第3回, 20年5月20日.

§3 双曲距離と面積

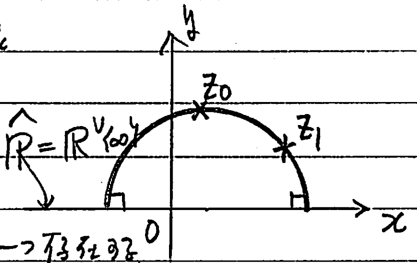
$\mathbb{H} = \{x+y\sqrt{-1} \in \mathbb{C} ; x, y \in \mathbb{R}, y>0\}$ 上半平面

双曲計量 $\frac{|dz|}{\mathrm{Im}\, z}$ $PSL_2(\mathbb{R})$で不変

$t_0 < t_1$

$l : [t_0, t_1] \to \mathbb{H}$, $t \mapsto l(t)$, 区分的 C^∞曲線

(lの双曲長さ) $:= \int_{t_0}^{t_1} \frac{|l'(t)|}{\mathrm{Im}\, l(t)} dt$



Thm 2.5 $\forall z_0 \neq \forall z_1 \in \mathbb{H}$

(1) z_0とz_1を通る実軸$\hat{\mathbb{R}}$と直交する円がただ一つ存在する

(2) z_0とz_1を結ぶ(双曲長さに関する)最短線は実軸$\hat{\mathbb{R}}$に直交する円である

└これを測地線(geodesic)という

Def 2.6 $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$

$d(z_0, z_1) :=$ (z_0をz_1につなぐ測地線の双曲長さ) 双曲距離

$\underset{\text{Thm2.5}}{=} \inf\{l$の双曲長さ ; lはz_0をz_1につなぐ区分的C^∞曲線$\}$

今日やること

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z|<1\}$ 上の双曲計量と測地線
- 双曲距離dが定める位相が$\mathbb{H}$および$\mathbb{D}$の通常の位相にひとしいこと
- 双曲三角形の面積
- 双曲計量についてのGauss-Bonnetの定理

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z|<1\}$

$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z|=1\}$

$A_0 = \pm\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ 1 & +\sqrt{-1} \end{pmatrix} ; \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}$ $z \mapsto \frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}$, $A_0^{-1}(z) = \sqrt{-1}\,\frac{z+1}{-z+1}$

$\partial\mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \partial\mathbb{D}$

3-2

No. Date 20・05・20

$A_0^{-1}(z) = \sqrt{-1}\dfrac{z+1}{-z+1}$ これによって $\mathbb{H}$ 上の双曲計量 $\dfrac{|dz|}{\mathrm{Im}\,z}$ をひきもどす

$d(A_0^{-1}(z)) = \sqrt{-1}\dfrac{-z+1+z+1}{(-z+1)^2}dz = \dfrac{2\sqrt{-1}}{(z-1)^2}dz$, $|d(A_0^{-1}(z))| = \dfrac{2}{|z-1|^2}|dz|$

$\mathrm{Im}\,A_0^{-1}(z) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{-1}\dfrac{(z+1)(-\bar{z}+1)}{(-z+1)(-\bar{z}+1)}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{|z-1|^2}(z+1)(-\bar{z}+1)\right) = \dfrac{1}{|z-1|^2}\mathrm{Re}\left((z+1)(-\bar{z}+1)\right)$

$= \dfrac{1-|z|^2}{|z-1|^2}$

$(A_0^{-1})^*\dfrac{|dz|}{\mathrm{Im}\,z} = \dfrac{2}{1-|z|^2}|dz|$

ゆえに $\mathbb{D}$ 上の双曲計量は $\dfrac{2|dz|}{1-|z|^2}$ で定義され、$\mathbb{D}$ を保つ一次分数変換 $PSU(1,1)$ で不変である。円々対応と等角性により $\mathbb{D}$ 上の測地線は $\partial\mathbb{D}$ に直交する円である

原点 $0\in\mathbb{D}$ と $0\neq z_0\in\mathbb{D}$ の双曲距離を計算する

0 と z_0 を通る Euclid 的直線 $\ell(t) = tz_0$, $0\leq t\leq 1$ は $\partial\mathbb{D}$ と直交するから $\mathbb{D}$ の測地線である。ゆえに

$$d(0,z_0) = \int_0^1 \frac{2|\dot{\ell}(t)|}{1-|\ell(t)|^2}dt = \int_0^1 \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2t^2}dt \stackrel{s=|z_0|t}{=\!=\!=} \int_0^{|z_0|}\frac{2ds}{1-s^2}$$

$$= \int_0^{|z_0|}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right)ds = \left[\log\left|\frac{1+s}{1-s}\right|\right]_{s=0}^{s=|z_0|} = \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

ゆえに $d(0,z_0) = \log\dfrac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$ ($|z_0|$ について狭義単調増大、$|z_0|=0$ のとき 0 で、$|z_0|\to 1$ とすると $\to +\infty$)

定理3.1 (1) 双曲距離 d が $\mathbb{D}$ 上に定める位相は $\mathbb{D}$ の通常の位相に等しい

(2) 双曲距離 d が $\mathbb{H}$ 上に定める位相は $\mathbb{H}$ の通常の位相に等しい。

証明 (1)⇒(2) $A_0 : \mathbb{H} \cong \mathbb{D}$ は通常の位相について同相であり、双曲距離 d を保つから (1) が示されれば (2) もえられる

そこで以下 (1) を示す。次の2つを示せばよい

(i) d についての開集合が通常の位相で開集合であること

(ii) 通常の位相の開集合が d についての開集合であること

$O\subset\mathbb{D}$ 部分集合 $O\neq\phi$ としてよい

(i) $\mathcal{O}$ が d について開集合であるとする。$\forall z_0 \in \mathcal{O}$ をとる $\exists A \in PSU(1,1)$, $Az_0 = 0$

$0 \in A(\mathcal{O})$: d についての開集合だから $0 < \exists r < 1$

$$\overset{Az_0}{\parallel}\ 0 \in \{z \in \mathbb{D} ; d(0,z) < \log\frac{1+r}{1-r}\} \subset A(\mathcal{O})$$

$$\{z \in \mathbb{D} : |z| < r\}$$

つまり $z_0 \in \underbrace{A^{-1}\{z \in \mathbb{D} : |z| < r\}}_{\text{これは通常の位相で開集合}} \subset \mathcal{O}$

$z_0 \in \mathcal{O}$ は任意だから $\mathcal{O}$ は通常の位相で開集合である

(ii) $\mathcal{O}$ が通常の位相で開集合とする。$\forall z_0 \in \mathcal{O}$ をとる。$\exists A \in PSU(1,1)$ $Az_0 = 0$

$0 \in A(\mathcal{O})$: 通常の開集合だから $0 < \exists r < 1$

$$Az_0 = 0 \in \{z \in \mathbb{D} : |z| < r\} \subset A(\mathcal{O})$$

$$\{z \in \mathbb{D} ; d(0,z) < \log\frac{1+r}{1-r}\}$$

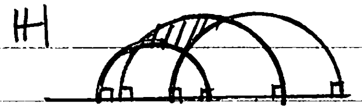
つまり $z_0 \in A^{-1}\{z \in \mathbb{D} : d(0,z) < \log\frac{1+r}{1-r}\} \subset \mathcal{O}$

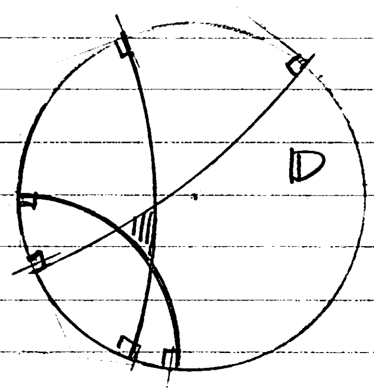
$$= \{w \in \mathbb{D} : d(z_0, w) < \log\frac{1+r}{1-r}\}$$

これは d について開集合

$z_0 \in \mathcal{O}$ は任意だから $\mathcal{O}$ は d について開集合である //(1) //Thm

<u>双曲(測地)三角形</u> 三辺が測地線である三角形





$\mathbb{H}$ で双曲三角形の面積を計算する

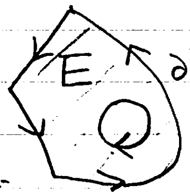
双曲計量の定める面積要素 (area element)

$$\frac{dx \wedge dy}{y^2} \quad \text{on } \mathbb{H} = \{x + y\sqrt{-1} ; \begin{matrix} x, y \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{matrix}\}$$

ここで

$$d\left(\frac{dx}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} dy \wedge dx = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$$

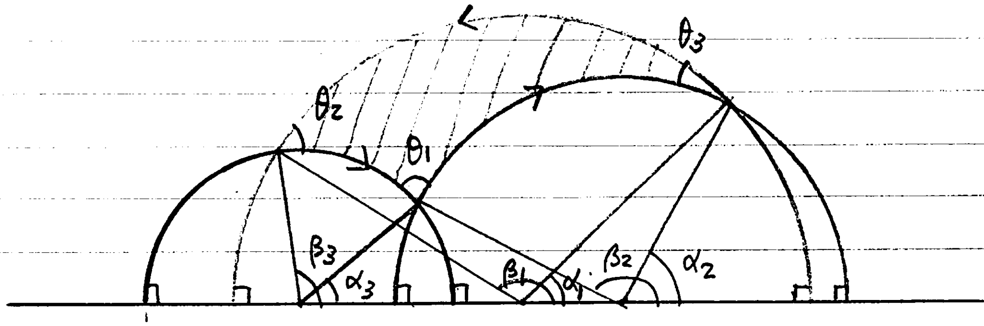
に注意すると Green の定理により次がえられる



補題3.2. $E\subset\mathbb{H}$：区分的になめらかな境界をもつcompact集合について

$$|Eの双曲面積| = \int_{\partial E}\frac{dx}{y}$$

ここで∂EはEの内部を左に見てEの境界を一周する。



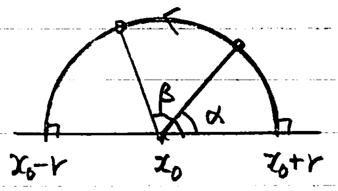
定理3.3 双曲三角形の面積は3頂点の角度を$\theta_1, \theta_2, \theta_3$とすると

$$\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3) = \pi-(内角の和)$$

で与えられる。

証明 $x_0\in\mathbb{R}$, $r>0$について測地線

$$x_0+re^{\sqrt{-1}\theta} = (x_0+r\cos\theta)+\sqrt{-1}r\sin\theta,\quad \alpha\leqq\theta\leqq\beta$$



に沿って$\dfrac{dx}{y}$を線積分すると

$$\int_\alpha^\beta\frac{d(x_0+r\cos\theta)}{r\sin\theta} = \int_\alpha^\beta\frac{-r\sin\theta}{r\sin\theta}d\theta = \alpha-\beta$$

となる

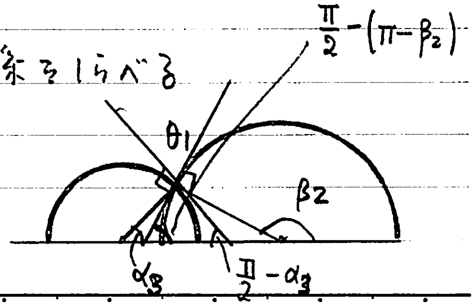
したがって上図の双曲三角形の面積は補題3.2により

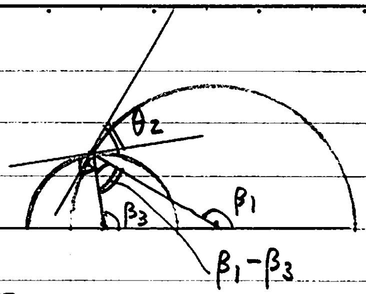
$$\beta_2-\alpha_2+\beta_3-\alpha_3+\alpha_1-\beta_1$$

である これらと内角$\theta_1, \theta_2, \theta_3$との関係をしらべる

まず右図により

$$\theta_1 = \pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_3\right)-\left(\frac{\pi}{2}-(\pi-\beta_2)\right)$$
$$= \pi+\alpha_3-\beta_2 \quad である$$

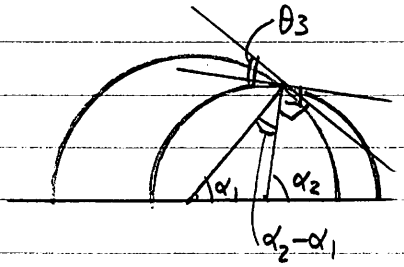




次に左図により

$$\theta_2=\beta_1-\beta_3$$

である



最後に右図により $\theta_3=\alpha_2-\alpha_1$ である

以上により

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi+\alpha_3-\beta_2+\beta_1-\beta_3+\alpha_2-\alpha_1$$

$$=\pi-(\beta_2-\alpha_2+\beta_3-\alpha_3+\alpha_1-\beta_1)=\pi-(\text{双曲三角形の面積})$$

ゆえに次がえられる

$$\text{双曲三角形の面積}=\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$ // Thm

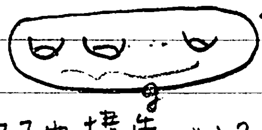
等角性により $\mathbb{D}$ についても同じことが成立つ

系3.4 $\mathbb{D}$ 内の双曲三角形の面積も

$\pi-(\text{内角の和})$

で与えられる

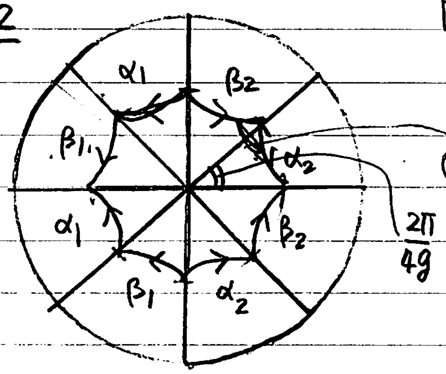
双曲閉曲面のひとつのつくり方

$g\geq 0$, $\Sigma_g=$  ← 表面だけ考える

種数 g 閉曲面

$g\geq 2$ のとき Σ_g に双曲構造が入ることを示す

g=2



$\mathbb{D}$ を原点0中心にして $4g$ 等分する

原点を中心とする双曲(測地)正 $4g$ 角形を考える.

この角度を θ とするとこの正 $4g$ 角形の面積は

No. Date 20.05.20

面積 $= 4g\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{4g}+\theta\right)\right) = (4g-2)\pi - 4g\theta$

となる. 小さくしていくと 面積 $\to 0$, $\theta \to \frac{4g-2}{4g}\pi$ となる

大きくしていくと $\theta \to 0$ だから 面積 $\to (4g-2)\pi$ である

ここで 仮定 $g \geqq 2$ より $(4g-2)\pi \geqq 2\pi$ である

そこで $4g\theta = 2\pi$ の場合が考えられる

このθについて すべての頂点を1つの頂点に

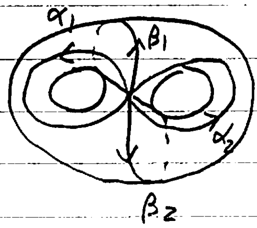
なるように辺をはりあわせる. 辺のはりあわせ方は

$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$

の順番に行う. そうすると 種数 g の閉曲面で

頂点が平ら(頂点の角度が 2π)であるものが得られる

Σ_2



このときの面積 $= (4g-2)\pi - 2\pi = (2g-2)\times 2\pi$

$= -2\pi\chi(\Sigma_g)$. (但, $\chi(\Sigma_g) = 2-2g$: Σ_g の Euler数)

となる

そもそも曲面 C が三角形分割されているときは 分割によらず次が成立つ

$\chi(C) =$ (頂点の個数) $-$ (辺の本数) $+$ (面の個数)

定理3.5 (双曲閉曲面のGauss-Bonnetの定理)

C : 双曲閉曲面 (各点のまわりの角度 $= 2\pi$)

$\Rightarrow$ (Cの双曲面積) $= -2\pi\chi(C)$

証明 C を双曲三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$ に分割する

それぞれの内角を $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}$, $1 \leq i \leq m$, とすると

$$(C\text{の双曲面積}) = \sum_{i=1}^{m} \pi - (\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3})$$

ここで 面の個数 $= m$

三角形 △ なので 辺の本数 $= \frac{3}{2}m$

各点のまわりの角度 $= 2\pi$ より 頂点の個数 $= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}(\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3})$

したがって

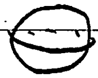
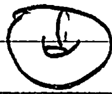
$$(C\text{の双曲面積}) = m\pi - \sum_{i=1}^{m}(\theta_{i_1}+\theta_{i_2}+\theta_{i_3}) = m\pi - 2\pi(\text{頂点の個数})$$

$$= 2\pi\left(-m+\frac{3}{2}m-\text{頂点の個数}\right) = -2\pi\chi(C)$$

定理が示された//

面積 $\neq 0$ なので $-2\pi\chi(C) \neq 0$ つまり $\chi(C) \neq 0$

つまり $2-2g<0$ で $g \geqq 2$ でなければならない

つまり $g=0,1$ 　$\Sigma_0 =$  S^2, $\Sigma_1 =$  T^2 には

(各点のまわりの角度が 2π である) 双曲閉曲面の構造は入らない //