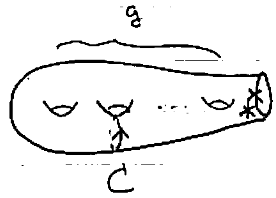
2012年5月9日(金) 14:50-15:50, 117号室
数学講究XB
「曲線を曲線で微分する」 河澄響矢
久野雄介氏(津田塾大・学芸)との共同研究

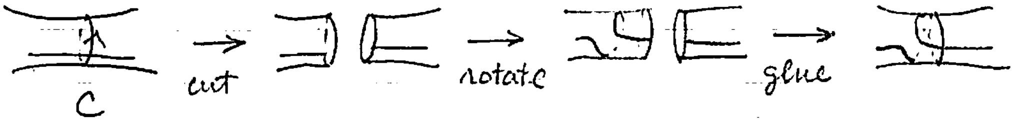
$g \geq 1$

$\Sigma = \Sigma_{g,1} =$



$* \in \partial\Sigma$
$\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ 基本群

$C \subset \Sigma$ simple closed curve
$t_C \in \mathrm{Aut}(\pi)$: Dehn twist



<u>この時間の目標</u>
t_C を函数 $\frac{1}{2}(\log x)^2$ を用いて表示する. (Kuno-K.)
$\Uparrow$
「曲線の曲線による微分」を使う

<u>微分とは何か?</u> (導分, derivation)
A: 単位結合代数$/\mathbb{R}$
<u>定義</u> D: derivation of A
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 0) $D: A \to A$: $\mathbb{R}$-linear map
1) (Leibniz' rule) $\forall a, \forall b \in A$
$D(ab) = (Da)b + a(Db)$

$\mathrm{Der}(A) := \{D: A \to A \text{ derivation}\}$
Lie algebra $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Der}(A)$

<u>例</u> M: C^∞ manifold
$A = C^\infty(M)$
$\mathrm{Der}(C^\infty(M)) = \mathrm{Vect}(M)$

ここで考えたいのは

$A=\mathbb{R}\pi$, $\pi=\pi_1(\Sigma,*)$ の群環

$t_C \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\pi)$ 環同型

ある $D\in \mathrm{Der}(\mathbb{R}\pi)$ によって $t_C=e^D$ と表したい

ただし $e^D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^k$ もし"収束"すれば $\in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\pi)$ (レポート問題?)

(目標 $\log t_C = D$ を $\frac{1}{2}(\log x)^2$ を使って表す)

$\mathrm{Der}(\mathbb{R}\pi)$ の元の作り方 (Kuno-K.) (もとネタは Goldman, Turaev)

$\hat{\pi} := [S^1,\Sigma]$ free loops on Σ 基点を考えない homotopy 集合

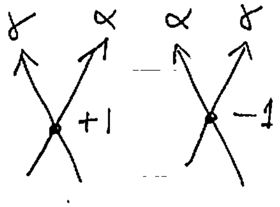
$\alpha\in\hat{\pi}$, $\gamma\in\pi$ 「一般の位置」にとる

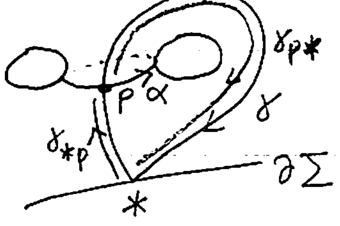
($\alpha\amalg\gamma : S^1\amalg S^1 \to \Sigma$
がはめこみであって、交叉は二重点のみで横断的 )

$\rightsquigarrow$ とくに $\#(\alpha\cap\gamma)<\infty$

$$\sigma(\alpha)(\gamma) := \sum_{p\in\alpha\cap\gamma}\varepsilon(p;\alpha,\gamma)\,\gamma_{*p}\,\alpha_p\,\gamma_{p*}\in\mathbb{R}\pi$$

$\varepsilon(p;\alpha,\gamma)=\pm1$ 局所交叉数

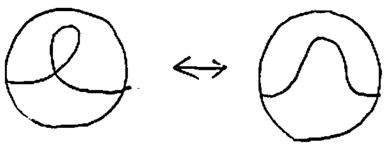




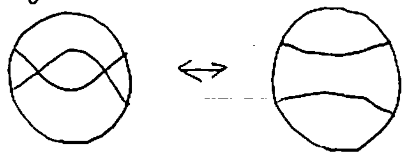
補題 $\sigma(\alpha)(\gamma)$ は代表元のとり方によらず well-defined である.

証明のあらすじ homotopy による変形は次の三種類の moves で生成される

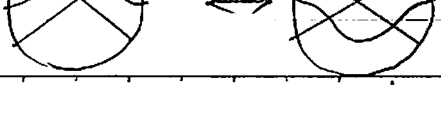
(I) monogon



(II) bigon



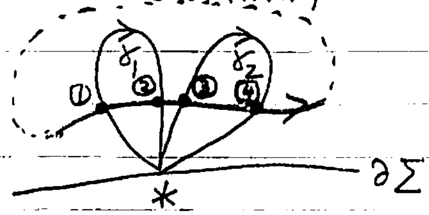
(III) jumping over a double point



(I)〜(III) の moves で $\sigma(\alpha)(\gamma)$ の値が変わらないことを示す。
(レポート問題) //
((別証) twisted homology の交叉理論を使う)

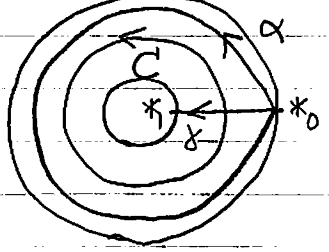
$\sigma(\alpha) \in \mathrm{Der}(\mathbb{R}\pi)$

(pf)

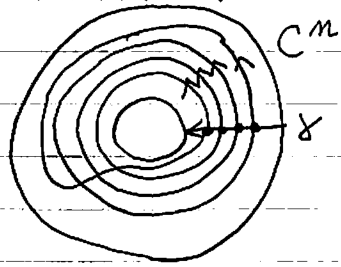


$$①+② = \sigma(\alpha)(\gamma_1)\gamma_2$$
$$③+④ = \gamma_1\sigma(\alpha)(\gamma_2)$$
//

例の計算　C : SCC. tubular nbd で考える.



$n \geqq 0$



n 回の交点、各交点の寄与 $+\alpha^n\gamma$

ゆえに
$$\sigma(C^n)(\gamma) = n\alpha^n\gamma$$

$f(x)$: x についての"多項式"
$$\boxed{\sigma(f(C))(\gamma) = \alpha f'(\alpha)\gamma}$$

他方
$$t_C(\gamma) = \alpha\gamma = e^{\log\alpha}\gamma$$
$$(\log t_C)(\gamma) = (\log\alpha)\gamma$$
そこで 微分方程式
$$x f'(x) = \log x$$
を解く.
$$f(x) = \int_1 \frac{1}{x}\log x \, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$$
$$L(C) := \frac{1}{2}(\log C)^2$$

$$\sigma(L(C))(\gamma) = (\log\alpha)(\gamma) = (\log t_C)(\gamma)$$
$$e^{\sigma(L(C))}(\gamma) = e^{\log\alpha}\gamma = \alpha\gamma = t_C(\gamma)$$

No.

Date

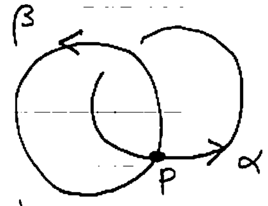
<u>定理</u> (Kuno-K.)

$$t_C = e^{\sigma(L(C))} \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{R}\pi})$$

((注)・Riemann面の退化についてのPicard-Lefschetz公式の非可換化
・log, exp の正当化 $\Leftarrow$ augmentation ideal による完備化)

$\mathbb{R}\hat{\pi}$: Goldman Lie algebra

$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ in general position



$$[\alpha, \beta] := \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta)\, |\alpha_p \beta_p| \in \mathbb{R}\hat{\pi}$$ (W. Goldman)

($|\ |: \pi \to \hat{\pi}$ 基点を忘れる)

$[\ ,\ ]$: well-defined で Jacobi律をみたす.

(レポート問題 : 3つのmoves または twisted homology を使う)

$\sigma : \mathbb{R}\hat{\pi} \to \mathrm{Der}(\mathbb{R}\pi)$, $\alpha \mapsto \sigma(\alpha)$, Lie代数準同型
(レポート問題)

<u>Goldman Lie algebra の高次元化</u> (Brane topology $\mathrm{Map}(S^n, M)$)

String topology (M. Chas - D. Sullivan)

M : oriented C^∞ d-mfd

$LM = \mathrm{Map}(S^1, M)$ compact-open topology — free loop space

$H_*(LM)$ にいろいろな代数構造が入る

(cf. $H_0(L\Sigma; \mathbb{R}) = \mathbb{R}\hat{\pi}$).

<u>レポート問題</u> Dehn twist の公式を高次元化せよ.

(ただし, Picard-Lefschetz公式より深い情報をひろう必要あり)