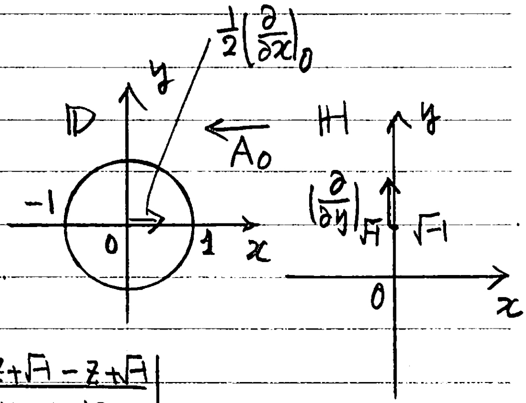
第2回 20年5月13日

§2. 測地線とMöbius変換



まず単位円板について考える

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ 単位円板

$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$

$A_0 : \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}$

$z \longmapsto \frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}$

$\sqrt{-1} \longmapsto 0$

$\left.\begin{array}{l} 0 \longmapsto -1 \\ 1 \longmapsto -\sqrt{-1} \\ \infty \longmapsto 1 \end{array}\right)$ 円々対応により $\hat{\mathbb{R}}$ は $\partial\mathbb{D}$ にうつる

$\frac{d}{dz}(A_0 z)\Big|_{z=\sqrt{-1}} = \frac{z+\sqrt{-1}-z+\sqrt{-1}}{(z+\sqrt{-1})^2}\Big|_{z=\sqrt{-1}}$

$= \frac{2\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ だから

$(A_0)_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0$ である

$A_0 PSL_2(\mathbb{R}) A_0^{-1}$ が $\mathbb{D}$ を保つ一次分数変換の全体である

補題2.1. $A_0 PSL_2(\mathbb{R}) A_0^{-1} = \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} ; \begin{array}{l} \theta \in \mathbb{R} \\ z_0 \in \mathbb{D} \end{array} \right\} \left(=: PSU(1,1) \right.$ とかく$\left.\right)$

証明 $z \longmapsto \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ これは $\mathbb{D}$ を保つ

∵) $1 \longmapsto \frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}$

$-1 \longmapsto \frac{1-z_0}{1+\bar{z}_0}$ $\Big\}$ いずれも $\partial\mathbb{D}$ 上にある

円々対応により $\partial\mathbb{D}$ が保たれる

$\sqrt{-1} \longmapsto \frac{\sqrt{-1}-z_0}{1+\sqrt{-1}z_0}$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{D}$ を保つ //

$z_0 \longmapsto 0$

以上より $z \longmapsto e^{\sqrt{-1}\theta} z$ は $(T_{\sqrt{-1}}\mathbb{D} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$ に推移的に作用する

$PSU(1,1) \longrightarrow STD$

$\varphi \longmapsto \varphi_*\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0 \bmod \mathbb{R}_+\right)$ は一対一対応である

$A_0 PSL_2(\mathbb{R}) A_0^{-1} \longrightarrow STD$ も一対一対応ゆえ

$PSU(1,1) = A_0 PSL_2(\mathbb{R}) A_0^{-1}$ //

2-2

No. Date 20・05・13

<u>補題 2.2</u> (1) $\forall z_0 \neq \forall z_1 \in \mathbb{D}$. $\exists A \in PSU(1,1)$. $Az_0 = 0$, $Az_1 \in]0,1[$

(2) $\forall z_0 \neq \forall z_1 \in \mathbb{H}$. $\exists A \in PSL_2(\mathbb{R})$ $Az_0 = \sqrt{-1}$. $Az \in \{y\sqrt{-1} ; y > 1\}$

<u>証明</u> 上述の A_0 は $A_0\sqrt{-1} = 0$, $A(\{y\sqrt{-1} ; y > 1\}) =]0,1[$ だから

(1)を示せば(2)もわかる

(1) $z \mapsto \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ によって z_0 を0に写し, $z \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta} z$ によって z_1 を回転させる //

Schwarz の補題を使うと次がわかる

<u>補題 2.3</u> (1) $\mathbb{D}$ の正則自己同型は $PSU(1,1)$ に限る

(2) $\mathbb{H}$ の正則自己同型は $PSL_2(\mathbb{R})$ に限る

<u>証明</u> 上述の A_0 を使うと (1) $\Leftrightarrow$ (2) がわかる (1)を示せばよい

(1) $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正則自己同型とする. $z \mapsto \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ を合成して

$\varphi(0) = 0$ としてよい. $\varphi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ も正則自己同型であって

$\varphi^{-1}(0) = 0$ をみたす

<u>Schwarz の補題</u>

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 正則函数. $f(0) = 0$ とすると次が成立つ

(1) $\forall z \in \mathbb{D}$. $|f(z)| \leq |z|$

(2) $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $|f(z_0)| = |z_0|$

$\Rightarrow$ $\exists \theta \in \mathbb{R}$ $f(z) = e^{\sqrt{-1}\theta} z$

したがって (1)により $\forall z \in \mathbb{D}$ について $|\varphi(z)| \leq |z|$ かつ $|z| = |\varphi^{-1}\varphi(z)|$

$\leq |\varphi(z)|$ である. ゆえに $\forall z \in \mathbb{D}$ $|\varphi(z)| = |z|$ となり (2)により

$\exists \theta \in \mathbb{R}$. $\varphi(z) = e^{\sqrt{-1}\theta} z$ をうる.

ゆえに φ は $PSU(1,1)$ に属する (1)が示された //

ここから $\mathbb{H}$ の双曲計量 $\dfrac{|dz|}{|\mathrm{Im}\, z|}$ に関する測地線を考える

$t_0 < t_1$

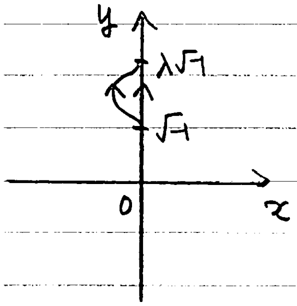
$\ell : [t_0, t_1] \to \mathbb{H}$, $t \mapsto \ell(t)$, C^∞ 曲線

について

$$(\ell \text{ の双曲長さ}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{\ell}(t)|}{\mathrm{Im}\,\ell(t)}\, dt$$

である

補題2.4. $\lambda>1$ とする $\sqrt{-1}$ と $\lambda\sqrt{-1}$ を結ぶ最短線は虚軸であり
その長さは $\log\lambda$ である



証明 $l:[0,1]\to\mathbb{H}$, $l(t)=x(t)+\sqrt{-1}\,y(t)$
$l(0)=\sqrt{-1}$, $l(1)=\lambda\sqrt{-1}$
とする

$$|l\text{の双曲長さ}| = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}{y(t)}\,dt$$

$$\geq \int_0^1 \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\log y(t)\,dt = \Big[\log y(t)\Big]_0^1 = \log\lambda$$

等号成立は $\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=0\ (\forall t)\\ \dot{y}(t)\geq 0\end{array}\right\}$ つまり虚軸での $y(t)$ 単調増大 //

虚軸は実軸と直交する「円」である
実軸と直交する円は $PSL_2(\mathbb{R})$ で保たれる (∵円を対応と等角性)

以上をまとめると

定理2.5. $\forall z_0 \neq \forall z_1 \in \mathbb{H}$
(1) z_0 と z_1 を通る実軸と直交する円がただ一つ存在する
(2) z_0 と z_1 を結ぶ最短線は実軸と直交する円である

実軸に直交する円が測地線 (geodesic) である

定義2.6 $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$
$d(z_0,z_1) \overset{\text{def}}{=}$ z_0 と z_1 につなぐ測地線の長さ → 次回もう少し考える

(ex) $d(\sqrt{-1},\lambda\sqrt{-1}) = \log\lambda$ $(\lambda\geq 1)$)

Möbius変換 $PSL_2(\mathbb{R})$ の元 (つまり $\mathbb{H}$ を保つ一次分数変換) を
Möbius変換 (Möbius transformation) とよぶ

$$A = \pm\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R}),\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1$$

をとる. 固定点, つまり $Az=z$ をみたす $z\in\hat{\mathbb{C}}$ を考える

2-4

No. Date 20·05·13

$$Az = z \iff \frac{az+b}{cz+d} = z \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad \text{—— (\#)}$$

まず $c \neq 0$ の場合を考える

(#) の判別式 $= (d-a)^2 + 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4(ad-1)$

$= (a+d)^2 - 4 = (\mathrm{tr}\, A)^2 - 4$

に注意する

(1) $|\mathrm{tr}\, A| < 2$ のとき

固定点は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に2つあり、互いに複素共役である

つまり $\exists!\, z_0 \in \mathbb{H},\ Az_0 = z_0$ かつ $A\overline{z_0} = \overline{z_0}$

いま $\exists P \in PSL_2(\mathbb{R}),\ P(\sqrt{-1}) = z_0$ (∵ Lem 1.5(3)) だから

$P^{-1}AP(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$ より $\exists \theta \in \mathbb{R}$

$$A = \pm P \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P^{-1} \quad (∵ \text{Lem } 1.5(2))$$

$c \neq 0$ より $A \neq \pm I$ なので $\theta \not\equiv 0 \bmod \pi$ である

(2) $|\mathrm{tr}\, A| = 2$ のとき

(#) は $\mathbb{R}$ 上に重根 x_0 をもつ. $\exists P \in PSL_2(\mathbb{R})\ P(\infty) = x_0$

$P^{-1}AP(\infty) = \infty$ だから $P^{-1}AP = \pm\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $ps = 1$, $|p+s| = 2$

と表わされる このとき $p = s = \pm 1$ だから $P^{-1}AP = \pm\begin{pmatrix} 1 & q' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \pm P \begin{pmatrix} 1 & q' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と表わされる $A \neq \pm I$ より $q' \neq 0$ である

(3) $|\mathrm{tr}\, A| > 2$ のとき

(#) は $\mathbb{R}$ 上に2つの根をもつ.

$\exists P \in PSL_2(\mathbb{R})$ $P(0)$ と $P(\infty)$ がそれらの根である

$P^{-1}AP(0) = 0$, $P^{-1}AP(\infty) = \infty$ だから

$P^{-1}AP = \pm\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$ としてよい $\lambda\mu = 1$ である

$= \pm\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ ($|\mathrm{tr}\, A| \neq 2$ より $\lambda \neq 1$ である)

$(P^{-1}AP)z = \lambda^2 z$ ($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の共役によって $\lambda > 1$ としてよい)

$|\mathrm{tr}\, A| = \lambda + \lambda^{-1}$

つぎに $c=0$ の場合を考える $ad=1$ である (つまり $d=\frac{1}{a}$)

$$Az=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

∞ は固定点である

(4) $\frac{a}{d}=1$ のとき $a=d=\pm1$, $A=\pm\begin{pmatrix}1 & c' \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ → $A=\pm I$ または (2) の場合に帰着する

(5) $\frac{a}{d}\neq1$ のとき ∞ 以外に固定点 $\in\mathbb{R}$ がある → (3) に帰着する

$a\neq\pm1$ だから $|\mathrm{tr}\,A|=|a+\frac{1}{a}|\gneq 2$

以上をまとめると

<u>定義-定理 2.7</u> $\pm I\neq A\in PSL_2(\mathbb{R})$ は次の3種類に分類される

(a) <u>楕円的</u> (elliptic) $|\mathrm{tr}\,A|\lneq 2$

このとき A の $\mathbb{H}$ における固定点がただ一つ存在し

$\exists P\in PSL_2(\mathbb{R})$ $\exists\theta\in\mathbb{R}$ $\theta\neq0 \bmod \pi$

$$A=\pm P\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}P^{-1}$$

(b) <u>放物的</u> (parabolic) $|\mathrm{tr}\,A|=2$

このとき A の $\hat{\mathbb{C}}$ における固定点はただ一つで $\hat{\mathbb{R}}$ 上にあり

$\exists P\in PSL_2(\mathbb{R})$ $0\neq\exists t\in\mathbb{R}$

$$A=\pm P\begin{pmatrix}1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

(c) <u>双曲的</u> (hyperbolic) $|\mathrm{tr}\,A|\gneq 2$

このとき A の $\hat{\mathbb{C}}$ における固定点は2つあり、それらは $\hat{\mathbb{R}}$ 上である

$\exists P\in PSL_2(\mathbb{R})$ $\exists\lambda\in\mathbb{R}_{>1}$

$$A=\pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}$$

<u>移動長さ</u> (translation length) $A\in PSL_2(\mathbb{R})$ について

$$\mathrm{tl}(A):=\inf_{z\in\mathbb{H}} d(z,Az)\ (\in\mathbb{R}_{\geq0})$$

と定める。ここで d は双曲距離 (Def 2.6) である

補題2.8.

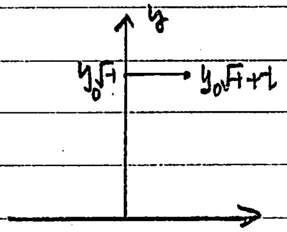
(1) $A=\pm I$, または elliptic のとき $tl(A)=0$

(2) A: parabolic のとき $tl(A)=0$

(3) A: hyperbolic, $A=\pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P$, $P\in PSL_2(\mathbb{R})$, $\lambda>1$ のとき

$$tl(A)=\log\lambda$$

つまり $\frac{1}{2}|\mathrm{tr}A| = \cosh tl(A)$



証明 (1) このとき $\mathbb{H}$ 内に固定点が存在する

(2) $A=\pm\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $t\neq 0$, について示せばよい

$y_0>0$ をとる $A(y_0\sqrt{-1})=y_0\sqrt{-1}+t$

$$0\leqq d(y_0\sqrt{-1},\, y_0\sqrt{-1}+t)\leqq \left(\begin{array}{l}y_0\sqrt{-1}\text{ から }y_0\sqrt{-1}+t\text{ への}\\ \text{Euclid的線分の}\\ \text{双曲長さ}\end{array}\right)=\int_0^{|t|}\frac{1}{y_0}dt=\frac{|t|}{y_0}\xrightarrow[y_0\to\infty]{}0$$

ゆえに $tl(A)=0$

(3) $A=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ について示せばよい

$d(\sqrt{-1},\lambda\sqrt{-1})=\log\lambda$ より $tl(A)\leqq\log\lambda$ である.

$\forall z_0=x_0+y_0\sqrt{-1}\in\mathbb{H}$ をとる

$l:[0,1]\to\mathbb{H}$, $l(t)=x(t)+\sqrt{-1}\,y(t)$, $l(0)=z_0$, $l(1)=\lambda z_0$

を測地線とすると

$$d(z_0,\lambda z_0)=\int_0^1\frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}{y(t)}dt\geqq\int_0^1\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}dt=\Big[\log y(t)\Big]_0^1=\log\lambda$$

$z_0\in\mathbb{H}$ は任意だから $tl(A)\geqq\log\lambda$ である

以上から $tl(A)=\log\lambda$ がわかる //