7.6. $\text{supp } X$ が compact ならば X は完備である。

証明. 補題 7.2(1) により

$$\forall p \in M, p \in \exists O_p^{\text{open}} \subset M, \exists \varepsilon_p > 0, \forall q \in O_p, \exists c_p:]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[\rightarrow M, \text{ s.t., } c_p(0) = q.$$

ここで $\text{supp } X$ は compact だから、

$$\exists p_1, \exists p_2, \dots, \exists p_n \in \text{supp } X, \text{supp } X \subset O_{p_1} \cup O_{p_2} \cup \dots \cup O_{p_n}$$

である。 $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \dots, \varepsilon_{p_n}\} \geq 0$ とおく。このとき

$$(*) \quad \forall p \in M,]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\subset I^{p, X}$$

つまり、どの点 $p \in M$ においても c^p は少なくとも $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ の上で定義される。

(*) の証明. $p \in \text{supp } X$ のときは ε_0 のとり方による. $p \notin \text{supp } X$ のときは $X_p = 0$ だから、 $\forall t \in \mathbb{R}$ について $c^p(t) = p$ (const) である. $\square$

背理法によって $\forall p \in M$ について $I^{p,X} = \mathbb{R}$ を示す. $I^{p,X} \subsetneq \mathbb{R}$ と仮定する. このとき $a_0 := \sup I^{p,X}$, $b_0 := \inf I^{p,X}$ とおくと、 $\varepsilon_0 \leq a_0 < +\infty$ または $-\infty < b_0 \leq -\varepsilon_0$ である.

前者の場合. (*) により $\exists \hat{c} :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow M$: X の積分曲線, s.t., $\hat{c}(0) = c^p(a_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_0)$ である. 補題 7.2 (2) により c^p と $\hat{c}$ は貼りあって $]b_0, a_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0[$ まで延長する. これは $a_0 = \sup I^{p,X}$ に矛盾する.

後者の場合. も同様に矛盾が導かれる.
定理が示された. $\square$

[1-parameter 変換群の性質]

一般的な状況にもどる. vector 場 $X \in \text{Vect}(M)$ は完備とは限らないとする.

補題 7.7. $s, t \in \mathbb{R}$ について $\text{Exp } tX$ などが定義される範囲で次がなりたつ.

- (1) $\text{Exp } 0X = 1_M$.
- (2) $\forall f: p \in M$ のまわりで定義された C^∞ 函数

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((\text{Exp } tX)(p)) = (Xf)(p).$$

- (3) $\text{Exp } (t+s)X = (\text{Exp } tX)(\text{Exp } sX)$.
- (4) $(\text{Exp } tX)^{-1} = \text{Exp } ((-t)X)$.
- (5) $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Exp } (ta)X = \text{Exp } t(aX)$. (これによって $\text{Exp } tX$ と書いても問題ない.)
- (6) $\forall \varphi: M \rightarrow M: C^\infty\text{-diffeo.}, \varphi \circ (\text{Exp } tX) \circ \varphi^{-1} = \text{Exp } t\varphi_*X$.
- (7) $(\text{Exp } sX)_*X = X$.

証明. (1)(2) は $\text{Exp } tX$ の定義から明らか.

(3) s をとめたとき両辺とも X の積分曲線であって $t=0$ において $(\text{Exp } sX)(p)$ を通る. したがって、積分曲線の一意性 (補題 7.2(2)) によって等号がなりたつ.

(4) (1)(3) による. $s = -t$ とおけばよい.

(5) $\forall p \in M$ について $c(t) = (\text{Exp } tX)(p)$ とおくと

$$c(a \cdot 0) = c(0) = p, \quad \frac{d}{dt}c(at) = a\dot{c}(at) = aX_{c(at)}$$

となる. 積分曲線の一意性により $(\text{Exp } t(aX))(p) = c(at) = (\text{Exp } (at)X)(p)$ となる.

(6) $\forall p \in M$ について $c(t) = \varphi \circ (\text{Exp } tX) \circ \varphi^{-1}(p)$ とおくと $c(0) = \varphi \varphi^{-1}(p) = p$ であるが、

$$\frac{d}{dt}c(t) = (d\varphi)_{(\text{Exp } tX) \circ \varphi^{-1}(p)} X_{(\text{Exp } tX) \circ \varphi^{-1}(p)} = (d\varphi)_{\varphi^{-1}c(t)} X_{\varphi^{-1}c(t)} \stackrel{\varphi_*X \text{ の定義}}{=} (\varphi_*X)_{c(t)}$$

となる. 積分曲線の一意性により $(\text{Exp } t\varphi_*X)(p) = c(t) = \varphi \circ (\text{Exp } tX) \circ \varphi^{-1}(p)$ である.

(7) (6) において $\varphi = \text{Exp } sX$ とおくと (3)(4) により

$$\text{Exp } tX \stackrel{(3)(4)}{=} \varphi(\text{Exp } tX)\varphi^{-1} \stackrel{(6)}{=} \text{Exp } t\varphi_*X$$

となる. そこで $\forall p \in M$ において次がえられる

$$X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Exp } tX)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Exp } t\varphi_*X)(p) = (\varphi_*X)_p = ((\text{Exp } sX)_*X)(p).$$

$\square$

[2 つの vector 場の関係]

定理 7.8. $X, Y \in \text{Vect}(M)$ とする。

- (1) $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\text{Exp } tX)_* Y = [Y, X]$.
- (2) $\text{Exp } tX$ が定義される範囲で次がなりたつ

$$\frac{d}{dt}((\text{Exp } tX)_* Y) = (\text{Exp } tX)_* [Y, X] = [(\text{Exp } tX)_* Y, X].$$

証明. (1) $\forall O \subset M$, $\forall f \in C^\infty(O)$ について上式を f に施したものが等しいことを示せばよい。ここで

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((\text{Exp } tX)_* Y)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(f \circ (\text{Exp } tX)) \circ (\text{Exp } (-t)X)$$

である。右辺を計算するために、 $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ の充分近くの点 (u, v) で定義された C^∞ 函数 $h(u, v) := Y(f \circ (\text{Exp } uX)) \circ (\text{Exp } (-v)X)$ と $t \in \mathbb{R}$ の C^∞ 函数 $c(t) = (t, t) \in \mathbb{R}^2$ を考える。 $|t|$ が充分小さいならば $h(c(t)) = h(t, t) \in \mathbb{R}$ が定義されて、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h(t, t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h(c(t)) = (dh)_{(0,0)} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(t) = (dh)_{(0,0)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_{(0,0)} + \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_{(0,0)} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) + \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Y(f \circ (\text{Exp } tX))) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Yf) \circ (\text{Exp } (-t)X) \\ &= Y(Xf) - X(Yf) = [Y, X]f \end{aligned}$$

となる。これが示すべきことであった。

- (2) $Z := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\text{Exp } sX)_* Y) \stackrel{(1)}{=} [Y, X]$ とおく。 $\forall O \subset M$, $\forall f \in C^\infty(O)$ について

$$\begin{aligned} ((\text{Exp } tX)_* Z)(f) &= Z(f \circ (\text{Exp } tX)) \circ (\text{Exp } (-t)X) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\text{Exp } sX)_* Y)(f \circ (\text{Exp } tX)) \circ (\text{Exp } (-t)X) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Y(f \circ (\text{Exp } tX) \circ (\text{Exp } sX)) \circ (\text{Exp } (-s)X) \circ (\text{Exp } (-t)X) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Y(f \circ (\text{Exp } (t+s)X)) \circ (\text{Exp } (-(t+s))X) \\ &= \frac{d}{dt} Y(f \circ (\text{Exp } tX)) \circ (\text{Exp } (-t)X) = \frac{d}{dt} ((\text{Exp } tX)_* Y)(f) \end{aligned}$$

となる。したがって次がえられる

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Exp } tX)_* Y &= (\text{Exp } tX)_* Z = (\text{Exp } tX)_* [Y, X] \\ &\stackrel{\text{補題 6.15(2)}}{=} [(\text{Exp } tX)_* Y, (\text{Exp } tX)_* X] \stackrel{\text{補題 7.7(7)}}{=} [(\text{Exp } tX)_* Y, X]. \end{aligned}$$

□

[可換な vector 場の組]

定義. $X, Y \in \text{Vect}(M)$ について

X と Y は可換である (commute)。

$$\stackrel{\text{定義}}{\iff} [X, Y] = 0.$$

可換とよぶ理由は次の補題である。

補題 7.9. $X, Y \in \text{Vect}(M)$ について次の (a)(b) は互いに同値である。

(a) $[X, Y] = 0$.

(b) $\text{Exp } tX, \text{Exp } sY, s, t \in \mathbb{R}$, が定義できる範囲で可換である

$$(\text{Exp } tX) \circ (\text{Exp } sY) = (\text{Exp } sY) \circ (\text{Exp } tX).$$

証明. $\varphi_t = \text{Exp } tX$ とおく。補題 7.7 (6) により $\text{Exp}(s(\varphi_t)_*Y) = \varphi_t \circ (\text{Exp } sY) \circ \varphi_{-t}$ であるから、(b) $\iff (\forall s, \forall t, \text{Exp } s(\varphi_t)_*Y = \text{Exp } sY) \iff (\forall t, (\varphi_t)_*Y = Y)$ である。

$$(b) \Rightarrow (a). \quad 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y \stackrel{(b)}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t)_*Y \stackrel{\text{定理 7.8(1)}}{=} [Y, X].$$

$$(a) \Rightarrow (b). \quad \frac{d}{dt} (\varphi_t)_*Y \stackrel{\text{定理 7.8(2)}}{=} (\varphi_t)_*[Y, X] \stackrel{(a)}{=} 0. \quad \text{ゆえに } (\varphi_t)_*Y = (\varphi_0)_*Y = Y. \quad \square$$

[可換な vector 場の組の例]

(U, φ, V) : chart of M , $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ とする。このとき、 $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Vect}(U)$, $1 \leq i \leq m$, は互いに可換である。逆に、以下に示すように、 $X_1, X_2, \dots, X_l \in \text{Vect}(M)$ が互いに可換で、各点で一次独立ならば（とくに $l \leq m$ である。）、局所的にはこれらに限る。

定理 7.10. $0 \leq l \leq m$, $X_1, X_2, \dots, X_l \in \text{Vect}(M)$

(i) $\forall p \in M$ において $(X_1)_p, (X_2)_p, \dots, (X_l)_p \in T_pM$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。

(ii) $1 \leq \forall i, \forall j \leq l$, $[X_i, X_j] = 0$.

$\implies \forall p_0 \in M$, $\exists (U, \varphi, V)$: chart of M , $p_0 \in U$, $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$\text{s.t., } 1 \leq \forall i \leq l, X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ on } U.$$

証明. $1 \leq i \leq l$ について

$$\mathcal{U}_i := \mathcal{U}^{X_i, \text{open}} \subset \mathbb{R} \times M,$$

$$\Phi_i := \Phi^{X_i} : \mathcal{U}_i \rightarrow M, \quad C^\infty \text{ 写像},$$

$$\Phi_i(t, p) = (\text{Exp } tX_i)(p) =: \varphi_t^{(i)}(p),$$

と定める。 $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_l$ について

$$\{0\} \times M \subset \exists W_\sigma^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^l \times M, \text{ s.t., } \forall (t_1, \dots, t_l, p) \in W_\sigma,$$

$$\hat{F}^\sigma(t_1, \dots, t_l, p) := \varphi_{t_{\sigma(1)}}^{(\sigma(1))}(\dots(\varphi_{t_{\sigma(l)}}^{(\sigma(l))}(p))\dots) = \Phi_{\sigma(1)}(t_{\sigma(1)}, \Phi_{\sigma(2)}(t_{\sigma(2)}, \dots, \Phi_{\sigma(l)}(t_{\sigma(l)}, p) \dots))$$

が定義される。実際、 $W_\sigma := (\sigma^{-1} \times 1_M)^{-1}(1_{\mathbb{R}^{l-1}} \times \Phi_{\sigma(l)})^{-1} \dots (1_{\mathbb{R}} \times \Phi_{\sigma(2)})^{-1}(\mathcal{U}_{\sigma(1)})$ とおけばよい。定義から $\hat{F}^\sigma : W_\sigma \rightarrow M$ は C^∞ 写像である。

$$\{0\} \times M \subset W_0 := \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{S}_l} W_\sigma^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^l \times M$$

とおく。ここで可換性: $1 \leq \forall i, \forall j \leq l$, $[X_i, X_j] = 0$, により C^∞ 写像 $\hat{F}^\sigma|_{W_0}$ は σ のとり方によらない（下図参照）。

に視点を移す。これを l -平面場という。きちんと定義するために、接束の射影 $\pi: TM \rightarrow M$ を思い出す。 $\forall p \in M$ について $\pi^{-1}(p) = T_p M$ である。さらに $0 \leq l \leq m$ とする。

定義 7.11. $E \subset TM$: l -平面場 (l -plane field)

$\Longleftrightarrow$ 0) $E \subset TM$: 部分集合.

1) $\forall p \in M, E_p := E \cap T_p M \subset T_p M$: l -次元実線型部分空間.

2) (局所自明性 (local triviality)) $\forall p_0 \in M, p_0 \in \exists O \subset M, \exists Y_1, \dots, \exists Y_l \in \text{Vect}(O)$,
s.t., $\forall p \in O, \{(Y_1)_p, \dots, (Y_l)_p\}$ は E_p の基底である。

(注意) (1) $Y_1, \dots, Y_l$ は局所的にとればよい。 M 全体ではとれないのが普通である。

(2) この定義は「 E は接束 TM の階数 l の C^∞ vector 部分束である」ということを言っている。

記号. $O \subset M$ について

$$\Gamma(O; E) := \{X \in \text{Vect}(O); \forall p \in O, X_p \in E_p\}$$

と表し、 E の O 上の切断 (section) の空間とよぶ。 $\text{Vect}(O)$ の $C^\infty(O)$ -部分加群である。

[Frobenius の定理]

それでは、可換な vector 場の組との関係に戻る。

補題-定義 7.12. $E \subset TM$: l -平面場について次は互いに同値である。

(a) $\forall p_0 \in M, p_0 \in \exists O \subset M, \exists X_1, \dots, \exists X_l \in \text{Vect}(O)$,
s.t., (i) $\forall p \in O, \{(X_1)_p, \dots, (X_l)_p\}$ は E_p の基底である。
(ii) $1 \leq \forall i, \forall j \leq l, [X_i, X_j] = 0$.

(b) $\forall O_1 \subset M, [\Gamma(O_1; E), \Gamma(O_1; E)] \subset \Gamma(O_1; E)$.

(c) $[\Gamma(M; E), \Gamma(M; E)] \subset \Gamma(M; E)$ つまり $\Gamma(M; E)$ は $\text{Vect}(M)$ の Lie 部分代数である。

このとき、平面場 E は対合的 (involutive) または積分可能 (integrable) であるという。

つぎの補題は補題-定義 7.12 の証明の準備である。

補題 7.13. $O \subset M, f, g \in C^\infty(O), X, Y \in \text{Vect}(O)$,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

証明. $\forall O_1 \subset O, \forall h \in C^\infty(O_1)$,

$$\begin{aligned} [fX, gY]h &= fX(g(Yh)) - gY(f(Xh)) \\ &= f(Xg)(Yh) + fgXYh - g(Yf)(Xh) - gfY(Xh) \\ &= (f(Xg)Y + fg[X, Y] - g(Yf)X)h. \end{aligned}$$

□

補題 7.12 の証明. ((c) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (a) を示す.)

(b) $\Rightarrow$ (c) は主張を弱めているだけなので明らか。

(c) $\Rightarrow$ (b). $\forall Z, \forall W \in \Gamma(O_1; E), \forall p \in O_1, [Z, W]_p \in E_p$ を示せばよい。 $\exists (U, \varphi, V)$: chart of $M, p \in U \subset O_1, \varphi(p) = 0$ である¹。このとき $\exists r > 0, \{x \in \mathbb{R}^m; \|x\| < r\} \subset V$ であ

¹ まず U をとって、 $U \cap O_1$ に取り直せばよい。

る。そこで C^∞ 函数 $\chi: V \rightarrow \mathbb{R}$ を $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \|x\| < r/3, \\ 0, & \text{if } x \in V \setminus \{\|x\| > 2r/3\}, \end{cases}$ となるようにとる。 M は Hausdorff だから $(\chi \circ \varphi)Z, (\chi \circ \varphi)W \in \Gamma(M; E)$ とみなすことができる。そこで $\varphi^{-1}(\{\|x\| < r/3\})$ の上では $[Z, W]$ は $[(\chi \circ \varphi)Z, (\chi \circ \varphi)W] \in \Gamma(M, E)$ に一致する。ゆえに $[Z, W]_p \in E_p$ である。

(a) $\Leftrightarrow$ (b) の準備. $\forall p_0 \in M$ とする。 E は l -平面場だから、定義 7.11, 2) の $p_0 \in O \subset M$ と $Y_1, \dots, Y_l \in \text{Vect}(O)$ をとる。一方で、 $p_0 \in U$ をみたす chart (U, φ, V) , $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ をとる。 $(Y_1)_{p_0}, \dots, (Y_l)_{p_0}$ は一次独立だから、 x_i たちの番号を上手く付け替えれば $(Y_1)_{p_0}, \dots, (Y_l)_{p_0}, \left(\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)_{p_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{p_0}$ は $T_{p_0}M$ の基底となる。 Y_i たちは C^∞ だから C^∞ 写像 $A: O \cap U \rightarrow M(l, l; \mathbb{R})$ および $B: O \cap U \rightarrow M(l, m-l; \mathbb{R})$ がとれて $\forall p \in O \cap U$ について

$$\begin{aligned} & ((Y_1)_p, \dots, (Y_l)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p) \\ (\#\#) \quad &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right) \begin{pmatrix} A(p) & 0 \\ B(p) & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが、 $(Y_1)_{p_0}, \dots, (Y_l)_{p_0}, \left(\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)_{p_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{p_0}$ が基底であることから $\det A(p_0) \neq 0$ である。そこで、次がなりたつ

$$p_0 \in \exists O' \subset O \cap U, \forall p \in O', \det A(p) \neq 0.$$

(a) $\Rightarrow$ (b). $\forall Z, \forall W \in \Gamma(O_1; E)$, $\forall p_0 \in O_1$ について $[Z, W]_{p_0} \in E_{p_0}$ を示せばよい。

これらの Y_i が条件 (a) の X_i であるとする。上記の O' を $p_0 \in O' \subset U \cap O \cap O_1$ となるようにとる²。このとき O' 上で

$$\begin{aligned} Z &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right) \begin{pmatrix} Zx_1 \\ \vdots \\ Zx_m \end{pmatrix} \\ &= ((X_1)_p, \dots, (X_l)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p) \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Zx_1 \\ \vdots \\ Zx_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで Z は C^∞ だから Zx_i も C^∞ であり、Cramer の公式により A^{-1} と $-BA^{-1}$ も C^∞ である。そこで、 C^∞ 函数 $f_i, h_k \in C^\infty(O')$ によって $Z|_{O'} = \sum_{i=1}^l f_i X_i + \sum_{k=l+1}^m h_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ と表されるが、 $Z|_{O'} \in \Gamma(O'; E)$ だから $h_k = 0$ である。したがって、 $Z|_{O'} = \sum_{i=1}^l f_i X_i$, $f_i \in C^\infty(O')$, となる。同様に、 $W|_{O'} = \sum_{j=1}^l g_j X_j$, $g_j \in C^\infty(O')$, となる。以上から O' 上では

$$\begin{aligned} [Z, W] &= \sum_{i,j} [f_i X_i, g_j X_j] \stackrel{\text{補題 7.13}}{=} \sum f_i g_j [X_i, X_j] + \sum f_i (X_i g_j) X_j - \sum g_j (X_j f_i) X_i \\ &\stackrel{X_i \text{ のとり方}}{=} \sum f_i (X_i g_j) X_j - \sum g_j (X_j f_i) X_i \in \Gamma(O'; E) \end{aligned}$$

²たとえば O' を $O' \cap O_1$ で取り替える。

となる。つまり $[Z, W]_{p_0} \in E_{p_0}$ である。

$p_0 \in O_1$ は任意だから $[Z, W] \in \Gamma(O_1; E)$ である。

(b) $\Rightarrow$ (a). (##) の状況で O' 上で

$$(X_1, \dots, X_l) := (Y_1, \dots, Y_l)A^{-1} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_{l+1}} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right) \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

とおく。 $\forall p \in O'$ において $\{(X_1)_p, \dots, (X_l)_p\}$ は E_p の基底である。 $BA^{-1} = (c_{ik})$ とすると

$$(**) \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=l+1}^m c_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \in \text{Vect}(O')$$

である。そこで、 $[X_i, X_j] = 0$, $1 \leq \forall i, \forall j \leq l$, を示せばよい。まず、条件 (b) の仮定から $\forall p \in O'$, $[X_i, X_j]_p \in E_p$ だから、 $[X_i, X_j]$ について上述の Z と同様に考えて $\exists f_s \in C^\infty(O')$, $1 \leq s \leq l$, について

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^l f_s X_s \stackrel{(**)}{=} \sum_{s=1}^l f_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^l \sum_{k=l+1}^m f_s c_{sk} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

となる。こんどは X_i と X_j のそれぞれについて $(**)$ をつかうと

$$[X_i, X_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=l+1}^m c_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=l+1}^m c_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = \sum_{k=l+1}^m (X_i c_{jk} - X_j c_{ik}) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

となる³。上式と下式の $\frac{\partial}{\partial x_s}$, $1 \leq s \leq l$, の係数を比べると $f_s = 0$ となる。これを上式にもどして $[X_i, X_j] = 0$ となる。これで (b) $\Rightarrow$ (a) が示された。

以上で補題 7.12 が示された。 □

補題 7.12 と定理 7.10 を組みあわせて次を得る。

定理 7.10 (Frobenius). l -平面場 $E \subset TM$ について次は同値である。

(a) E : involutive.

(b) $\forall p_0 \in M$, $\exists (U, \varphi, V)$: chart of M , $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, s.t., $p_0 \in U$,

$$\forall p \in U, \quad E_p = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_p \right\rangle \subset T_p M.$$

次回は 1 の分割を導入したあと、Riemann 計量の議論に入る。

³ 上式右側の等号は、補題 6.7 の証明で述べた括弧積の局所表示を使う。つまり、局所座標 $(x_1, \dots, x_m)$ によって $X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と表された vector 場について $[X, Y] = \sum_{j=1}^m (X\eta_j - Y\xi_j) \frac{\partial}{\partial x_j}$ となっている。

[[以下の補足はビデオで解説していません。]]

第 10 回の補足

この補足では C^∞ 固有沈め込み (proper submersion) $F : M \rightarrow N$ は局所自明性をもつ (C^∞ fiber bundle である) ことを証明する。さらに N が連結ならば

$$\forall q_1, \forall q_2 \in N, \quad F^{-1}(q_1) \cong F^{-1}(q_2), \quad C^\infty \text{ diffeo}$$

となる。この証明には**隆起函数を使う**。 C^∞ ではなりたつが、複素解析的にはなりたないことである⁴。

そもそも、 M, N を C^∞ 多様体とし、 $\dim M = m, \dim N = n$ とする。 C^∞ 写像 $F : M \rightarrow N$ が**沈め込み** (submersion) であるとは、任意の $p \in M$ について微分 $(dF)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が全射であることを言う。とくに任意の $q \in N$ の逆像 $F^{-1}(q)$ は M の C^∞ 部分多様体である。また、 F が**固有** (proper) であるとは、 N の任意の compact 部分空間 K について $F^{-1}(K)$ が compact であることを言う。とくに任意の $q \in N$ の逆像 $F^{-1}(q)$ は compact である。

定理 7.15. いまの状況で、任意の $q \in N$ について q の N における開近傍 O_q と C^∞ 微分同相写像 $\Phi_q : F^{-1}(O_q) \xrightarrow{\cong} O_q \times F^{-1}(q)$ が存在して、 $F = \text{pr}_1 \circ \Phi_q : F^{-1}(O_q) \rightarrow O_q$ が成り立つ。ここで $\text{pr}_1 : O_q \times F^{-1}(q) \rightarrow O_q, (q', p') \mapsto q'$ は第一成分への射影である。この結論を F は**局所自明** (locally trivial) であるという。

とくに N が連結ならば、任意の 2 点 $q_1, q_2 \in N$ について $F^{-1}(q_1)$ と $F^{-1}(q_2)$ は C^∞ 微分同相である。

証明. 以下、記号を軽くするため $l \geq 0, r > 0$ について $B_r^l := B_l(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^l; \|x\| < r\}$ と表す。証明に入る。 $N \subset^{\text{open}} \mathbb{R}^n$ かつ $q = 0 \in N$ の場合に示せば充分である。 $N \subset \mathbb{R}^n$ の通常の座標を $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ とする。

補題 7.16. $\mathbb{R}^n$ における 0 の開近傍 W と、 $F^{-1}(W) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{open}} M \times \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ vector 場 X が存在して、任意の $p \in F^{-1}(W)$ と $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ について次の 2 つの条件を満たす

$$\begin{aligned} X_{(p,a)} &\in T_p M = T_p M \times \{0\} \subset T_{(p,a)}(M \times \mathbb{R}^n), \\ (dF)_q(X_{(p,a)}) &= \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{F(p)} \in T_a \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

補題 7.16 の証明. 合成函数 $y_i \circ F : M \rightarrow \mathbb{R}$ をも y_i と表すことにする。任意の $p \in F^{-1}(0)$ について $(dF)_p$ は全射だから、余接空間 $T_p^* M$ の部分集合 $\{(dy_1)_p, \dots, (dy_n)_p\}$ は線型独立である。さらに $x_1(p) = x_2(p) = \dots = x_m(p) = 0$ をみたす M の座標 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ をとる。集合 $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, \dots, (dx_m)_p, (dy_1)_p, \dots, (dy_n)_p\}$ は $T_p^* M$ を生成する。そこで必要なら x_i たちの番号を付け替えることにより

$$(dx_1)_p, (dx_2)_p, \dots, (dx_{m-n})_p, (dy_1)_p, \dots, (dy_n)_p$$

は $T_p^* M$ の基底となる。逆写像定理から、 p の M における開近傍 U'_p と正数 $\varepsilon_p > 0$ が存在して、 $\psi_p := (x_1, \dots, x_{m-n}, y_1, \dots, y_n)$ は C^∞ 微分同相 $\psi_p : U'_p \xrightarrow{\cong} B_{2\varepsilon_p}^n$ を与える。

⁴だからこそ、複素解析多様体については小平-Spencer の変形理論 (deformation theory) がある。

$U_p := \psi_p^{-1}(B_{\varepsilon_p}^n)$ とおく。 $\{U_p\}_{p \in F^{-1}(0)}$ は compact 空間 $F^{-1}(0)$ の開被覆だから、有限個の点 $p_1, \dots, p_l \in F^{-1}(0)$ が存在して $F^{-1}(0) \subset U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup \dots \cup U_{p_l}$ となる。 $1 \leq i \leq l$ について $U_i := U_{p_i}$, $U'_i := U'_{p_i}$, $\varepsilon_i := \varepsilon_{p_i}$, $\psi_i := \psi_{p_i}$ などと略記する。

$U'_i \times \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ vector 場 X_i を

$$(X_i)_{(p,a)} := \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{(p,a)} \in T_p M, \quad (p \in U'_i, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義する。 $(dF)_q((X_i)_{(p,a)}) = \sum_{k=1}^n a_k (\partial/\partial y_k)_{F(p)} \in T_a \mathbb{R}^n$ がなりたつ。

つぎに (隆起函数を使って) C^∞ 函数 $\hat{\rho}_i : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq l$, を

$$\hat{\rho}_i(p) := \begin{cases} 1, & \text{if } p \in U_i \text{ つまり } \psi_i(p) \in B_{\varepsilon_i}^n, \\ 0, & \text{if } p \notin U'_i \text{ つまり } \psi_i(p) \notin B_{2\varepsilon_i}^n, \end{cases}$$

をみたすようにとる。 $U_1 \cup \dots \cup U_l$ 上の C^∞ 函数 ρ_i を $\rho_i := \hat{\rho}_i (\sum_{j=1}^l \hat{\rho}_j)^{-1}$ によって定める。 $U_1 \cup \dots \cup U_l$ の上で $\sum_{i=1}^l \rho_i = 1$ である。 $(U_1 \cup \dots \cup U_l) \times \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ vector 場 X を $X = \sum_{i=1}^l \rho_i X_i$ によって定義する。これは補題の2つの条件を充たしている。

$\hat{\varepsilon} = \max_{1 \leq i \leq l} \varepsilon_i$ とおき、 $K_1 \subset N$ を $B_{\hat{\varepsilon}}^n$ の閉包とする。これは compact である。 $F^{-1}(K_1)$ は、 F が固有だから compact であり、 $\hat{\varepsilon}$ のとり方から $U_1 \cup \dots \cup U_l$ を含む。そこで $K_2 := F^{-1}(K_1) \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_l)$ とおくと、これは compact である。 $W := B_{\hat{\varepsilon}}^n \setminus F(K_2)$ とおけば、 W は $\mathbb{R}^n$ における 0 の開近傍であって、 $F^{-1}(W) \subset U_1 \cup \dots \cup U_l$ である。 X を $F^{-1}(W) \times \mathbb{R}^n$ に制限したものが、欲しかった vector 場である。 $\square$

それでは定理の証明をはじめめる。 $\delta > 0$ を $B_{5\delta}^n \subset W$ となるようにとる。(隆起函数をつかって) C^∞ 函数 $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ を

$$\theta(y) := \begin{cases} 1, & \text{if } \|y\| \leq 4\delta/3, \\ 0, & \text{if } \|y\| \geq 5\delta/3, \end{cases}$$

をみたすようにとり、 $M \times \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ vector 場 Y を

$$Y_{(p,a)} := \begin{cases} \theta(F(p))\theta(a)X_{(p,a)}, & \text{if } p \in F^{-1}(V), \\ 0, & \text{if } p \notin F^{-1}(V), \end{cases} \quad ((p, a) \in M \times \mathbb{R}^n)$$

によって定める。 Y の台は $F^{-1}(\overline{B_{5\delta/3}^n}) \times \overline{B_{5\delta/3}^n}$ に含まれるが、 F は固有だから Y の台も compact である。定理 7.6 から Y は完備である。つまり任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\text{Exp}(tY)$ が定義できる。 $(p, a) \in M \times \mathbb{R}^n$ について

$$\text{Exp}(tY)(p, a) = (\alpha_t(p, a), \beta_t(p, a)) \in M \times \mathbb{R}^n$$

と表す。このとき次がなりたつ。

補題 7.17.

- (1) $\beta_t(p, a) = a$.
- (2) $\alpha_{-t}(\alpha_t(p, a), a) = p$.
- (3) $a \in B_{4\delta/3}^n$ かつ $F(p)$ と $F(p) + at$ がともに $B_{4\delta/3}^n$ に属するならば次がなりたつ

$$F(\alpha_t(p, a)) = F(p) + at.$$

- (4) $F(p) \in B_\delta^n$ ならば $\alpha_{-1}(p, F(p)) \in F^{-1}(0)$ がなりたつ。

補題 7.17 の証明. (1) $\frac{d}{dt}\beta_t(p, a)$ は Y の $\mathbb{R}^n$ 方向の成分に等しく、後者は 0 である。したがって $\beta_t(p, a)$ は定数 $\beta_0(p, a) = a$ である。

(2) $(p, a) = \text{Exp}(-tY) \text{Exp}(tY)(p, a) = \text{Exp}(-tY)(\alpha_t(p, a), a) = (\alpha_{-t}(\alpha_t(p, a), a), a)$.

(3) いま

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\alpha_t(p, a)) &= (dF)_{\alpha_t(p, a)}Y_{(\alpha_t(p, a), a)} = \theta(F(\alpha_t(p, a)))(dF)_{\alpha_t(p, a)}X_{(\alpha_t(p, a), a)} \\ &= \theta(F(\alpha_t(p, a))) \sum_{k=1}^n a_k (\partial/\partial y_k)_{F\alpha_t(p, a)} \end{aligned}$$

であるから $F(\alpha_t(p, a)) \in B_{4\delta/3}^n$ ならば、 $F(\alpha_t(p, a))$ と $F(p) + ta$ は同じ初期値問題の解であり、たがいに等しい。

(4) このとき、(3) により、任意の $t \in [-1, 0]$ について $F(\alpha_t(p, F(p))) = F(p) + tF(p) \in B_\delta^n$ である。 $t = -1$ を代入して (4) が得られる。

以上で補題が示された。 $\square$

$O_q = B_\delta^n$ とおく。 O_q は $q = 0$ の $N^{\text{open}} \subset \mathbb{R}^n$ における開近傍である。 C^∞ 写像 Φ_q を

$$\Phi_q : F^{-1}(O_q) \rightarrow O_q \times F^{-1}(q), \quad p \mapsto (F(p), \alpha_{-1}(p, F(p))),$$

と定める。逆写像は $(a, p_0) \in O_q \times F^{-1}(q) \mapsto \alpha_1(p_0, a) \in F^{-1}(O_q)$ によって与えられる。実際、 $F(\alpha_1(p_0, a)) = F(p_0) + a = 0 + a = a$ であるから補題 7.17(2) によって $\Phi_q(\alpha_1(p_0, a)) = (a, \alpha_{-1}(\alpha_1(p_0, a), a)) = (a, p_0)$ が成り立ち、もう一度補題 7.17(2) によって $\alpha_1(\alpha_{-1}(p, F(p)), F(p)) = p$ が成り立つからである。以上で Φ_q は C^∞ 微分同相であることが分かった。第一成分への射影との適合条件は Φ_q の定義から明らかである。 $\square$

[例題演習]

例題演習 第 10 回

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ と、 $t \in \mathbb{R}$ の実数値関数 $x(t), y(t)$ についての微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (*)$$

を考える。

(1) 行列 A の指数関数 $\exp(tA)$ を求めよ。

(2) 各 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ について $(x(0), y(0)) = (a, b)$ をみたす方程式 $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ についての $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t))$ を求めよ。

(3) $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ について、方程式 $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ と $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在して $(x(0), y(0)) = (a, b)$ かつ $(x(t_0), y(t_0)) = (c, d)$ となるとき、そのときに限り $(a, b) \sim (c, d)$ であると定義する。このとき、この関係 $\sim$ が $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の同値関係であることを示せ。

(4) この同値関係 $\sim$ による商空間 $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\sim$ は Hausdorff 空間か？ 証明付きで答えよ。