

傾理論概論

2021年度 S 七X27

担当：伊山 修

- I {
- ① 4/8 Category
 - ② 4/15 Morita theory
 - ③ 4/22 Morita theory / Classical tilting
 - ④ 5/6 Classical tilting
 - ⑤ 5/13 Quiver representation
 - ⑥ 5/20 Quiver representation / Auslander-Reiten theory
 - ⑦ 5/27 Auslander-Reiten theory
- II {
- ⑧ 6/10 Frobenius category / Triangulated category
 - ⑨ 6/17 Derived category / Tilting object
 - ⑩ 6/24 Auslander-Reiten theory in triangulated category
- III {
- ⑪ 7/1 Examples / Silting objects
 - ⑫ 7/8 mutation and partial order
 - ⑬ 7/15 Konig-Yang bijection and 2-silting

I : 加群圏の傾理論

II : 導来圏 / 三角圏の傾理論

III : 変異理論

目次

§1	Category	P1 ~ 3
§2	Functor	P3 ~ 5
§3	Natural transformation	P5 ~ 7
§4	Morita equivalence	P8 ~ 13
§5	(Co)products and additive categories	P14 ~ 17, 26
§6	Classical tilting modules	P18 ~ 25
§7	Quiver representations	P27 ~ 38
§8	Auslander - Reiten theory	P39 ~ 48
§9	Frobenius categories	P49 ~ 51
§10	Triangulated categories	P52 ~ 55
§11	Derived categories	P56 ~ 59
§12	Tilting objects	P60 ~ 63
§13	Auslander - Reiten theory in Triangulated categories	P64 ~ 75
§14	Silting objects	P76 ~ 88
§15	2-term silting objects	P89 ~ 93

References

§ 1 Category

①

線型代数では ベクトル空間 と その間の 線型写像 を扱う
群論 群 準同型
トポロジー 位相空間 連続写像

Def category (圏) とは

- ① object (対象) とよばれるものの全体 $Ob\mathcal{C}$
- ② 各 $X, Y \in Ob\mathcal{C}$ に対し, X から Y への morphism (射) とよばれるものの集合 $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ($= \mathcal{C}(X, Y)$)

からなり, 以下をみたすもの

($X \in Ob\mathcal{C}$ を $X \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ を $f: X \rightarrow Y$ と略す)

- $\forall \mathcal{C}$ の morphism $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対し
合成 $g \circ f (= gf): X \rightarrow Z$ が与えられていて.

結合律をみたす.

つまり $\forall h: Z \rightarrow W$, $h(gf) = (hg)f$

- $\forall X \in \mathcal{C}$, $1_X: X \rightarrow X$ が与えられていて.

$\forall Y \in \mathcal{C}$, $\forall f \in X \rightarrow Y$, $f \circ 1_X = f$

$\forall W \in \mathcal{C}$, $\forall g \in W \rightarrow X$, $1_X \circ g = g$

Rem monoid (= 単位元をもつ半群) の公理に近い

$\forall X \in \mathcal{C}$, $End_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X, X)$ は monoid になる

Ex monoid M は (1つの object をもつ category) とみなされる

$Ob\mathcal{C} = \{X\}$, $\mathcal{C}(X, X) = M$

合成は M の積 $M \times M \rightarrow M$ で与える

以上の意味で, category = (複数の object をもつ monoid)

Ex **Set** : 集合の category

object は 集合. morphism は 集合の 写像

Ex **Ab** : アーベル群の category

object は アーベル群. morphism は 群準同型

Ex ring A に対し. **Mod A** : (右) A -module の category

object は 右 A -module. morphism は A -module の 準同型

$$\text{Ab} = \text{Mod } \mathbb{Z}$$

同様に **$B \text{ Mod}$** : 左 B -module の category

$B \text{ Mod } A$: (B, A) -bimodule の category

(右 A -module から 左 B -module で. $\forall b \in B. \forall m \in M. \forall a \in A.$
 $b(ma) = (bm)a$)

Def category $\mathcal{D}$ が category $\mathcal{C}$ の **subcategory** であるとは.

$\text{Ob } \mathcal{D} \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$ かつ $\forall X, Y \in \mathcal{D}. \mathcal{D}(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ であること
 ①

① でつねに $=$ が成立するとき. **full subcategory** とよぶ

Ex $\text{Set} \supset \text{set}$: 有限集合 からなる full subcategory

$\text{Mod } A \supset \text{mod } A$: 有限生成 A -module からなる full subcategory

Ex category $\mathcal{C}$ の **opposite category** $\mathcal{C}^{\text{op}}$

$$\text{Ob } (\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{Ob } \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ in } \mathcal{C}^{\text{op}}) := (Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \text{ in } \mathcal{C})$$

Def $\mathcal{C}$: category $f : X \rightarrow Y$

$f : X \cong Y$ と表す

① $f : \text{isomorphism} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g : Y \rightarrow X \text{ s.t. } gf = 1_X, fg = 1_Y$

② $f : \text{monomorphism} \stackrel{\text{def}}{\iff} (g, h : W \rightarrow X \text{ に対し.}$

$$fg = fh \Rightarrow g = h)$$

(3)

③ $f: \text{epimorphism} \stackrel{\text{def}}{\iff} (g, h: Y \rightarrow Z \text{ に対し,}$

$$gf = hf \implies g = h)$$

Ex Set, Ab, Mod A では

iso = 全単射, mono = 単射, epi = 全射

- $\text{iso} \implies \text{mono}$ かつ epi . だが、逆は成り立たない

Ex Mod A $\supset$ Free A : free A-module のなす full subcat.

Free $\mathbb{Z}$ で $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ に対し. $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は
 $n \mapsto an$

mono かつ epi. だが、 $a \neq \pm 1$ なら iso ではない

§2 Functor 2つの categories の関係を与えるもの

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: category $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への (covariant) functor ((共変)関手) であるとは

- ① $\forall X \in \mathcal{C}$ に対し $FX \in \mathcal{D}$ が与えられ.
 - ② $\forall f \in \mathcal{C}(X, Y)$ に対し $Ff \in \mathcal{D}(FX, FY)$ が与えられ.
- 以下をみたすこと ($F(X), F(f)$ を FX, Ff と略す)

- $\forall X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ in } \mathcal{C}, F(g \circ f) = (Fg) \circ (Ff)$
- $\forall X \in \mathcal{C}, F(1_X) = 1_{FX}$

Def $\mathcal{C}^{\text{op}}$ から $\mathcal{D}$ への covariant functor を、 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への contravariant functor (反変関手) とよぶ

Ex $1_{\mathcal{C}}: \text{identity functor}$

$$\forall X \in \mathcal{C}, 1_{\mathcal{C}}(X) = X \quad \forall f: X \rightarrow Y, 1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

Ex $\mathcal{C} \supset \mathcal{D}$: subcategory に対し. inclusion functor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が定まる

Ex forgetful functor (忘却関手)

$\text{Mod } A \rightarrow \text{Ab} : A\text{-module を アーベル群 とみなす}$

$\text{Ab} \rightarrow \text{Set} : \text{アーベル群 を 集合 とみなす}$

Ex $A, B : \text{ring} \quad M \in B\text{-Mod } A$

- $\forall X \in \text{Mod } A, \text{Hom}_A(M, X) := (\text{Mod } A)(M, X)$ は
右 B -module となる: $\forall f \in \text{Hom}_A(M, X), \forall b \in B$ に対し
 $fb \in \text{Hom}_A(M, X)$ を $(fb)(m) = f(bm) \ (m \in M)$ と定める
- $\forall f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ に対し. $f \circ - : \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Y)$
は B -module の morphism となる

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\ f & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

Thm $A, B : \text{ring} \quad M \in B\text{-Mod } A$

- ① 以上により functor $\text{Hom}_A(M, -) : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ をうる
同様にして
- ② contravariant functor $\text{Hom}_A(-, M) : \text{Mod } A \rightarrow B\text{-Mod}$ をうる
- ③ functor $- \otimes_B M : \text{Mod } B \rightarrow \text{Mod } A$ をうる
 $M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$

Def functors $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ に対し.

functor $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ を 以下で定める

- $\forall X \in \mathcal{C}, (G \circ F)(X) = G(FX)$
- $\forall f: X \rightarrow Y, (G \circ F)(f) = G(Ff)$

Def functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が isomorphism (同型) であるとは

$\exists$ functor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ s.t. $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}, F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$

Ex $A : \text{ring}, A^{\text{op}} : \text{opposite ring} \quad (F: \mathcal{C} \cong \mathcal{D} \text{ と表す})$

左 A -module X は. $a \in A^{\text{op}}, x \in X$ に対し $xa := ax$

とおくことで 右 A^{op} -module とみなされる.

この対応 $A\text{-mod} \rightarrow \text{mod}(A^{\text{op}})$ は isomorphism

- category の iso. は 条件として 強すぎる

§3 Natural transformation 2つの functors の関係を与えるもの

Def $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : \text{functors}$

$\alpha : F \rightarrow G$ が F から G への **natural transformation** (自然変換) であるとは. $\forall X \in \mathcal{C}$ に対し $\alpha_X \in \mathcal{D}(FX, GX)$ が与えられていて
以下が成立すること

- $\mathcal{C}$ の $\forall$ morphism $f : X \rightarrow Y$ に対し. 次が **可換**

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \alpha_X \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha_Y \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY \end{array}$$

Def $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : \text{functors}$

$\alpha : F \rightarrow G, \beta : G \rightarrow H : \text{nat. transf.}$ に対し. nat. transf.

$\beta \circ \alpha$: $F \rightarrow H$ が $\forall X \in \mathcal{C}. (\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$ により定まる

Def nat. transf. $\alpha : F \rightarrow G$ が **natural isomorphism** (自然同型)

であるとは. $\forall X \in \mathcal{C}. \alpha_X$ が $\mathcal{C}$ の isomorphism であること

($\alpha : F \cong G$ と表す)

- 以上の def. は contravariant functors $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対しても
covariant functors $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ を考えることで 同様になされる

Ex $A, B : \text{rings} \quad M, N : (B, A)\text{-bimodules}$

$\varphi : M \rightarrow N : \text{morphism in } B\text{Mod}A$

(6)

① functors $\text{Hom}_A(M, -), \text{Hom}_A(N, -) : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ ① nat. transf. $\alpha : \text{Hom}_A(N, -) \rightarrow \text{Hom}_A(M, -)$ が

$$\forall X \in \text{Mod } A, \quad \alpha_X : \text{Hom}_A(N, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, X)$$

$$f \longmapsto f \circ \varphi$$

とおくことにより定まる

② 同様に nat. transf. $\text{Hom}_A(-, M) \rightarrow \text{Hom}_A(-, N)$

$$- \otimes_B M \rightarrow - \otimes_B N$$

$$M \otimes_A - \rightarrow N \otimes_B - \quad \text{が定まる}$$

Def functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が **equivalence** (同値) であるとは,

$$\exists \text{ functor } G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \quad \exists \text{ natural iso } G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$$

$$F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$$

このとき $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は **equivalent** であるといふ。 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ と表す

- $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が iso $\Rightarrow$ equivalent だが、逆は正しくない

Def $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : \text{functor} \quad f \longmapsto Ff$ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対し, $F_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ を考える① F が **faithful** (忠実) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X, Y \in \mathcal{C}, F_{XY}$ が単射—— **full** (充満) ——— 全射**fully faithful** = full かつ faithful morph. に対する 全単射性② F が **dense** (稠密) (or **essentially surjective**) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall X \in \mathcal{D}, \exists Y \in \mathcal{C} \text{ s.t. } X \cong FY \text{ in } \mathcal{D}$ obj. / iso. に対する 全射性Prop $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : \text{functor}$ $F: \text{equivalence} \iff F: \text{fully faithful かつ dense}$

Ex set $\supset \mathcal{C} : \phi \text{ と } \bar{n} = \{1, 2, \dots, n\} \ (n \geq 1) \text{ からなる full subcat.}$
inclusion functor $\mathcal{C} \rightarrow \text{set}$ は equiv. だが iso. ではない

§4 Morita equivalence (予告編)

Thm [Morita 1958] rings A, B に対し. 以下は同値

- ① categories $\text{Mod } A$ と $\text{Mod } B$ は equivalent
- ② categories $A\text{Mod}$ と $B\text{Mod}$ は equivalent
- ③ $\exists P \in \text{Mod } A : \text{progenerator}$ s.t. $\text{End}_A(P)$ と B は 環同型

このとき A と B は **Morita equivalent** (森田同値) であるという

Def $M \in \text{Mod } A$

- $P : \text{projective} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \text{ epimorph. } f: X \rightarrow Y, \ \forall \text{ morph. } g: P \rightarrow Y$
 $\exists \text{ morph. } h: P \rightarrow X \text{ s.t. } g = fh$
- $P : \text{generator} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X \in \text{Mod } A, \ \exists \text{ set } I,$
 $\exists \text{ epimorphism } \bigoplus_I P \rightarrow X$
- $P : \text{progenerator} = \text{有限生成, projective かつ generator}$

Ex $A : \text{ring}$ 自然数 $n \geq 1$ に対し. $P := A \oplus \dots \oplus A$ (n 個)

$\text{End}_A(P) = M_n(A)$ n 次全行列環

A と $M_n(A)$ は Morita equivalent

§4 Morita equivalence

Ex1 $A: \text{ring}$ $n \geq 1$ $M_n(A): n$ 次全行列環

$X \in \text{Mod } A$ に対し. $[X \cdots X] = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \sim x_n \in X\}$ は
行列の積により 右 $M_n(A)$ -module となる

$G: \text{Mod } A \longrightarrow \text{Mod } M_n(A)$ は functor となる

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & [X \cdots X] \ni (x_1, \dots, x_n) \\ f \downarrow & & \downarrow Gf \quad \downarrow \\ Y & \longmapsto & [Y \cdots Y] \ni (f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{array}$$

G は equivalence この例を理論的に扱う

Recall: $M \in B \text{ Mod } A$ に対し. 以下の functor が定まった

$$\text{Hom}_A(M, -): \text{Mod } A \longrightarrow \text{Mod } B$$

$$\text{Hom}_A(-, M): (\text{Mod } A)^{\text{op}} \longrightarrow B \text{ Mod}$$

$$- \otimes_B M: \text{Mod } B \longrightarrow \text{Mod } A$$

$A: \text{ring}$, $\Lambda: \text{set}$, $X_\lambda \in \text{Mod } A$ ($\lambda \in \Lambda$)

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid \forall \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in X_\lambda \} \quad \text{直積}$$

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid \text{有限個の } \lambda \in \Lambda \text{ を除いて } x_\lambda = 0 \} \quad \text{直和}$$

X_λ が全て $X \in \text{Mod } A$ のとき. $X^{\prod \Lambda}$, $X^{\bigoplus \Lambda}$ とかく

Def • $A^{\bigoplus \Lambda} \in \text{Mod } A$: free A -module

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists \downarrow & \searrow \forall & \\ X & \xrightarrow[\forall f]{\exists f} & Y \end{array}$$

• $P \in \text{Mod } A$: projective $\iff \forall f: X \rightarrow Y$: $\overset{\text{全射}}{\text{epimorph.}}$ in $\text{Mod } A$,
 $f \circ -: \text{Hom}_A(P, X) \rightarrow \text{Hom}_A(P, Y): \overset{\text{全射}}{\text{epimorph.}}$ in Ab

Ex free $\implies$ projective

($\text{Hom}_A(A^{\bigoplus \Lambda}, X) = X^{\prod \Lambda}$ で, $f: X \rightarrow Y$ が epi. なら $X^{\prod \Lambda} \rightarrow Y^{\prod \Lambda}$ も epi)

Prop 2 ある free A -module の直和因子 $\iff$ projective

proof $\Rightarrow$) Ex と Def よりすぐ

$\Leftarrow$) proj. A -mod, X に対し free A -mod F と epi. $f: F \rightarrow X$ in $\text{Mod } A$

をとると, $\exists g: X \rightarrow F$ s.t. $f \circ g = 1_X$

これより $F \cong X \oplus \text{Ker } f$

"split epi."

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ g \swarrow & & \searrow 1_X \\ F & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

□

Def $X \in \text{Mod } A$

① X : **finitely generated** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N}, \exists \text{ epi. } A^{\oplus n} \rightarrow X$ in $\text{Mod } A$

② X : **generator** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall Y \in \text{Mod } A, \exists \Lambda: \text{set}, \exists \text{ epi. } X^{\oplus \Lambda} \rightarrow Y$ in $\text{Mod } A$

③ X : **progenerator** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ finitely generated projective な generator

Thm 3 [Morita 1958] rings A, B に対し. 以下は同値

① categories $\text{Mod } A$ と $\text{Mod } B$ は equivalent

② categories $A \text{Mod}$ と $B \text{Mod}$ は equivalent

③ $\exists P \in \text{Mod } A$: progenerator s.t. $\text{End}_A(P)$ と B は 環同型

④ $\exists Q \in A \text{Mod}$: progenerator s.t. $\text{End}_A(P(Q))$ と B^{op} は 環同型

このとき A と B は **Morita equivalent** (**森田同値**) であるという

equivalence の与え方 ③ の P は. $P \in B \text{Mod } A$ とみなされ. functors

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod } B & \xrightleftharpoons[\text{G} = \text{Hom}_A(P, -)]{\text{F} = - \otimes_B P} & \text{Mod } A \end{array}$$

が equivalence を与える. つまり $F \circ G \cong \text{id}_{\text{Mod } A}$, $G \circ F \cong \text{id}_{\text{Mod } B}$

Ex A : ring, $n \geq 1$ に対し. $P := A^{\oplus n} \in \text{Mod } A$ は progenerator

$P = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix}$ とみると. 行列の積により $\text{End}_A(P) \cong M_n(A)$

$\text{Hom}_A(P, -): \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } M_n(A)$ は Ex 1 の G と一致する

Plan of proof of Thm 3 :

$$\textcircled{4} \xleftarrow{\text{(I)}} \textcircled{3} \xrightleftharpoons[\text{(III)}]{\text{(II)}} \textcircled{1} \quad \text{これから他の同値も従う}$$

$\text{Mod } A \supset \text{Proj } A$: projective A -mod. の full subcat
 $\cup \quad \cup$

$\text{mod } A \supset \text{proj } A$: fin. gen. proj. A -mod の ———
 $\text{fin. gen. } A\text{-mod.} \quad \text{proj } A \stackrel{\text{prop 2}}{=} \{X \in \text{Mod } A \mid \exists n \in \mathbb{N}, X \text{ は } A^{\oplus n} \text{ の直和因子}\}$

(I) $A \in A \text{Mod } A$ なのて. contravariant functor

$$(\)^* := \text{Hom}_A(_, A) : \text{Mod } A \rightarrow A \text{Mod} \cong \text{Mod}(A^{\text{op}})$$

$$\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(_, A) : A \text{Mod} \rightarrow \text{Mod } A \quad \text{が定まる}$$

合成して $(\)^{**} : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } A, A \text{Mod} \rightarrow A \text{Mod}$ をうる

$$X \in \text{Mod } A \text{ に対し. evaluation map } \varepsilon_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longmapsto & (X^* \ni f \mapsto f(x)) \end{array} \text{ は}$$

natural transformation $\varepsilon : \text{id}_{\text{Mod } A} \rightarrow (\)^{**}$ を与える

$$\varepsilon : \text{id}_{A \text{Mod}} \rightarrow (\)^{**}$$

- contrav. functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を covariant functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ とみたものが equivalence であるとき. F を **dual equivalence** とよぶ

Prop 4 $(\)^*$ は dual equivalence $\text{proj } A \rightarrow A \text{proj}$ を与える

proof $A^* \cong A, (A^{\oplus n})^* \cong A^{\oplus n}$ なのて $P \in \text{proj } A \Rightarrow P^* \in A \text{proj}$

$\therefore$ functor $\text{proj } A \xrightleftharpoons[(\)^*]{(\)^*} A \text{proj}$ が定まる. $\varepsilon_{A^{\oplus n}} : A^{\oplus n} \rightarrow (A^{\oplus n})^{**} \cong A^{\oplus n}$ は
 明らかに iso.

$A^{\oplus n} = P \oplus P'$ とすると $\varepsilon_{A^{\oplus n}} = \varepsilon_P \oplus \varepsilon_{P'}$ は iso. なのて. ε_P も iso.

$\therefore \varepsilon : \text{id}_{\text{proj } A} \cong (\)^{**}$ 同様に $\varepsilon : \text{id}_{A \text{proj}} \cong (\)^{**}$ □

Proof of Thm 3 ③ $\Rightarrow$ ④

Prop 4

- A の progenerator P に対し $Q := P^* \in A\text{-proj} \cong \text{proj}(A^{\text{op}})$
- $(\)_{P,P}^*$ は 環同型 $(B^{\text{op}} \cong) \text{End}_A(P)^{\text{op}} \cong \text{End}_{A^{\text{op}}}(Q)$ を与える
- P は generator なので $\exists$ epi. $f: P^{\oplus n} \rightarrow A$ A は projective なので
 $P^{\oplus n} \cong A \oplus (\text{Ker } f)$ $Q^{\oplus n} = (P^{\oplus n})^* \cong A^* \oplus (\text{Ker } f)^*$
 $\parallel$
 A
 これより Q も generator $\square$

(II) ③ の P と functors $\text{Mod } B \xrightleftharpoons[F = \text{Hom}_A(P, -)]{F = - \otimes_B P} \text{Mod } A$

に対し. $F \circ G \cong \text{id}_{\text{Mod } A}$, $G \circ F \cong \text{id}_{\text{Mod } B}$ を示す

- $\forall X \in \text{Mod } B$, $\alpha_X: X \rightarrow GFX = \text{Hom}_A(P, X \otimes_B P)$ は
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $x \mapsto (P \ni p \mapsto x \otimes p)$ morph. in $\text{Mod } B$
- α は natural transformation $\text{id}_{\text{Mod } B} \rightarrow G \circ F$ を与える

$$\begin{array}{ccc}
 x \in X & \xrightarrow{\quad f \quad} & f(x) \in Y \\
 \alpha_X \downarrow & \searrow & \downarrow \alpha_Y \\
 \text{Hom}_A(P, X \otimes_B P) & \xrightarrow{GFf} & \text{Hom}_A(P, Y \otimes_B P) \\
 (p \mapsto p \otimes x) & \xrightarrow{\quad} & (p \mapsto p \otimes f(x))
 \end{array}$$

: morph. in $\text{Mod } B$

- $\alpha: \text{id}_{\text{Mod } B} \rightarrow G \circ F$ が natural iso. を示す

Lem 5 A, B : ring $X \in \text{Mod } B$, $P \in \text{proj } A$, $Y \in B\text{-Mod } A$

$\alpha_{XY}^P: X \otimes_B \text{Hom}_A(P, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(P, X \otimes_B Y)$ は iso.

$$x \otimes f \mapsto (P \ni p \mapsto x \otimes f(p))$$

proof $\alpha_{XY}^{A^{\oplus n}}: X \otimes_B (Y^{\oplus n}) \rightarrow (X \otimes_B Y)^{\oplus n}$ は iso.

Prop 4 と同様にして α_{XY}^P も iso. $\square$

$\alpha_X: X \cong X \otimes_B B \cong X \otimes_B \text{Hom}_A(P, P) \cong \text{Hom}_A(P, X \otimes_B P) = (G \circ F)(X)$
は iso. Lem 5 □

- $\forall X \in \text{Mod } A$. $\beta_X: FGX = \text{Hom}_A(P, X) \otimes_B P \rightarrow X$ は
morph. in $\text{Mod } A$ $\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ f \otimes p & \longmapsto & f(p) \end{matrix}$
- β は natural transformation $F \circ G \rightarrow \text{id}_{\text{Mod } A}$ を与える
(α のときと同様に示される)
- $\beta: F \circ G \rightarrow \text{id}_{\text{Mod } A}$ は natural isomorphism

proof $X \in \text{Mod } A$, $K := \text{Ker } \beta_X$, $C := \text{CoKer } \beta_X$
 $0 \rightarrow K \rightarrow FGX \xrightarrow{\beta_X} X \rightarrow C \rightarrow 0$: exact
 $G = \text{Hom}_A(P, -)$ (P : projective) だったのて

$$0 \rightarrow GK \rightarrow GFGX \xrightarrow{G\beta_X} GX \rightarrow GC \rightarrow 0 : \text{exact}$$

ここで $(G\beta_X) \circ \alpha_{GX} = 1_{GX}$ が成立する
特に $G\beta_X$ は iso. で $GK = GC = 0$
 P は generator なのて $K = C = 0$ □

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(P, \text{Hom}_A(P, X) \otimes_B P) & \xrightarrow{G\beta_X} & \text{Hom}_A(P, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (p \mapsto f \otimes p) & \xleftarrow{\alpha_{GX}} & f \\ & & \parallel \\ & & (p \mapsto f(p)) \end{array}$$

(III) Proof of Thm 3 ① $\Rightarrow$ ③

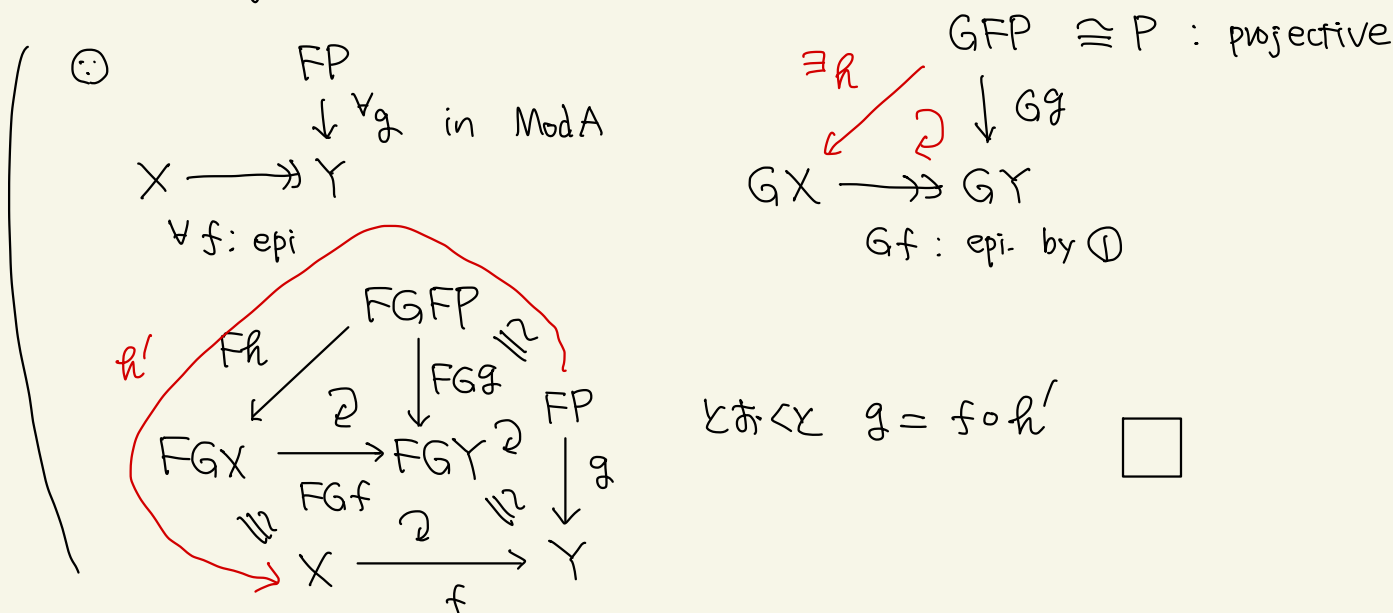
$\text{Mod } B \xrightleftharpoons[G]{F} \text{Mod } A$, $G \circ F \cong \text{id}_{\text{Mod } A}$, $F \circ G \cong \text{id}_{\text{Mod } B}$ とする
次を示す

Claim 6 $P := FB \in \text{Mod } A$ は progenerator で. $\text{End}_A(P)$ と B は 環同型

proof ① 一般に. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$: category equivalence
 f : epi. in $\mathcal{C} \Rightarrow Ff$: epi. in $\mathcal{D}$

レポート ① を示せ

$$\textcircled{2} \quad P \in \text{Proj } B \Rightarrow FP \in \text{Proj } A$$



$$\textcircled{3} \quad X \in \text{Mod } B : \text{generator} \Rightarrow FX \in \text{Mod } A : \text{generator}$$

$$\textcircled{A} \quad F(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F(X_{\lambda}) \quad \text{次節で示す}$$

$\textcircled{2} \quad \forall Y \in \text{Mod } A, \exists Z \in \text{Mod } B \text{ s.t. } FZ \cong Y$
 $X : \text{generator なのので } \exists \text{epi. } f : X^{\bigoplus \Lambda} \twoheadrightarrow Z$
 $\textcircled{1} \text{ より } (FX)^{\bigoplus \Lambda} \xrightarrow{Ff} FZ \text{ は epi. } \square$
 $\textcircled{A}$

$$\textcircled{4} \quad P = FB \text{ は progenerator}$$

$$\textcircled{B} \quad X \in \text{proj } B \Rightarrow FX \in \text{proj } A \quad \text{次節で示す}$$

$\textcircled{2}$ より projective, $\textcircled{3}$ より generator, $\textcircled{B}$ より fin. gen. $\square$

$$\textcircled{5} \quad F_{B,B} : B = \text{End}_B(B) \longrightarrow \text{End}_A(P) \text{ は 環同型}$$

$$f \longmapsto Ff$$

次節で示す

$$\textcircled{C} \quad F \text{ は "additive" i.e. } \forall f, g \in \text{Hom}_B(X, Y) \quad F(f+g) = Ff + Fg$$

$\textcircled{2}$ F が functor なので $F_{B,B}$ は 積を保ち. $\textcircled{C}$ より 和も保つ $\square$

以上で Claim 6 が示された $\square$

§5 (Co)products and additive categories

(14)

以下 $\mathcal{C}$: category

- Def • $I \in \mathcal{C}$: **initial object** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X \in \mathcal{C}, \exists!$ morphism $I \rightarrow X$
- $T \in \mathcal{C}$: **terminal** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X \in \mathcal{C}, \exists!$ morphism $X \rightarrow T$
- **Zero object** = (initial かつ terminal object)

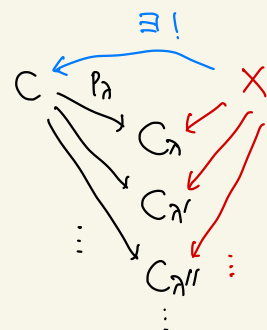
- Ex • Set は initial object $\emptyset$, terminal object $\{*\}$ をもつ
- Ab, Mod A は zero object $0 (= \{0\})$ をもつ

Def Λ : set $C_\lambda \in \mathcal{C} (\lambda \in \Lambda)$

$(C, \{p_\lambda : C \rightarrow C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ が $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の **product** であるとは
以下が成立すること

- $\left(\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{C}. \forall \{f_\lambda : X \rightarrow C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \\ \exists! f : X \rightarrow C \text{ s.t. } \forall \lambda \in \Lambda, p_\lambda \circ f = f_\lambda \end{array} \right)$

つまり $\mathcal{C}(X, C) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(X, C_\lambda)$, $f \mapsto (p_\lambda \circ f)_\lambda$

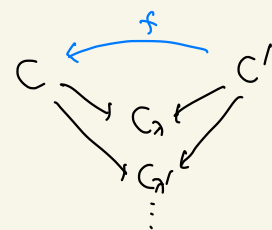


Rem • **Universality** による定義

- もし存在すれば, (iso. による違いを除いて) 一意. つまり

$(C', \{p'_\lambda : C' \rightarrow C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ も $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の product であれば, $\exists f : C' \cong C$ s.t. $\forall \lambda \in \Lambda, p'_\lambda = p_\lambda \circ f$

- $\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ と表す



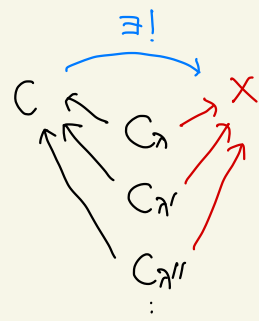
- Ex • Set, Ab, Mod A での product は, 通常の直積で与えられる
- $(\Lambda = \emptyset \text{ のときの product }) = \text{terminal object}$

Def Λ : set $C_\lambda \in \mathcal{C} (\lambda \in \Lambda)$

$(C, \{i_\lambda : C_\lambda \rightarrow C\}_{\lambda \in \Lambda})$ が $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の **coproduct** であるとは
以下が成立すること

- $\left(\begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{C}. \forall \{f_\lambda : C_\lambda \rightarrow X\}_{\lambda \in \Lambda} \\ \exists! f : C \rightarrow X \text{ s.t. } \forall \lambda \in \Lambda, f \circ i_\lambda = f_\lambda \end{array} \right)$

つまり $\mathcal{C}(C, X) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(C_\lambda, X)$



Rem • product の **dual**: ($\mathcal{C}$ での coproduct) = ($\mathcal{C}^{\text{op}}$ での product)

- 存在すれば一意. $\coprod_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda}$ と表す

Ex • Set での coproduct は disjoint union

レポート1 次をたしかめよ

- $Ab, \text{Mod } A$ での coproduct は, 通常の直和 $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda}$ (§4)

前回の (A)

Prop 1 equivalence $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は product を保つ. つまり

$\{p_{\lambda}: C \rightarrow C_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が product in $\mathcal{C} \Rightarrow \{Fp_{\lambda}: FC \rightarrow FC_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ は product in $\mathcal{D}$

proof $\mathcal{D}(F-, FC) \cong \mathcal{C}(-, C) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(-, C_{\lambda}) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}(F-, FC_{\lambda}) \quad \square$

Def $\mathcal{C}$: category, R : commutative ring

$\mathcal{C}$: **R -linear** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X, Y \in \mathcal{C}, \mathcal{C}(X, Y)$ に R -module の構造が与えられていて

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{C}, \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ は R -bilinear

$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{i.e. } (f+f') \circ g = f \circ g + f' \circ g, & f \circ (g+g') = f \circ g + f \circ g' \\ (rf) \circ g = r(f \circ g) & f \circ (rg) = r(f \circ g) \end{array} \quad r \in R \right)$$

(**preadditive category**) := ($\mathbb{Z}$ -linear category)

Fact $\mathcal{C}$: R -linear preadditive $\Rightarrow \forall X \in \mathcal{C}, \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ は R -algebra ring

Ex $\forall A: R\text{-alg}$ から R -linear category $\mathcal{C}$ が. $\text{Ob } \mathcal{C} = \{X\}, \text{End}_{\mathcal{C}}(X) \cong A$

R -linear category preadditive = (複数の object をもつ R -algebra ring)

で定まる

Lem 2 $\mathcal{C}$: preadditive category $X, Y \in \mathcal{C}$

biproduct

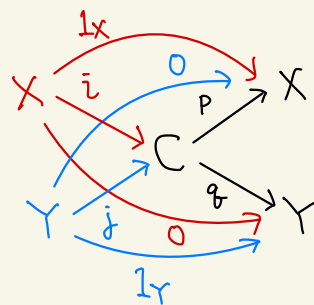
$X \amalg Y$ が存在 $\iff X \perp\!\!\!\perp Y$ が存在. さらにこのとき $X \amalg Y \cong X \perp\!\!\!\perp Y$

proof $\Rightarrow$ のみ示す $\{P: C \rightarrow X, Q: C \rightarrow Y\}$ を product とする.

$$\exists i: X \rightarrow C \text{ s.t. } P \circ i = 1_X, Q \circ i = 0$$

$$\exists j: Y \rightarrow C \text{ s.t. } P \circ j = 0, Q \circ j = 1_Y$$

レポート 2 $i \circ P + j \circ Q = 1_C$ が成立することも確かめよ



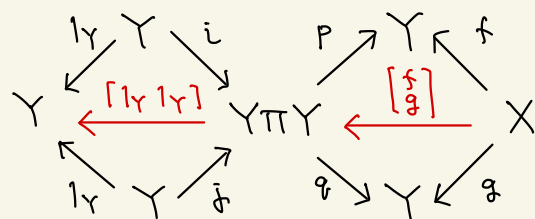
以上より $f \mapsto (f \circ i, f \circ j)$
 $\mathcal{C}(C, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, -) \times \mathcal{C}(Y, -)$ が iso. となる!
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $g \circ P + h \circ Q \longleftarrow (g, h)$

$\{i: X \rightarrow C, j: Y \rightarrow C\}$ は coproduct $\square$

Lem 3 $\mathcal{C}$: preadditive category, $X, Y \in \mathcal{C}$, $Y \times Y$ が存在すると仮定

このとき $\forall f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$,

$$f + g = [1_Y \ 1_Y] \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \text{ が成立}$$



proof $[1_Y \ 1_Y] \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = [1 \ 1] \circ \underbrace{(i \circ P + j \circ Q)}_{1_{Y \times Y}} \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$

biproduct

$$= \underbrace{[1 \ 1] \circ i \circ P}_{1_Y} \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \underbrace{[1 \ 1] \circ j \circ Q}_{1_Y} \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = 1_Y \circ f + 1_Y \circ g = f + g \quad \square$$

Def $\mathcal{C}$: category が additive $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- ① $\exists$ zero object ② $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \exists X \times Y$ ③ $\mathcal{C}$ は preadditive
 $(\iff \exists X \sqcup Y \text{ by Lem 2})$

Prop 4 $\mathcal{C}$: category, $(\mathcal{C}, +), (\mathcal{C}, +')$: ともに additive $\Rightarrow + = +'$

proof Lem 3 の等式の右辺は. 加法を用いずに定まっている $\square$

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: additive category $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$: functor

$$F: \text{additive functor} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X, Y \in \mathcal{C}, F_{X,Y}: \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$$

は アーベル群の 準同型 (つまり $F(f+g) = Ff + Fg$)

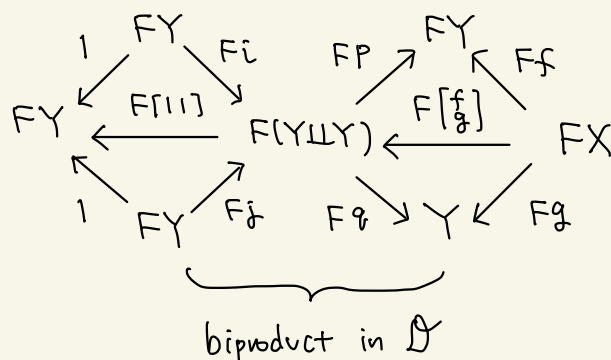
前回の ©

Prop5 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: additive category, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$: equivalence
 $\Rightarrow F$ は additive functor

proof Lem3 の図式を F で送って

右図もうるので

$$\begin{aligned} Ff + Fg &= F[11] \circ F \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = F([11] \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}) \\ &\stackrel{\text{Lem3}}{=} F(f+g) \quad \square \end{aligned}$$



Def $\mathcal{C}$: coproduct を持つ additive category (i.e. $\forall \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \exists \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$)
 $X \in \mathcal{C}$: compact $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \text{ coproduct } \{i_\lambda: C_\lambda \rightarrow C\},$
 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(X, C_\lambda) \cong \mathcal{C}(X, C), (f_\lambda)_\lambda \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda \circ f_\lambda$ (*)
 ← アーベル群の直和

Prop6 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$: equivalence $X \in \mathcal{C}$: compact $\Rightarrow FX$: compact

proof Prop1 と同様 $\square$

Prop7 A : ring, $X \in \text{Proj } A$
 $X \in \text{proj } A \iff X$: compact in $\text{Mod } A$

Prop6 + Prop7 $\Rightarrow$ 前回の ©

proof $\text{Mod } A$ での $\coprod$ は直和 $\oplus$ であった. (*) は次のように言い換えられる

$$\forall f: X \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda, \exists \Lambda': \Lambda \text{ の finite subset s.t. } X \xrightarrow{f} \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \quad (**)$$

$\exists \hookrightarrow \subset$

$\Rightarrow$) X の生成元を $x_1 \sim x_n$ とすると $\forall f: X \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda, \exists \Lambda': \Lambda \text{ の finite subset}$
 s.t. $f(x_i) \sim f(x_n) \in \coprod_{\lambda \in \Lambda'} C_\lambda$ すると $\text{Im } f \subset \coprod_{\lambda \in \Lambda'} C_\lambda$ なので (**) が成立

$\Leftarrow$) epi. $f: A^{\coprod \Lambda} \twoheadrightarrow X$ をとると, projective なので $\exists g: X \rightarrow A^{\coprod \Lambda'}$
 s.t. $f \circ g = 1_X$ また, compact なので (**) より $\exists \Lambda': \text{finite subset s.t.}$
 $\text{Im } g \subset A^{\coprod \Lambda'}$. すると $f|_{A^{\coprod \Lambda'}}: A^{\coprod \Lambda'} \rightarrow X$ は epi. なので X は有限生成 $\square$

§6 Classical tilting modules

(18)

ring A, B で. $\text{Mod } A$ と $\text{Mod } B$ が equivalent ではないが. それに近い状況

以下. $A : \text{ring}$. $X \in \text{Mod } A$ に対し

$$\text{Mod } A \supset \text{add } X := \{Y \in \text{Mod } A \mid \exists n \in \mathbb{N}, Y \text{ は } X^{\oplus n} \text{ の 直和因子}\}$$

additive closure

Ex $\text{add } A = \text{proj } A$ by §4. Prop 2

Def [Brenner - Butler 1980] $U \in \text{Mod } A : (\text{classical}) \text{ tilting module} \stackrel{\text{def}}{\iff}$

(T1) $\exists$ exact sequence $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow U \rightarrow 0$. $P_0, P_1 \in \text{proj } A$

(T2) $\text{Ext}_A^1(U, U) = 0$ (Rem ① より $\forall i \geq 2, \text{Ext}_A^i(U, -) = 0$)

(T3) $\exists$ exact sequence $0 \rightarrow A \rightarrow U^0 \rightarrow U^1 \rightarrow 0$ $U^0, U^1 \in \text{add } U$

Ex • $X \in \text{Mod } A$ が progenerator $\iff \text{add } X = \text{proj } A$
progenerator は tilting module

• $A : \text{ring}$ $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} \subset M_2(A) : \text{subring}$

上三角行列環 $[0 \ A] \subset [A \ A] \in \text{Mod } B$

$U := [A \ A] \oplus \frac{[A \ A]}{[0 \ A]}$ は tilting B -module

(T1) $0 \rightarrow [0 \ A] \rightarrow \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \oplus \frac{[A \ A]}{[0 \ A]} \rightarrow 0$ = U

(T2) $\text{Hom}_B([A \ A]^{\oplus 2}, U) \xrightarrow{\text{epi.}} \text{Hom}_B([0 \ A], U) \rightarrow \text{Ext}_B^1(U, U) \rightarrow 0$

(T3) $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \rightarrow \frac{[A \ A]}{[0 \ A]} \rightarrow 0$

Def $A : \text{ring}$ $\text{Mod } A$ の full subcategory の組 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が torsion pair

$\iff$ ① $\forall T \in \mathcal{T}, \forall F \in \mathcal{F}, \text{Hom}_A(T, F) = 0$

def ② $\forall X \in \text{Mod } A \exists$ exact seq $0 \rightarrow \bigcap_{\mathcal{T}} X \rightarrow X \rightarrow \bigcap_{\mathcal{F}} X \rightarrow 0$

③ $X \cong Y \in \text{Mod } A$ に対し $(X \in \mathcal{T} \Rightarrow Y \in \mathcal{T}), (X \in \mathcal{F} \Rightarrow Y \in \mathcal{F})$
iso を 閉じる

② $\mathcal{J}$ は factor で閉じる. $\mathcal{F}$ は sub で閉じる

$$\left(\begin{array}{l} \odot \quad 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 : \text{exact に } A(U, -) \text{ を apply して} \\ \quad \quad \quad \cap \\ \quad \quad \quad \mathcal{J} \\ \text{exact seq} \quad \text{Ext}_A^1(U, Y) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, Z) \rightarrow \text{Ext}_A^2(U, X) \text{ をうる} \\ \quad \quad \quad \parallel \quad Y \in \mathcal{J} \quad \quad \quad \parallel \quad \textcircled{\Pi} \\ \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \\ \text{Ext}_A^1(U, Z) = 0 \quad \text{より } Z \in \mathcal{J} \quad \quad \quad \mathcal{F} \text{ も同様} \end{array} \right.$$

③ $\forall T \in \mathcal{J}, \forall F \in \mathcal{F}, A(T, F) = 0$

$$\left(\odot \quad \forall f: X \rightarrow Y, \quad \text{Im } f \in \mathcal{J} \cap \mathcal{F} = 0 \right.$$

②
①

④ $\mathcal{J}$ は coproduct で閉じる

$$\left(\begin{array}{l} \odot \quad \forall X_\lambda \in \mathcal{J} \quad (\lambda \in \Lambda), \quad 0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow U \rightarrow 0 \text{ in } \textcircled{\Pi 1} \text{ に} \\ \quad \quad \quad A(-, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \text{ を apply して } P_i \text{ の compact 性 (§5 Prop 3) を用いると} \\ A(P_1, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \rightarrow A(P_0, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \rightarrow \text{Ext}_A^1(P_1, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = 0 : \text{exact} \\ \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \\ \coprod_{\lambda \in \Lambda} A(P_1, X_\lambda) \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} A(P_0, X_\lambda) \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ext}_A^1(U, X_\lambda) = 0 \\ \quad \quad \quad \text{より } \text{Ext}_A^1(U, \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = 0 \end{array} \right.$$

⑤ $\forall Y \in \text{Mod } B, \quad FY = Y \otimes_B U \in \mathcal{J}$

$$\left(\begin{array}{l} \odot \quad \text{epi. } B^{\coprod \Lambda} \rightarrow Y \text{ in Mod } B \text{ をとり } - \otimes_B U \text{ を apply して} \\ \text{epi } U^{\coprod \Lambda} = (B^{\coprod \Lambda}) \otimes_B U \twoheadrightarrow Y \otimes_B U \text{ in Mod } A \text{ をうる.} \\ U \in \mathcal{J} \text{ なのて ④.② より } Y \otimes_B U \in \mathcal{J} \end{array} \right.$$

⑥ $tX \in \mathcal{J}$

($\odot \quad FGX \twoheadrightarrow tX$ なのて ⑤ より従う)

⑦ $fX \in \mathcal{F}$

$$\left(\odot \quad A(U, X) \otimes_B U \xrightarrow{\begin{smallmatrix} B_X \\ \searrow \quad \cup \\ tX \end{smallmatrix}} X \rightarrow fX \rightarrow 0 : \text{exact seq. に } A(U, -) \text{ を apply して} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 0 \rightarrow A(U, tX) \rightarrow A(U, X) \rightarrow A(U, fX) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, tX) = 0 \\
 \uparrow \quad \nearrow \text{epi.} \\
 A(U, A(U, X) \otimes_B U) \quad \left(\S 2 \text{ Thm 3 (II) } ③ \Rightarrow ① \text{ の proof の 最後と同じ} \right) \\
 A(U, fX) = 0 \quad \square
 \end{array}
 \tag{21}$$

Prop 3 U : tilting A -module $\Rightarrow U$: tilting B^{op} -module
 $B = \text{End}_A(U) \Rightarrow A \cong \text{End}_{B^{\text{op}}}(U)$

proof functor $A(-, U) : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B^{\text{op}}$ は

dual equivalence $\text{add } U_A \simeq \text{proj } B^{\text{op}}$ と $\text{proj } A \simeq \text{add } B U$ を与える

$\textcircled{T1}$ の exact seq. $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow U \rightarrow 0$ に $A(-, U)$ を apply して

$$0 \rightarrow A(U, U) \rightarrow \underbrace{A(P_0, U) \rightarrow A(P_1, U)}_{\text{add } B U} \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, U) : \text{exact seq. in } B\text{Mod} \text{ である.}$$

$\parallel_B$ $\parallel_0 \textcircled{T2}$ $\parallel_0 \textcircled{T3} \text{ for } B U$

$\textcircled{T3}$ の exact seq. $0 \rightarrow A \rightarrow U^0 \xrightarrow{f} U^1 \rightarrow 0$ に $A(-, U)$ を apply して

$$0 \rightarrow \underbrace{A(U^1, U) \rightarrow A(U^0, U)}_{\text{proj } B^{\text{op}}} \rightarrow A(A, U) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U^1, U) : \text{exact seq in } B\text{Mod} \text{ である}$$

$\parallel_U$ $\parallel_0 \textcircled{T2}$ $\parallel_0 \textcircled{T1} \text{ for } B U$

これは B^{op} -module U の projective resolution なので. $B^{\text{op}}(-, U)$ を apply して

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow \text{End}_{B^{\text{op}}}(U) \rightarrow_{B^{\text{op}}(A(U^0, U), U)} & & B^{\text{op}}(A(U^1, U), U) \rightarrow \text{Ext}_{B^{\text{op}}}^1(U, U) \rightarrow \text{Ext}_{B^{\text{op}}}^1(A(U^1, U), U) \\
 & \varepsilon_{U^0} \uparrow 2 & \varepsilon_{U^1} \uparrow 2 & \text{exact seq in Mod } A & \parallel_0 \\
 0 \rightarrow A \rightarrow U^0 \xrightarrow{f} U^1 \rightarrow 0 & & & &
 \end{array}$$

$\S 4$ Prop 4 と同様に $\varepsilon : \text{id}_{\text{add } U} \cong B^{\text{op}}(A(-, U), U)$

2つの列を比べて $\text{Ext}_{B^{\text{op}}}^1(U, U) = 0 : \textcircled{T2} \text{ for } B U, \quad A \cong \text{End}_{B^{\text{op}}}(U) \quad \square$

Def For $X \in \text{Mod } A$, $\text{Add } X := \{ Y \in \text{Mod } A \mid \exists \text{ set } \Lambda, Y \text{ は } X^{\coprod \Lambda} \text{ の 直和因子} \}$
 $\text{add } X \quad \quad \quad n \in \mathbb{N} \quad \quad \quad X^{\coprod n}$

$\text{Gen } X := \{ Z \in \text{Mod } A \mid \exists Y \in \text{Add } X, \exists \text{ epimorph } Y \twoheadrightarrow Z \}$

Prop 4 U : tilting A -mod $\Rightarrow J(U) = \text{Gen } U$

proof $U \in J(U)$ と Thm 2 ④, ② より $\supset$ が従う

$\subset \forall X \in \mathcal{J}(U), \text{ epi. } A^{\perp\perp} \xrightarrow{f} X \text{ をとる.}$

(T3) $\perp\perp : 0 \rightarrow A^{\perp\perp} \xrightarrow{g} U^0 \perp\perp \rightarrow U^1 \perp\perp \rightarrow 0$ に $A(-, X)$ を apply して

$$A(U^0 \perp\perp, X) \rightarrow A(A^{\perp\perp}, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U^1 \perp\perp, X) = 0 : \text{exact}$$

$$A^{\perp\perp} \xrightarrow{g} U^0 \perp\perp$$

$$\begin{array}{ccc} & \textcircled{2} & \\ f \searrow & & \swarrow \exists h \\ & X & \end{array}$$

h は epi. なので $X \in \text{Gen } U \quad \square$

Lem 5 $X \in \mathcal{J}(U) \quad G = {}_A(U, -) : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$

① $\exists$ exact seq. $0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{g} U_0 \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$ s.t. $U_0 \in \text{Add } U, X_1 \in \mathcal{J}(U)$

$$0 \rightarrow GX_1 \xrightarrow{Gg} GU_0 \xrightarrow{Gf} GX \rightarrow 0 : \text{exact seq in Mod } B$$

$$\textcircled{2} \quad \beta_X : (GX) \otimes_B U \cong X, \quad \text{Tor}_1^B(GX, U) = 0$$
$$f \otimes U \mapsto f(U)$$

proof ① $U_0 := \bigcup_{U \in \mathcal{J}(U)} U \xrightarrow{f} X$ を考える.

$$(Ua)_{a \in {}_A(U, X)} \mapsto \sum_{a \in {}_A(U, X)} a(Ua)$$

Rem ① は $\mathcal{J}(U)$ は 完全圏 (フーバー圏の類似物) として enough projective であることを意味する (Add U の obj は $\mathcal{J}(U)$ の中では projective となる)

$X \in \text{Gen } U$ (by Lem 4) なので. f は epi.

$X_1 := \text{Ker } f$ とおき, exact seq. $0 \rightarrow X_1 \rightarrow U_0 \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$ に G を apply して

$$\text{exact seq. } 0 \rightarrow GX_1 \rightarrow GU_0 \xrightarrow{Gf} GX \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, X_1) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, U_0)$$
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Gf は 明らかに epi. なので. $\text{Ext}_A^1(U, X_1) = 0$

② ① をくりがえし 用いることにより exact seq.

$$\cdots \rightarrow U_2 \rightarrow U_1 \rightarrow U_0 \rightarrow X \rightarrow 0 \text{ で } \forall i, U_i \in \text{Add } U \text{ かつ}$$

$$\cdots \rightarrow GU_2 \rightarrow GU_1 \rightarrow GU_0 \rightarrow GX \rightarrow 0 \quad (*) \text{ が exact となるものをうる}$$

一方. (T1) より $U \in \text{mod } A$ なので U は $\text{Mod } A$ で compact (§5 Prop 7 と同様)

これより $\text{Proj } B \xrightleftharpoons[G = {}_A(U, -)]{F = - \otimes_B U} \text{Add } U_A$ は equivalence **(**)**

よくに $(*)$ は B -mod. GX の projective resolution を与える

⊗ に $F = - \otimes_B U$ を apply して. 以下の可換図式をうる

$$\begin{array}{ccccccc} FG U_2 & \longrightarrow & FG U_1 & \longrightarrow & FG U_0 & \longrightarrow & FG X \longrightarrow 0 : \text{complex.} \\ \downarrow \beta_{U_2} & & \downarrow \beta_{U_1} & & \downarrow \beta_{U_0} & & \downarrow \beta_X \\ U_2 & \longrightarrow & U_1 & \longrightarrow & U_0 & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 : \text{exact} \end{array}$$

FGU₁ での cohomology は $\text{Tor}_i^B(GX, U)$

(**) より β は $\text{Add } U$ 上で iso. なので $\beta_X: FG X \cong X$

$$\text{Tor}_i^B(GX, U) = 0 \text{ をうる} \quad \square$$

Def A : ring U : tilting A -module $B := \text{End}_A(U)$

$$\mathcal{X}(U) := \{ X \in \text{Mod } B \mid M \otimes_B U = 0 \}$$

$$\mathcal{Y}(U) := \{ X \in \text{Mod } B \mid \text{Tor}_i^B(M, U) = 0 \}$$

Thm 6 $(\mathcal{X}(U), \mathcal{Y}(U))$ は torsion pair in $\text{Mod } B$

$$\text{Mod } B \xrightleftharpoons[\substack{G = {}_A(U, -)}]{\substack{F = - \otimes_B U}} \text{Mod } A$$

$$\alpha: \text{id}_{\text{Mod } B} \longrightarrow G \circ F$$

$$\alpha_X: X \longrightarrow A(U, X \otimes_B U)$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \alpha_X \longrightarrow X \longrightarrow \text{Im } \alpha_X \longrightarrow 0$$

$$x \mapsto (u \mapsto x \otimes u)$$

$$\begin{array}{ccc} xX & \stackrel{\cap}{=} & \mathcal{X}(U) \\ yX & \stackrel{\cap}{=} & \mathcal{Y}(U) \end{array}$$

proof Thm 2 と全く同様なので 概略のみ記す

$\mathcal{X} = \mathcal{X}(U)$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(U)$ とおく.

$$\textcircled{1} \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{0\}$$

($\odot$) Prop 3 より $B U$ は tilting なので. Thm 2 ① と同様に示される)

② $\mathcal{X}$ は factor で閉じ. $\mathcal{Y}$ は sub で閉じる

$$\textcircled{3} \forall X \in \mathcal{X}, \forall Y \in \mathcal{Y}. \text{bp}(X, Y) = 0$$

} Thm 2 ②③ と全く同様

$$\textcircled{4} yX \in \mathcal{Y}$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{\odot} 0 \longrightarrow tFX \longrightarrow FX \longrightarrow fFX \longrightarrow 0 \text{ に } G \text{ を apply して} \\ GFX \cong \underbrace{GtFX}_{\substack{\text{Lem 5 ②}}} \in \mathcal{Y} \text{ であらう. } yX \subset GFX \text{ と ② より } yX \in \mathcal{Y} \end{array} \right)$$

$$\textcircled{5} xX \in \mathcal{X}$$

③ $0 \rightarrow \alpha X \rightarrow X \rightarrow \gamma X \rightarrow 0$ に $F = - \otimes_B U$ を apply して

$$\begin{array}{ccc} & \searrow \alpha_X & \cap \\ & & GFX \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tor}_1^B(GFX, U) & \rightarrow & \alpha X \otimes_B U & \rightarrow & X \otimes_B U & \rightarrow & \gamma X \otimes_B U \rightarrow 0 : \text{exact} \\ \parallel \text{Lem 5 ②} & & & & \swarrow F\alpha_X & \nearrow \beta_{FX} & \downarrow \\ 0 & & & & & & GFX \otimes_B U \end{array}$$

$\beta_{FX} \circ F\alpha_X = 1_{X \otimes_B U}$ より $F\alpha_X$ は mono なので, $\alpha X \otimes_B U = 0$ $\square$

Thm 7 [Brenner-Butler 1980, Happel-Ringel 1982, Colby-Fuller 1990]

A : ring U : tilting A -mod. $B = \text{End}_A(U)$

$$\Rightarrow \mathcal{T}(U) \xleftarrow[G = A(U, -)]{F = - \otimes_B U} \mathcal{Y}(U) \text{ と } \mathcal{F}(U) \xleftarrow[\text{Ext}_A^1(U, -)]{\text{Tor}_1^B(-, U)} \mathcal{X}(U) \text{ は equivalences}$$

proof 1つ目のみ示す

Thm 2 ⑤ より $F: \mathcal{Y}(U) \rightarrow \mathcal{T}(U)$ が well-defined

Lem 5 ② より $G: \mathcal{T}(U) \rightarrow \mathcal{Y}(U)$ かつ $\beta: F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{T}(U)}$

$\alpha: \text{id}_{\mathcal{Y}(U)} \rightarrow G \circ F$ が isoであることを示す

$\forall X \in \mathcal{Y}(U)$, projective resol. $\cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ をとる

F を apply すると $X \in \mathcal{Y}(U)$ なので

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{Ff_2} & FP_1 & \xrightarrow{Ff_1} & FP_0 & \rightarrow & FX \rightarrow 0 \text{ は exact, } X_i := \text{Im } Ff_i \text{ とおくと} \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \\ & & X_2 & & X_1 & & \end{array}$$

$FP_i \in \mathcal{T}(U)$ より $X_i \in \mathcal{T}(U)$ ($\forall i$) なので G を apply して可換図式をうる

$$\begin{array}{ccccccc} GFP_1 & \rightarrow & GFP_0 & \rightarrow & GFX & \rightarrow & 0 : \text{exact} \\ \uparrow \alpha_{P_1} & & \uparrow \alpha_{P_0} & & \uparrow \alpha_X & & \\ P_1 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow & X & \rightarrow & 0 : \text{exact} \end{array}$$

$\text{Proj } B$ 上 $\alpha: \text{id}_{\text{Proj } B} \rightarrow G \circ F$ は iso. なので α_X も iso. $\square$

Rem 後ほど. より一般の **tilting complex** に対して, Thm 7 の equivalences を拡張した **derived category** の equivalence を与える

ring R に対し. $M_2(R)$ の subring $A = \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix}$ を考える

① $\text{Mod } R$ の morphism $f: X \rightarrow Y$ から, $[X, Y]_f \in \text{Mod } A$ が
以下のようにして与えられることを示せ.

$$[X, Y]_f = X \oplus Y$$

$$(x, y) \in [X, Y]_f, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in A \text{ に対し } (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (xa, f(x)b + yc)$$

(さらにこの対応により, $\text{Mod } A$ と ($\text{Mod } R$ の morphisms の category) が
equivalent になる)

② $M_2(R)$ を 自然に (A, A) -bimodule とみなす. このとき

$\begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $M_2(R)$ の sub (A, A) -bimodule なので. (A, A) -bimodule

$$U := M_2(R) / \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ が定まる.}$$

right A -module U の endomorphism ring $\text{End}_A(U)$ は

$A \rightarrow \text{End}_A(U)$ により A と 環同型 となることを示せ

$$a \mapsto (u \mapsto au)$$

③ §6 Ex より U は tilting A -module であった.

以下を示せ.

$$F(U) = \{ M \in \text{Mod } A \mid \exists X \in \text{Mod } R, M \cong [0, X]_0 \}$$

$$\mathcal{F}(U) = \{ \text{————} \mid \text{————} M \cong [X, 0]_0 \}$$

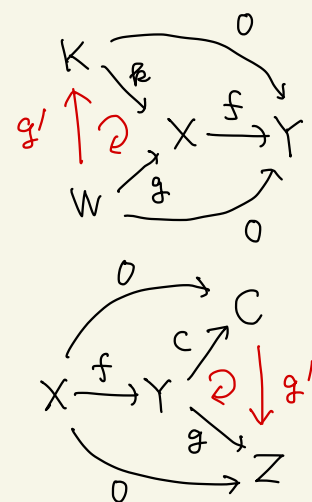
$$\mathcal{T}(U) = \{ \text{————} \mid \exists \text{ epimorphism } f: X \rightarrow Y \text{ in } \text{Mod } R \text{ s.t. } M \cong [X, Y]_f \}$$

$$\mathcal{Y}(U) = \{ \text{————} \mid \exists \text{ monomorphism } \text{————} \}$$

Def $\mathcal{C}$: additive category $f \in \mathcal{C}(X, Y)$

① $k \in \mathcal{C}(K, X)$ が f の **kernel** であるとは.
 $f \circ k = 0$ かつ $(\forall g \in \mathcal{C}(W, X) \text{ s.t. } f \circ g = 0, \exists! g': W \rightarrow K \text{ s.t. } g = k \circ g')$

② $c \in \mathcal{C}(Y, C)$ が f の **cokernel** であるとは.
 $c \circ f = 0$ かつ $(\forall g \in \mathcal{C}(Y, Z) \text{ s.t. } g \circ f = 0, \exists! g': C \rightarrow Z \text{ s.t. } g = g' \circ c)$



Rem f の kernel (**cokernel**) が存在すれば, iso を除いて一意
 $k = \ker f, K = \text{Ker } f \quad (c = \text{cok } f, C = \text{Cok } f)$ と表す

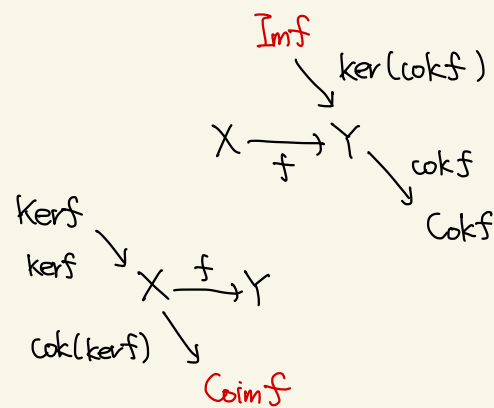
Def $\mathcal{C}$: additive category $f \in \mathcal{C}(X, Y)$

• $\text{cok } f$ の kernel が存在するとき.

$\text{Im } f := \text{Ker}(\text{cok } f)$ を f の **image** とよぶ

• $\ker f$ の cokernel が存在するとき.

$\text{Coim } f := \text{Cok}(\ker f)$ を f の **coimage** とよぶ



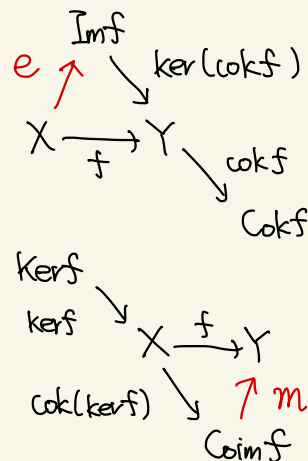
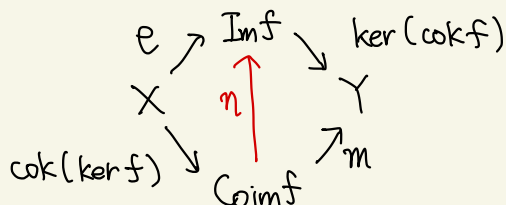
Lem ① $\text{Im } f$ が存在するとき. $\exists! e: X \rightarrow \text{Im } f$ s.t.
 $f = \ker(\text{cok } f) \circ e$

② $\text{Coim } f$ が存在するとき $\exists! m: \text{Coim } f \rightarrow X$ s.t.
 $f = m \circ \text{cok}(\ker f)$

③ $\text{Im } f, \text{Coim } f$ が存在するとき. $\exists! \eta: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$

s.t. $e = \eta \circ \text{cok}(\ker f)$

$m = \ker(\text{cok } f) \circ \eta$



Def additive category $\mathcal{C}$ が **abelian category** であるとは

• $\mathcal{C}$ の $\forall$ morphism f が kernel と cokernel をもち.

• Lem ③ の $\eta: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ が iso. になること.

Ex $\text{Ab}, \text{Mod } A \quad (A: \text{ring})$ は abelian category

Def $Q = (Q_0, Q_1, s, t) : \text{quiver} \iff$

Q_0, Q_1 は (finite) sets, $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ は maps

点 矢

始点 終点

source target

quiver = 有向グラフ

Ex $a \curvearrowright 1 \xrightleftharpoons[c]{b} 2 \xrightleftharpoons[e]{d} 3$

$Q_0 = \{1, 2, 3\}$

$Q_1 = \{a, b, c, d, e\}$

	a	b	c	d	e
s	1	1	1	2	3
t	1	2	2	3	2

• この章では Q は finite quiver ($\#Q_0 < \infty, \#Q_1 < \infty$) とする

Def K : field

① Q の K -representation (表現) とは $V = (V_i, V_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ で

- $\forall i \in Q_0, V_i$ は K -vector space
- $\forall (a: i \rightarrow j) \in Q_1, V_a: V_i \rightarrow V_j$ は K -linear map

② Q の K -representation $V = (V_i, V_a), W = (W_i, W_a)$ に対し.

$f = (f_i)_{i \in Q_0}$ が V から W への morphism であるとは.

- $\forall i \in Q_0, f_i: V_i \rightarrow W_i$ は K -linear map
- $\forall (a: i \rightarrow j) \in Q_1, f_j \circ V_a = W_a \circ f_i$

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{V_a} & V_j \\ f_i \downarrow & \textcircled{?} & \downarrow f_j \\ W_i & \xrightarrow{W_a} & W_j \end{array}$$

$\text{Rep } KQ$: Q の K -representations の category

Prop 1 ① $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ が isomorphism in $\text{Rep } KQ \iff \forall i \in Q_0, f_i$ が iso. in $\text{Mod } K$

② $\text{Rep } KQ$ は product と coproduct をもつ.

$\wedge$: set $V_\lambda = (V_{\lambda,i}, V_{\lambda,a})_{i \in Q_0, a \in Q_1} \in \text{Rep } KQ$ ($\lambda \in \wedge$) に対し

$$\prod_{\lambda \in \wedge} V_\lambda = (\prod_{\lambda \in \wedge} V_{\lambda,i}, \prod_{\lambda \in \wedge} V_{\lambda,a}), \quad \coprod_{\lambda \in \wedge} V_\lambda = (\oplus_{\lambda \in \wedge} V_{\lambda,i}, \oplus_{\lambda \in \wedge} V_{\lambda,a})$$

$\hookrightarrow$ 通常の直積

$\hookrightarrow$ 通常の直和

$\wedge$ が 有限の場合 これらは一致する (biproduct) が, $\oplus_{\lambda \in \wedge} V_\lambda$ と表すことにする

③ $\text{Rep } KQ$ は K -linear additive category (15ページ) lisäksi abelian category (26ページ)

Ex $0 = (0, 0)_{i \in Q_0, a \in Q_1} \in \text{Rep } KQ$ が zero object

Ex $\forall \mathcal{R} \in Q_0 \quad S(\mathcal{R}) \in \text{Rep } KQ$ を以下で定める

$$S(\mathcal{R})_i = \begin{cases} K & i = \mathcal{R} \\ 0 & i \neq \mathcal{R} \end{cases} \quad \forall a \in Q_1, S(\mathcal{R})_a = 0 \quad \text{simple representation}$$

Ex $Q = [\bullet]$ なら $(Q \text{ の } K\text{-representation}) = (K\text{-vector space}), \text{Rep } KQ = \text{Mod } K$

Ex $Q = [1 \xrightarrow{a} 2]$ のとき $V = [V_1 \xrightarrow{V_a} V_2]$ $(Q \text{ の } K\text{-rep.}) =$
 $\begin{matrix} f \downarrow & f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ W = [W_1 & \xrightarrow{W_a} & W_2] \end{matrix}$ $(\text{Mod } K \text{ の morphism})$

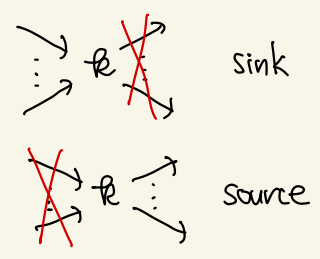
$\text{Rep } KQ$ の任意の object は. 以下の3つの object の coproduct と iso.
 $S(1) = [K \rightarrow 0], \quad S(2) = [0 \rightarrow K], \quad P(1) := [K \xrightarrow{1} K]$

proof $V = [V_1 \xrightarrow{V_a} V_2]$ に対し. V_1 の subspace X と V_2 の subspace Y を
 $V_1 = (\text{Ker } V_a) \oplus X, \quad V_2 = (\text{Im } V_a) \oplus Y$ とするおとると.

$$\begin{aligned} V &\cong [(\text{Ker } V_a) \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1_X & 0 \end{bmatrix}} X \oplus Y] \\ &\cong [K \text{er } V_a \rightarrow 0] \oplus [X \xrightarrow{1_X} X] \oplus [0 \rightarrow Y] \\ &\cong S(1)^{\perp \dim \text{Ker } V_a} \oplus P(1)^{\perp \dim X} \oplus S(2)^{\perp \dim Y} \quad \square \end{aligned}$$

Def Q : quiver. $\mathcal{R} \in Q_0$

① $\mathcal{R}$: sink of $Q \iff \nexists a \in Q_1 \text{ s.t. } S(a) = \mathcal{R}$
source $t(a)$

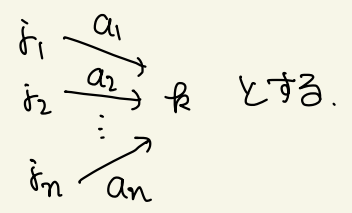


② $\sigma_{\mathcal{R}} Q$: $\mathcal{R}$ を端点とする全ての矢の向きを逆にしてえられる quiver

Ex $Q = [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3] \quad \sigma_1 Q = [1 \leftarrow 2 \rightarrow 3] \quad \sigma_2 Q = [1 \leftarrow 2 \leftarrow 3] \quad \sigma_3 Q = [1 \rightarrow 2 \leftarrow 3]$

Def [Bernstein - Gelfand - Ponomarev 1973]

Q : quiver. $\mathcal{R} \in Q_0$: sink, $\mathcal{R}$ を端点とする矢を



$\sigma_{\mathcal{R}} Q$ で $\mathcal{R}$ は source で. 矢 $i_1 \xleftarrow{b_1} \mathcal{R}, i_2 \xleftarrow{b_2} \mathcal{R}, \dots, i_n \xleftarrow{b_n} \mathcal{R}$ を持つ

$V = (V_i, V_a) \in \text{Rep } KQ$ が $\sigma_{\mathbb{R}}^+ V = (V_i^+, V_a^+) \in \text{Rep } K\sigma_{\mathbb{R}} Q$ を以下で定める

$$\bullet \quad V_i^+ := \begin{cases} V_i & i \neq \mathbb{R} \\ \text{Ker } V_{-, \mathbb{R}} & i = \mathbb{R} \end{cases} \quad V_{-, \mathbb{R}} := [V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n}] \xrightarrow{[V_{a_1} \cdots V_{a_n}]} V_{\mathbb{R}}$$

$$\bullet \quad a \in (\sigma_{\mathbb{R}} Q)_1 \quad a \neq b_1 \sim \cdots \sim b_n \text{ なら } V_a^+ := V_a$$

$$l = 1 \sim n, \quad V_{b_l}^+ := [V_i \subset V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} \xrightarrow{p_l} V_{j_l}]$$

Ex $Q = \begin{array}{ccc} 1 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & 3 \\ & 2 & \nearrow \end{array} \quad \sigma_3 Q = \begin{array}{ccc} 1 & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} & 3 \\ & 2 & \nwarrow \end{array} \quad 0 \rightarrow K^{\oplus 2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} K^{\oplus 3} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} K$

$V = \begin{bmatrix} K & \xrightarrow{1} & K \\ & 0 & \nearrow \\ K & \xrightarrow{1} & K \end{bmatrix} \in \text{Rep } KQ \quad \sigma_3^+ V = \begin{bmatrix} K & \xleftarrow{[10]} & K^{\oplus 2} \\ & [01] & \nwarrow \\ K & \xleftarrow{[-10]} & K \end{bmatrix}$

Ex $\sigma_{\mathbb{R}}^+ (S(i)) = \begin{cases} S(i) & i \neq \mathbb{R} \\ 0 & i = \mathbb{R} \end{cases}$

Def Q : quiver, $\mathbb{R} \in Q_0$: sink

morphism $f = (f_i): V \rightarrow W$ in $\text{Rep } KQ$ に対し.

morphism $\sigma_{\mathbb{R}}^+ f = (f_i^+): \sigma_{\mathbb{R}}^+ V \rightarrow \sigma_{\mathbb{R}}^+ W$ in $\text{Rep } K\sigma_{\mathbb{R}} Q$ を

$$\bullet \quad i \neq \mathbb{R} \text{ なら } f_i^+ = f_i$$

$$\bullet \quad i = \mathbb{R} \text{ なら 可換図式 } \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V_{\mathbb{R}}^+ & \rightarrow & V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} & \xrightarrow{V_{-, \mathbb{R}}} & V_{\mathbb{R}} \\ & & \downarrow f_{\mathbb{R}}^+ & & \downarrow f_{j_1} \oplus \cdots \oplus f_{j_n} & & \downarrow f_{\mathbb{R}} \\ 0 & \rightarrow & W_{\mathbb{R}}^+ & \rightarrow & W_{j_1} \oplus \cdots \oplus W_{j_n} & \xrightarrow{W_{-, \mathbb{R}}} & W_{\mathbb{R}} \end{array} \quad \text{で } f_{\mathbb{R}}^+ \text{ を定める}$$

reflection functor $\sigma_{\mathbb{R}}^+ : \text{Rep } KQ \rightarrow \text{Rep } K\sigma_{\mathbb{R}} Q$ を得る

Def Q : quiver, $\mathbb{R} \in Q_0$: source

双対的に reflection functor $\sigma_{\mathbb{R}}^- : \text{Rep } KQ \rightarrow \text{Rep } K\sigma_{\mathbb{R}} Q$ が定まる.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & a_1 & \rightarrow \delta_1 \\ & \vdots & \\ & a_n & \rightarrow \delta_n \\ \mathbb{R} & & \end{array} & \text{in } Q & \text{に} & \begin{array}{ccc} & b_1 & \leftarrow \delta_1 \\ & \vdots & \\ & b_n & \leftarrow \delta_n \\ \mathbb{R} & & \end{array} & \text{in } \sigma_{\mathbb{R}} Q & \text{が対応する} \end{array}$$

$V = (V_i, V_a) \in \text{Rep } KQ$ かつ $\sigma_{\bar{r}} V = (V_i^-, V_a^-) \in \text{Rep } K\sigma_{\bar{r}}Q$ を以下で定める

• $V_i^- := \begin{cases} V_i & i \neq r \\ \text{Cok } V_{r,-} & i = r \end{cases}$ $V_{r,-} := [V_r \xrightarrow{\begin{bmatrix} V_{a_1} \\ \vdots \\ V_{a_n} \end{bmatrix}} V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n}]$

• $a \in (\sigma_{\bar{r}}Q)_1$ $a \neq b_1 \sim b_n$ なら $V_a^- := V_a$

$l = 1 \sim n$. $V_{b_l}^- := [V_{j_l} \hookrightarrow V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} \twoheadrightarrow V_r^-]$

morphism の対応も同様

以上まとめると Q : quiver, r : sink of $Q \Rightarrow r$: source of $\sigma_{\bar{r}}Q$

$$\text{Rep } KQ \xrightleftharpoons[\sigma_{\bar{r}}^+]{\sigma_{\bar{r}}} \text{Rep } K\sigma_{\bar{r}}Q \quad \sigma_{\bar{r}}(\sigma_{\bar{r}}Q) = Q$$

Def $J(KQ, r) := \{ V \in \text{Rep } KQ \mid V_{-,r} : \text{epimorphism in Mod } K \}$

$\mathcal{Y}(K\sigma_{\bar{r}}Q, r) := \{ W \in \text{Rep } K\sigma_{\bar{r}}Q \mid W_{r,-} : \text{monomorphism in Mod } K \}$

Thm 2 $J(KQ, r) \xrightleftharpoons[\sigma_{\bar{r}}^+]{\sigma_{\bar{r}}} \mathcal{Y}(K\sigma_{\bar{r}}Q, r)$ は equivalences $\sigma_{\bar{r}} \circ \sigma_{\bar{r}}^+ \cong \text{id}_{J(KQ, r)}$
 $\sigma_{\bar{r}}^+ \circ \sigma_{\bar{r}} \cong \text{id}_{\mathcal{Y}(K\sigma_{\bar{r}}Q, r)}$

idea K -linear map f が "epi." なら $\text{cok}(\ker f) = f$

proof $V \in J(KQ, r)$ に対し $W := \sigma_{\bar{r}}^+ V \in \text{Rep } K\sigma_{\bar{r}}Q$, $X := \sigma_{\bar{r}} W \in \text{Rep } KQ$ とおき $V \cong X$ を示す.

r と (r を端点とする矢) 以外では V, W, X は一致する

$$\begin{array}{c} j_1 \xrightarrow{a_1} \\ j_2 \xrightarrow{a_2} \\ \vdots \\ j_n \xrightarrow{a_n} \end{array} r \text{ in } Q$$

$$\begin{array}{c} j_1 \xleftarrow{b_1} \\ j_2 \xleftarrow{b_2} \\ \vdots \\ j_n \xleftarrow{b_n} \end{array} r \text{ in } \sigma_{\bar{r}}Q$$

$V \in J(KQ, r)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & V_r^+ & \longrightarrow & V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} & \xrightarrow{V_{-,r} = [V_{a_1} \cdots V_{a_n}]} & V_r & \xrightarrow{\quad} 0 \\ \parallel & & & \parallel & & \parallel & \text{exact} \\ W_r & \longrightarrow & W_{j_1} \oplus \cdots \oplus W_{j_n} & \longrightarrow & W_r^- & \longrightarrow & 0 \\ & \begin{bmatrix} W_{b_1} \\ \vdots \\ W_{b_n} \end{bmatrix} = W_{r,-} & & \parallel & & \parallel & \\ & & X_{j_1} \oplus \cdots \oplus X_{j_n} & \xrightarrow{[X_{a_1} \cdots X_{a_n}]} & X_r & & \end{array}$$

これより $V \cong X$. morphism の対応も同様にたしかめられ $\sigma_{\bar{r}} \circ \sigma_{\bar{r}}^+ \cong \text{id}_{J(KQ, r)}$ $\square$

レポート Q の sink k に対し. 以下をたしめよ

$V \in \text{Rep } KQ$ に対し $V \in \mathcal{J}(KQ, k) \iff V$ は $S(k)$ を直和因子に持たない

$W \in \text{Rep } KQ$ に対し $W \in \mathcal{Y}(KQ, k) \iff W$ は _____

ヒント 28ページ $Q = [1 \rightarrow 2]$ のときの議論と同様

- 以下. Thm 2 が 24ページ Thm 7 の特別な場合であることを示す

Def Q : quiver, $l \geq 1$

$$\bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{a_l} \bullet$$

- 矢の列 $p = a_1 a_2 \cdots a_l$ で $t(a_i) = s(a_{i+1})$ ($i=1 \sim l-1$) をみたすものを長さ l の **path** とよぶ $s(p) = s(a_1)$. $t(p) = t(a_l)$ とおく

- $i \in Q_0$ に対し. 記号 e_i を長さ 0 の **path** とよぶ

$$s(e_i) = i = t(e_i) \text{ とおく}$$

Q の **path algebra** KQ を以下で定める

- KQ は 全ての **path** を basis とする K -vector space
- path** p, q に対し $p \cdot q = \begin{cases} pq & (p \text{ と } q \text{ をつなげた path}) \\ 0 & t(p) \neq s(q) \end{cases}$

これを K -linear に拡張して KQ の積を定める

Fact 3 ① KQ は K -algebra で. 単位元 $\sum_{i \in Q_0} e_i$ を持つ

② e_i ($i \in Q_0$) は **idempotent** ($e_i^2 = e_i$) で. 互いに **orthogonal** $\begin{cases} \forall i \neq j \\ e_i e_j = 0 \end{cases}$

Ex $Q = [1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} n]$ のとき

$$KQ \cong \begin{bmatrix} K & K & \cdots & K \\ 0 & K & \cdots & K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K \end{bmatrix} \subset M_n(K)$$

$$[i \xrightarrow{a_i} i+1 \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_{j-1}} j] \mapsto E_{ij} = ((i, j) \text{ 成分が } 1, \text{ 他は } 0 \text{ である行列})$$

idempotent に関する基本事項

$$i \neq j \quad e_i e_j = 0 \quad e_i^2 = e_i$$

A : ring $A \ni 1 = e_1 + \cdots + e_n$: orthogonal idempotents

$$(I1) \quad X \in \text{Mod } A \quad X e_i = \{ x e_i \mid x \in X \} \subset X \quad \text{とおく}$$

(32)

$$X = \bigoplus_{i=1}^n X e_i \quad \text{in } Ab \quad (\text{注 } X e_i \text{ は一般に } A\text{-module ではない})$$

$$\text{Thm 4} \quad Q: \text{quiver} \quad \exists \text{ equivalence} \quad \text{Mod } KQ \xrightleftharpoons[G_Q]{F_Q} \text{Rep } KQ$$

proof ① functor $F = F_Q: \text{Mod } KQ \rightarrow \text{Rep } KQ$ を定める

(1) $X \in \text{Mod } KQ$ に対し $FX = ((FX)_i, (FX)_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1} \in \text{Rep } KQ$ を
 $i \in Q_0$ に対し, $(FX)_i := X e_i$ 以下で定める

$$\bullet (a: i \rightarrow j) \in Q_1 \text{ に対し } (FX)_a := \left[\begin{array}{ccc} \cdot a: X e_i & \longrightarrow & X e_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longmapsto & ya \end{array} \right]$$

(2) morphism $f: X \rightarrow Y$ in $\text{Mod } KQ$ に対し, $(Ff)_i := f|_{X e_i}: X e_i \rightarrow Y e_i$

とおく. 下の可換性より morphism $Ff = ((Ff)_i)_{i \in Q_0}: FX \rightarrow FY$ in

$$\text{Rep } KQ \text{ が定まる} \quad \left[\begin{array}{ccc} \forall (a: i \rightarrow j) \in Q_1, & \begin{array}{ccc} X e_i & \xrightarrow{\cdot a} & X e_j \\ \downarrow f|_{X e_i} & \text{red circle} & \downarrow f|_{X e_j} \\ Y e_i & \xrightarrow{\cdot a} & Y e_j \end{array} \end{array} \right]$$

② functor $G = G_Q: \text{Rep } KQ \rightarrow \text{Mod } KQ$ を定める

(1) $V = (V_i, V_a) \in \text{Rep } KQ$ に対し, $GV := \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ を以下のように

KQ -module とみなす

• path $p = a_1 a_2 \cdots a_\ell: i \rightarrow j$ に対し, $V_p := V_{a_\ell} \circ \cdots \circ V_{a_1}: V_i \rightarrow V_j$ とおき.

GV への $p \in KQ$ の作用を $[GV \twoheadrightarrow V_i \xrightarrow[V_p]{} V_j \hookrightarrow GV]$ と定め.

これを K -linear に拡張する

(2) morphism $f = (f_i): V \rightarrow W$ in $\text{Rep } KQ$ に対し, $Gf := \bigoplus_{i \in Q_0} f_i: \bigoplus_{i \in Q_0} V_i \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} W_i$

とおく. Gf は $\text{Mod } KQ$ の morphism となる

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ GV & & GW \end{array}$$

③ $F \circ G \cong \text{id}_{\text{Rep } KQ}$. $G \circ F \cong \text{id}_{\text{Mod } KQ}$ であることが容易に確かめられる $\square$

idempotent に関する基本事項つづき

$i \neq j$
 $e_i e_j = 0$ $e_i^2 = e_i$

A : ring $A \ni 1 = e_1 + \dots + e_n$: orthogonal idempotents

(I2) B : ring $X \in B \text{ Mod } A$, $B \ni 1 = f_1 + \dots + f_m$: ortho. idemp.

$f_j X \in \text{Mod } A$ で, $X = \bigoplus_{j=1}^m f_j X$ in $\text{Mod } A$

$X e_i \in \text{Mod } B$ で, $X = \bigoplus_{i=1}^n X e_i$ in $B \text{ Mod}$,

(I3) $A \in A \text{ Mod } A$ に (I2) を用いると $A = \bigoplus_{j=1}^n e_j A$ in $\text{Mod } A$
よって $e_j A \in \text{proj } A$

さらに $A = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq n} e_j A e_i$ in Ab

$e_j A e_i \cong \text{Hom}_A(e_i A, e_j A)$ in Ab
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $a \mapsto (b \mapsto ab)$

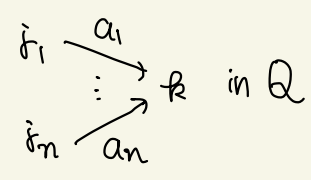
より一般に $X \in \text{Mod } A$ に対し.
 $X e_i \cong \text{Hom}_A(e_i A, X)$ in Ab
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $a \mapsto (b \mapsto ab)$

Ex5 Q : quiver $i \in Q_0$ に対し, $P(i) := e_i KQ \in \text{proj } KQ$

① path $p: i \rightarrow j$ かつ morphism $(P \cdot): P(j) \rightarrow P(i)$ in $\text{Mod } KQ$
 $x \mapsto Px$ が与えられる

② K -vector space $e_i KQ e_j \cong \text{Hom}_{KQ}(P(j), P(i))$ は
 $\{ p \mid i \text{ かつ } j \text{ への path } \}$ を basis に持つ

Def Q : quiver, k : sink of Q



exact seq. $\alpha := \begin{pmatrix} a_1 \cdot \\ \vdots \\ a_n \cdot \end{pmatrix}$

$0 \longrightarrow P(k) \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$

$\parallel$ $\parallel$

$S(k)$ $\bigoplus_{l=1}^n P(i_l) \in \text{proj } KQ$

(*)

により $C \in \text{Mod } KQ$ を定め.

$U := (1 - e_k) KQ \oplus C = (\bigoplus_{i \neq k} e_i KQ) \oplus C \in \text{Mod } KQ$ とおく
 $Q' := \mathcal{U}_k Q$

Thm 6 ① U は tilting KQ -module で $\text{End}_{KQ}(U) \cong KQ'$

② $\exists$ natural iso

$$\sigma_R^+ \circ F_Q \cong F_{Q'} \circ \text{Hom}_{KQ}(U, -)$$

$$\sigma_R^- \circ F_{Q'} \cong F_Q \circ (- \otimes_{KQ'} U)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod } KQ & \xrightleftharpoons[k_Q(U, -)]{- \otimes_{KQ'} U} & \text{Mod } KQ' \\ \downarrow F_Q & & \downarrow F_{Q'} \\ \text{Rep } KQ & \xrightleftharpoons[\sigma_R^+]{\sigma_R^-} & \text{Rep } KQ' \end{array}$$

③ $F_Q : \mathcal{T}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(KQ, R)$
 $F_{Q'} : \mathcal{Y}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}(KQ', R)$ } は equivalences

proof $A := KQ$ とおく

① U が tilting A -module であること

$$\textcircled{T1} \quad 0 \rightarrow \underbrace{P(R)}_{\text{proj } A} \rightarrow \underbrace{\begin{matrix} (1-e_R)A \\ \oplus \\ P \end{matrix}}_U \rightarrow \begin{matrix} (1-e_R)A \\ \oplus \\ C \end{matrix} \rightarrow 0 \quad (*)$$

$$\textcircled{T3} \quad \begin{matrix} (1-e_R)A \\ \oplus \\ P(R) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (1-e_R)A \\ \oplus \\ P \end{matrix} \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (*)$$

A $\text{add } U$

$\textcircled{T2}$ $(1-e_R)A \in \text{proj } A$ なので, $\text{Ext}_A^1((1-e_R)A, -) = 0$

$\therefore \text{Ext}_A^1(C, (1-e_R)A)$ と $\text{Ext}_A^1(C, C)$ が 0 であることを示せばよい。

(*) に $A(-, (1-e_R)A)$ を apply して, 次の exact seq. をうる。

$$\begin{array}{ccccccc} A(P, (1-e_R)A) & \xrightarrow{- \circ \alpha} & A(P(R), (1-e_R)A) & \rightarrow & \text{Ext}_A^1(C, (1-e_R)A) & \rightarrow & \text{Ext}_A^1(P, (1-e_R)A) \\ \parallel \textcircled{I3} & & \parallel \textcircled{I3} & & & & \parallel P \in \text{proj } A \\ \bigoplus_{l=1}^n (1-e_R)A e_{il} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \cdot a_1 \\ \vdots \\ \cdot a_n \end{bmatrix}} & (1-e_R)A e_R & & & & 0 \end{array} \quad (**)$$

これより, $\text{Ext}_A^1(C, (1-e_R)A) = 0$ を示すには, 次を示せば十分。

Claim $(**)$ は K -vector space の iso. である。

⊙ Ex5 ② を用いて. K -vector spaces としての basis を比べると

$$\bigsqcup_{l=1}^n \{ \text{ℓ 以外の点から } \delta_{\ell} \wedge \text{ の path } \} \cong \{ \text{ℓ 以外の点から } \ell \wedge \text{ の path } \}$$
$$(P: i \xrightarrow{\psi} \delta_{\ell}) \mapsto (Pa_{\ell}: i \xrightarrow{\psi} \ell)$$

は全単射なので. (***) は iso.

(*) に $A(-, P) \xrightarrow{\pi_0 -} A(-, C)$ を apply して. 次の exact seq. をうる.

$$\begin{array}{ccccccc} A(P, C) & \xrightarrow{-\circ\alpha} & A(P(\ell), C) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(C, C) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(P, C) \\ \uparrow \pi_0 - & & \uparrow \pi_0 - : \text{epi} & & & & \parallel \begin{smallmatrix} P \in \text{proj } A \\ 0 \end{smallmatrix} \\ A(P, P) & \xrightarrow[\text{epi}]{-\circ\alpha} & A(P(\ell), P) & & \left(\begin{array}{l} \text{by } \pi: \text{epi.} \\ P(\ell) \in \text{proj } A \end{array} \right) & & \end{array}$$

(by (**): epi and $P \in \text{add } (1-e_{\ell})A$)

これより $\text{Ext}_A^1(C, C) = 0$ をうる. 以上より U は tilting A -module

$\text{End}_A(U) \cong KQ'$ であること $U = (1-e_{\ell})A \oplus C$ なので

$$\text{End}_A(U) = \begin{pmatrix} \text{End}_A((1-e_{\ell})A) & A(C, (1-e_{\ell})A) \\ A((1-e_{\ell})A, C) & \text{End}_A(C) \end{pmatrix} \text{ の各成分を計算する}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(左上)} \cong (1-e_{\ell})A(1-e_{\ell}) & \text{(右上)} \cong \text{Ker}(**) \stackrel{\text{Claim}}{=} 0 \\ \text{(左下)} \cong C(1-e_{\ell}) \cong P(1-e_{\ell}) \cong \bigoplus_{l=1}^n e_{f_l} A(1-e_{\ell}) & \end{array}$$

$$\uparrow$$

(Apply $\cdot(1-e_{\ell})$ to (*) and use $P(\ell)(1-e_{\ell}) = e_{\ell}A(1-e_{\ell}) = 0$)

Claim (右下) $\cong K$

⊙ $\forall f \in \text{End}_A(C), \exists g \in \text{End}_A(P), \exists h \in \text{End}_A(P(\ell))$ s.t.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P(\ell) & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \quad (*) \\ & & \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & P(\ell) & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \quad (*) \end{array} \quad \text{is commutative}$$

$\ell: \text{sink} \Rightarrow A(P, P(\ell)) = 0 \Rightarrow g, h$ are unique $\Rightarrow$

$\exists K$ -alg. hom. $\varphi: \text{End}_A(C) \rightarrow \text{End}_A(P(\ell)) = e_{\ell}Ae_{\ell} = K$ given by $\varphi(f) = h$

$A(C, P) = 0$ (by (右上) = 0) より. φ は単射であり. Claim が従う

以上まとめて $\text{End}_A(U) \cong \begin{pmatrix} (1-e_k)A(1-e_k) & 0 \\ \bigoplus_{l=1}^n e_{j_l} A(1-e_k) & K \end{pmatrix}$
 これが KQ' と同型である
 ことが容易に分かる.

↳ { j_k から k 以外の点への path in Q }
 $\cong \{k\text{から } \text{--- in } Q'\}$

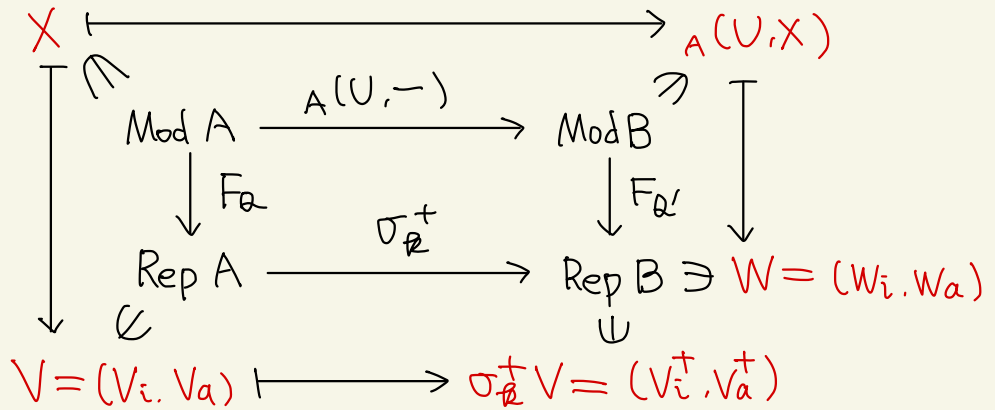
② の証明の概略

$B := KQ'$ とおく

$X \in \text{Mod } A$ に対し.

右のように V, W を定め.

$\sigma_k^+ V \cong W$ を示す



• (*) に $A(-, X)$ を apply して 以下の exact seq. をうる

$$0 \longrightarrow A(C, X) \longrightarrow A(P, X) \longrightarrow A(P|_k, X) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(C, X) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(P, X) \\
\begin{array}{ccccccc}
& & \parallel & \textcircled{I3} & & \parallel & \textcircled{I3} \\
& & \bigoplus_{l=1}^n X e_{j_l} & & X e_k & & 0 \\
& \parallel & & & \parallel & & \\
0 \longrightarrow V_k^+ & \longrightarrow & \bigoplus_{l=1}^n V_{j_l} & \xrightarrow{V|_{-k}} & V_k & &
\end{array}$$

$$\text{これより } V_i^+ = \begin{cases} V_i = X e_i & (i \neq k) \\ A(C, X) & (i = k) \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

• ① より $B = \text{End}_A(U)$ であり. B の idempotent e_i ($i \in Q'_0$) に対し.

$$e_i U = \begin{cases} e_i A & (i \neq k) \\ C & (i = k) \end{cases}$$

$$W_i = A(U, X) e_i = A(e_i U, X) = \begin{cases} A(e_i A, X) = X e_i & (i \neq k) \\ A(C, X) & (i = k) \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

• ① と ② を比較して $\forall i \in Q'_0, V_i^+ \cong W_i$

また $\forall a \in Q'_1, V_a^+$ と W_a が一致することも容易に分かる.

以上より $\sigma_k^+ V \cong W$

$$\textcircled{3} \quad X \in \mathcal{J}(U) \iff \text{Ext}_A^1(C, X) = 0 \iff V|_{-k} : \text{epi.} \iff F_Q X \in \mathcal{J}(A, k) \\
U = (\text{proj}) \oplus C \quad \textcircled{2} \quad \square$$

- Q : quiver

$\text{Rep } KQ \supset \text{rep } KQ := \{ V = (V_i, V_a) \mid \forall i \in Q_0, \dim_K V_i < \infty \}$: full subcat.

$V \in \text{rep } KQ$: indecomposable $\stackrel{\text{def}}{\iff} (V \cong W \oplus X \Rightarrow W = 0 \text{ or } X = 0)$
 (直既約) $W, X \in \text{rep } KQ$

$\text{ind } KQ := \{ V \in \text{rep } KQ \mid \text{indecomposable} \} / \cong$

- 次の事実より. $\text{ind } KQ$ が分かれば, $\text{rep } KQ$ の object も分かる

Prop 7 (Kull-Schmidt Theorem) 直既約分解の一貫性

① $\forall V \in \text{rep } KQ, \exists n \geq 0 \exists X_1 \sim X_n \in \text{ind } KQ \text{ s.t. } V \cong X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$

② $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \cong Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \ (X_i, Y_j \in \text{ind } KQ) \Rightarrow$
 $n = m$ かつ 番号をうまくつけかえて $\forall i, X_i \cong Y_i$

(次章で もう少し 詳しく 扱う)

Thm 8 [Gabriel 1972] Q : quiver K : field

① KQ : representation-finite (有限表現型) (i.e. $\# \text{ind } KQ < \infty$)

$\iff Q$: Dynkin quiver i.e. 以下のグラフの辺を矢におきかえてえられる

$A_n \ (n \geq 1)$ $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$

$D_n \ (n \geq 4)$ $\begin{array}{ccccccc} & & \bullet & & & & \\ & & | & & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet$

$E_n \ (n = 6, 7, 8)$ $\begin{array}{ccccccc} & & & \bullet & & & \\ & & & | & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet$

($n = \#Q_0$)

② Q : Dynkin quiver

$\text{ind } KQ \xleftrightarrow{1-1} \{ \text{positive roots of } Q \} \subset \mathbb{R}^{Q_0}$

$V = (V_i, V_a) \mapsto \underline{\dim} V := (\dim_K V_i)_{i \in Q_0}$ (dimension vector)

Def quiver Q に対し quadratic form $q_Q : \mathbb{R}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$q_Q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{a \in Q_1} x_{s(a)} x_{t(a)} \quad \text{と定める}$$

Q が Dynkin quiver のとき.

$$x \in \mathbb{Z}^{Q_0} \text{ が } Q \text{ の root} \stackrel{\text{def}}{\iff} q_Q(x) = 1$$

さらに $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$ のとき. **positive root**

Ex Q が type A_n なす, $q_Q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$

positive root は $(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, \dots, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0) \quad 1 \leq i \leq j \leq n$

Q	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
$\# \text{ ind } KQ$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	63	120

Thm 8② の証明のポイント • simple representation に reflection functor を

くり返し適用することで. 全ての $\text{ind } KQ$ の元を構成する

• reflection functor による dimension vector の変化は. 以下で記述できる.

Def symmetric bilinear form $(-, -) : \mathbb{R}^{Q_0} \times \mathbb{R}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$(x, y) := \frac{1}{2} (q_Q(x+y) - q_Q(x) - q_Q(y)) \quad \text{と定め.}$$

$\sigma_{\mathbb{R}} \in GL(\mathbb{R}^{Q_0})$: **reflection** を

$$\sigma_{\mathbb{R}}(x) := x - 2(e_{\mathbb{R}}, x)e_{\mathbb{R}} \quad \text{と定める} \quad (e_{\mathbb{R}} := (0, \dots, 0, \overset{\mathbb{R}}{1}, 0, \dots, 0))$$

Key Lem 9 Q : quiver, $\mathbb{R}$: sink $V \in \text{ind } KQ$ に対し

$$\dim \sigma_{\mathbb{R}}^+ V = \begin{cases} \sigma_{\mathbb{R}}(\dim V) & V \not\cong S(\mathbb{R}) \\ 0 & V \cong S(\mathbb{R}) \end{cases}$$

レポート Lem 9 をたしかめよ

additive category の構造に関する基礎理論

• $\mathcal{A}$: additive category $e_i := [X \twoheadrightarrow X_i \hookrightarrow X]$

$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \Rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(X) \ni 1 = e_1 + \cdots + e_n$: orthog. idemp.

Def $X \in \mathcal{A}$: **indecomposable** $\stackrel{\text{def}}{\iff} (X \cong Y \oplus Z \Rightarrow Y = 0 \text{ or } Z = 0)$
 $\iff \text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ は 0 と 1 以外に idempotent を持たない

(講義訂正 $\Rightarrow$ は abelian な S 正しいが, 一般には正しいとは限らない)

Def ring A が **local** $\stackrel{\text{def}}{\iff} A$ has a unique maximal right ideal
 $\iff A$ $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ left $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$
 $\iff$ 非可逆元の全体が ideal をなす

このとき A は 0 と 1 以外に idempotent を持たない. 特に

Fact $X \in \mathcal{A}$, $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$: local $\Rightarrow X$: indecomposable

$\Leftarrow$ は正しくないが, それが成立する状況を考える

Def $\mathcal{A}$: additive category が **Krull-Schmidt (KS)** $\iff \forall X \in \mathcal{A}$
 $\exists X_1 \sim X_n \in \mathcal{A}$ s.t. $X \cong X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ and $\text{End}_{\mathcal{A}}(X_i)$ is local

Thm 1 (Krull-Schmidt Theorem) **直既約分解の一意性**

① $\forall X \in \mathcal{A}$, $\exists n \geq 0 \exists X_1 \sim X_n \in \mathcal{A}$: indecomp. s.t. $X \cong X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$

② $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \cong Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$ ($X_i, Y_j \in \mathcal{A}$: indecomp.) $\Rightarrow$
 $n = m$ かつ番号をうまくつけかえて $\forall i, X_i \cong Y_i$

レポート ② を証明せよ

ヒント iso. を $m \times n$ 行列 $[f_{ij}]$ ($f_{ij} \in \mathcal{A}(X_j, Y_i)$) と表し,
 この行列に掃き出し法を行う

Def additive category $\mathcal{A}$ が **idempotent complete** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X \in \mathcal{A},$

$\forall e \in \text{End}_{\mathcal{A}}(X) : \text{idempotent}$ は kernel (26ページ) を持つ

Rem ① このとき $X \cong \text{Ker } e \oplus \text{Ker } (1-e),$

$e = [X \twoheadrightarrow \text{Ker}(1-e) \hookrightarrow X]$ が成立する

② abelian category は idempotent complete

Def $K : \text{field}$ $\mathcal{A} : K\text{-linear additive category}$

$\mathcal{A} : \text{Hom-finite} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X, Y \in \mathcal{A}, \dim_K \mathcal{A}(X, Y) < \infty$

Prop 2 $\mathcal{A} : K\text{-linear Hom-finite additive category, idempotent complete}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ は Kull-Schmidt category

proof 0 と 1 以外に idempotent を持たない finite dimensional K -algebra は local ring であることからすぐに従う $\square$

Ex $\forall Q : \text{quiver}, \text{rep } KQ$ は Prop 2 の仮定を満たすので Kull-Schmidt

Def $\mathcal{A} : \text{Kull-Schmidt category}, X, Y \in \mathcal{A}$

以下で $\mathcal{A}$ の (Jacobson) **radical** $\text{rad } \mathcal{A} = J$ を定める

- $X, Y : \text{indecomp.}$ のとき. $J(X, Y) := \{ f \in \mathcal{A}(X, Y) \mid f \text{ は iso. ではない} \}$
- 一般のとき. 直既約分解 $X \cong \bigoplus_{i=1}^n X_i, Y \cong \bigoplus_{j=1}^m Y_j$ をとり.

$$\mathcal{A}(X, Y) \cong \left(\mathcal{A}(X_i, Y_j) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

$$J(X, Y) \cong \left(J(X_i, Y_j) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

X, Y の分解によらず, 一意に定まる

Fact J は $\mathcal{A}$ の **ideal**. つまり $\forall X, Y \in \mathcal{A}, J(X, Y)$ は $\mathcal{A}$ の subgroup

$\forall W, Z \in \mathcal{A}, \forall f \in \mathcal{A}(W, X), \forall g \in J(X, Y), \forall h \in \mathcal{A}(Y, Z), h \circ g \circ f \in J(W, Z)$

Rem $\mathcal{A}$: additive cat.

$$\text{rad } \mathcal{A} := (\cap \text{ of max. right ideals}) = (\cap \text{ of max. left ideals})$$

Knull-Schmidt のときは上の Def と一致する

Def $\mathcal{A}$: additive cat. I, I' : $\mathcal{A}$ の ideals

① ideal II' を以下で定める

$$II'(X, Y) = \{ h \circ g \mid Z \in \mathcal{A}, g \in I'(X, Z), h \in I(Z, Y) \}$$

レポート II' が $\mathcal{A}$ の ideal であることを確かめよ

② additive cat. $\mathcal{A}/I$ を以下で定める

- $\text{Ob } \mathcal{A}/I = \text{Ob } \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}/I(X, Y) = \mathcal{A}(X, Y)/I(X, Y)$

Def K : algebraically closed field, $\mathcal{A}$: K -linear KS category st. $\mathcal{A}/J$ is Hom-fin.

$\mathcal{A}$ の Auslander-Reiten (AR) quiver $AR(\mathcal{A})$ を以下で定める

- Vertices: $\text{ind } \mathcal{A} = \{ \text{indecomp. objects in } \mathcal{A} \} / \cong$
- arrows: $\forall X, Y \in \text{ind } \mathcal{A}, X \nless Y \wedge d_{XY} := \dim_K J/J^2(X, Y)$ 本の矢を描く
 $J(X, Y)/J^2(X, Y)$
 一般に $AR(\mathcal{A})$ は infinite quiver

Rem $AR(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の 圏構造 (生成元のうち、最も基本的なもの) を図示する

Ex ① Q : (finite) quiver (path p で $s(p) = t(p)$ なるもの) !!

Assume $\dim_K(KQ) < \infty$ ($\iff Q$ は acyclic i.e. 長さ 1 以上の cycle を持たない)

$\Rightarrow AR(\text{proj } KQ) = Q^{\text{op}}$ $i \in Q_0$ は $P(i) \in \text{ind}(\text{proj } KQ)$ を与え.

$(a: i \rightarrow j) \in Q_1$ は $(\cdot a) \in J(P(j), P(i))$ を与える

② $A = K[[x_1, \dots, x_d]]$: formal power series ring

$$\Rightarrow AR(\text{proj } A) = \left[\begin{array}{c} \overset{x_1}{\curvearrowright} \overset{x_2}{\curvearrowright} \\ \bullet \\ \underset{x_d}{\curvearrowright} \end{array} \right]$$

• $AR(\text{mod } KQ)$ はどうなるか?

定義からすぐに描くことはできない ($J^2(X, Y)$ が求められない)

Def $\mathcal{A} : \text{KS category}$, $f \in \mathcal{A}(X, Y)$

- $f : \text{split epimorphism} \iff \exists g : Y \rightarrow X \text{ s.t. } f \circ g = 1_Y$
- $f : \text{right almost split} \iff f \text{ is not split epi. and } \forall g : Z \rightarrow Y : \text{not split epi. } \exists h : Z \rightarrow X \text{ s.t. } g = fh$
- $f : \text{right minimal} \iff \left[\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \Rightarrow g : \text{iso.} \right]$
- $f : \text{sink morphism (or minimal right almost split) of } Y \iff \text{right almost split} \Rightarrow \text{right minimal}$

双対的に split mono , left almost split , left minimal , source morph. を定める

Fact $f_i \in \mathcal{A}(X_i, Y) : \text{sink morph of } Y \ (i=1,2)$

$$\Rightarrow \exists g : X_1 \cong X_2 : \text{iso. s.t. } f_1 = f_2 g$$

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y \\ g \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

Prop3 $X, Y \in \text{ind } \mathcal{A}$ sink mor. と source mor. が分かれば $\text{AR}(\mathcal{A})$ も分かる

① $f : E \rightarrow Y : \text{sink morph.} \Rightarrow d_{X,Y} = (E \text{ の直既約分解に表れる } X \text{ の個数})$

② $g : X \rightarrow F : \text{source} \implies d_{X,Y} = (F \text{ から } Y \text{ への射の数})$

proof f は split epi. でないので $f \in J(E, Y)$ であり. $\forall Z \in \mathcal{A}$ に対し

$$0 \rightarrow J(Z, E) \rightarrow \mathcal{A}(Z, E) \rightarrow \mathcal{A}/J(Z, E) \rightarrow 0 : \text{exact}$$

$$\downarrow f \circ - \quad \downarrow f \circ - \quad \downarrow f \circ -$$

$$0 \rightarrow J^2(Z, Y) \rightarrow J(Z, Y) \rightarrow J/J^2(Z, Y) \rightarrow 0 : \text{exact}$$

レポート $f : E \rightarrow Y$ が "right minimal" のとき. $g : Z \rightarrow E$ に対し
($f \circ g = 0 \Rightarrow g \in J(Z, E)$) を示せ

これからすぐに $\mathcal{A}/J(Z, E) \cong J/J^2(Z, Y)$ が従う.

$E \cong X^{\oplus n} \oplus E'$ (E' は X を直和因子にもたない) とおくと,

$$d_{X,Y} = \dim_K J/J^2(X, Y) = \dim_K \mathcal{A}/J(X, E) = \dim_K \mathcal{A}/J(X, X^{\oplus n}) = n$$

$$\mathcal{A}(X, E') = J(X, E') \uparrow \quad \text{End}_{\mathcal{A}/J}(X) = K \uparrow \quad \square$$

- K : field, A : finite dimensional K -algebra

Ex Q : acyclic quiver に対し. $A = KQ$

$\text{Mod } A \supset \text{mod } A$: finitely generated A -modules

Fact ① $\text{mod } A = \{X \in \text{Mod } A \mid \dim_K X < \infty\}$

② $\text{mod } A$ は K -linear Hom-fin. Krull-Schmidt (by Prop 2)

目標 $\forall X \in \text{ind } A$ ($:= \text{ind}(\text{mod } A)$) は sink morph & source morph を持つ

- I : **injective** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \text{ mono. } f: X \rightarrow Y, \forall \text{ morph. } g: X \rightarrow I$
 $\exists \text{ morph. } h: Y \rightarrow I \text{ s.t. } g = hf$

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ g \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow h \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

- $\text{mod } A \supset \text{proj } A$: finitely generated projective A -modules
 $\supset \text{inj } A$: _____ injective A -modules

Fact 4 $D = \text{Hom}_K(-, K) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}} (= A\text{-mod})$
 $\left. \begin{array}{ccc} \cup & \cup & \\ \text{proj } A & \rightarrow & \text{inj } A^{\text{op}} \\ \text{inj } A & \rightarrow & \text{proj } A^{\text{op}} \end{array} \right\} \text{ dual equivalences}$

- $X \in \text{Mod } A$, $\text{rad } X := \bigcap Y \subset X$
 Y : maximal submodule of X
 $\text{soc } X := \sum Y \subset X$
 Y : simple submodule of X

Prop 5 A : finite dim. K -algebra

- ① $P \in \text{ind}(\text{proj } A) \Rightarrow \text{rad } P$ は P の maximal submodule で
 $\text{rad } P \hookrightarrow P$ は P の sink morphism in $\text{mod } A$
- ② $I \in \text{ind}(\text{inj } A) \Rightarrow \text{soc } I$ は I の simple submodule で
 $I \twoheadrightarrow I/\text{soc } I$ は I の source morphism in $\text{mod } A$

proof ② は ① の dual なので ① のみ示す

前半 $P \supset X \neq Y$ がともに max. submodules of P とすると. $X + Y = P$

$X \oplus Y \twoheadrightarrow P$ は epi. となり. P は projective なので split epi.
 $(x, y) \mapsto x + y$

$\dim_K X, \dim_K Y < \dim_K P$ より一意分解性 (Thm 1) に反す.

後半 split epi. でない $\forall g: Z \twoheadrightarrow P$ をとる. P は projective なので

g は epi. でない. $\text{Im } g \subsetneq P$ より 前半 より $\text{Im } g \subset \text{rad } P$

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \text{red } \checkmark \searrow & & \searrow g \\ \text{red } \text{rad } P & \hookrightarrow & P \end{array}$$

以上より $\text{rad } P \hookrightarrow P$ は right almost split mono なので 明らかに right minimal $\square$

Ex K : field, $A = \begin{bmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \cong KQ$ for $Q = [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3]$

• $A \ni e_1, e_2, e_3$: idempotent に対し. $P(i) = e_i A$ とおく.

$$\text{ind}(\text{proj } A) = \{ P(1) = [KKK], P(2) = [0KK], P(3) = [00K] \}$$

これらの sink morph. は Prop 5 より

$$P(2) \hookrightarrow P(1), \quad P(3) \hookrightarrow P(2), \quad 0 \hookrightarrow P(3)$$

• $\text{ind}(\text{proj } A^{\text{op}}) = \left\{ \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Ae_1, \begin{bmatrix} K \\ K \\ 0 \end{bmatrix} = Ae_2, \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \end{bmatrix} = Ae_3 \right\}$ で. Fact 4 より

$$\text{ind}(\text{inj } A) = \{ D(Ae_1) = [K00], D(Ae_2) = [KK0], D(Ae_3) = [KKK] = P(3) \}$$

これらの source morph. は Prop 5 より

$$[K00] \twoheadrightarrow 0, \quad [KK0] \twoheadrightarrow [K00], \quad [KKK] \twoheadrightarrow [KK0]$$

• $DA = \text{Hom}_K(A, K) \in A \text{ Mod } A$ を用いて次の functor をうる

$$\begin{array}{ccc} \text{Prop 6} & & \\ \text{proj } A & \xrightleftharpoons[\text{red } \checkmark]{\text{red } \checkmark} & \text{inj } A \quad \text{は equivalences} \\ & \text{red } \checkmark := \text{Hom}_A(DA, -) & \end{array}$$

V を Nakayama functor とよぶ

proof $V(A) = DA \in \text{inj } A$. $\bar{V}(DA) = \text{End}_A(DA) = \text{End}_{A^{\text{op}}}(A)^{\text{op}} = A$ Fact 4

お) V と $\bar{V}$ は well-defined

$$\alpha: \text{id}_{\text{proj } A} \cong \bar{V} \circ V \text{ が } \alpha_P: P \rightarrow A(DA, P \otimes_A DA)$$

$$p \mapsto (x \mapsto p \otimes x)$$

$\beta: V \circ V^{-} \cong \text{id}_{\text{inj} A}$ が $\beta_I: A(DA, I) \otimes_A DA \rightarrow I$ で与えられる $\square$
 $f \otimes x \mapsto f(x)$

Def $X \in \text{mod} A$ に対し, exact sequence

$\underbrace{P_1 \xrightarrow{f} P_0}_{\text{proj } A} \xrightarrow{e} X \rightarrow 0$ で e と f が right minimal なものを, X の **minimal projective presentation** とよぶ. これは必ず存在し (P42 レポートを使う),

(iso. による違いを除いて) 一意であることが容易に分かる.

このとき, exact sequence

$0 \rightarrow \tau X \rightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0$ (*) により $\tau X \in \text{mod} A$ を定める.

双対的に minimal injective copresentation $0 \rightarrow X \rightarrow \underbrace{I^0 \xrightarrow{f} I^1}_{\text{inj } A}$ を用いて

exact sequence $\bar{\nu} I_0 \xrightarrow{\bar{\nu} f} \bar{\nu} I_1 \rightarrow \tau X \rightarrow 0$ により $\tau X \in \text{mod} A$ を定める

τ を **Auslander-Reiten (AR) translation** とよぶ

Ex ① $P \in \text{proj } A$ の min. proj. present. は $0 \rightarrow P \xrightarrow{1} P \rightarrow 0$ なので, $\tau P = 0$

② 同様に $I \in \text{inj } A$ に対し, $\tau I = 0$

Ex K : field, $A = \begin{bmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \cong KQ$ for $Q = [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3]$

• $\tau[K00]$ を求める.

$0 \rightarrow \underbrace{[0KK]}_{e_2 A} \xrightarrow{f} \underbrace{[KKK]}_{e_1 A} \rightarrow [K00] \rightarrow 0$ が min. proj. present.

一般に idempotent $e \in A$ に対し, $\nu(eA) = D(Ae)$

これを用いると

$\nu(e_2 A)$	$\nu(e_1 A)$
$\parallel$	$\parallel$
$D(Ae_2)$	$D(Ae_1)$
$\parallel$	$\parallel$

$0 \rightarrow [0K0] \xrightarrow{\nu(f)} [KK0] \rightarrow [K00]$ は exact なので.

$\tau[K00] = [0K0]$ を得る.

• 同様にして $\tau[0K0] = [00K]$, $\tau[KK0] = [0KK]$ が分かる.

Thm 7 τ と $\bar{\tau}$ は

① bijection $\{X \in \text{ind} A \mid \text{non-proj.}\} \xrightleftharpoons[\tau]{\tau} \{X \in \text{ind} A \mid \text{non-inj.}\}$ を与える
 $\tau \circ \tau = \text{id}$, $\tau \circ \bar{\tau} = \text{id}$

② equivalences $\underline{\text{mod}} A \xrightleftharpoons[\tau]{\tau} \overline{\text{mod}} A$ を与える.

$$\bar{\tau} \circ \tau \cong \text{id}_{\underline{\text{mod}} A}, \quad \tau \circ \bar{\tau} \cong \text{id}_{\overline{\text{mod}} A}$$

ただし $\underline{\text{mod}} A$ と $\overline{\text{mod}} A$ は以下で定める

Def ① $\text{mod} A$ の ideal $\mathcal{P}$ を. $\forall X, Y \in \text{mod} A$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ f & \searrow \scriptstyle \mathcal{P} & \nearrow \scriptstyle \mathcal{P} \\ & P & \end{array}$$

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{g \circ f \mid P \in \text{proj} A, f \in \text{Hom}_A(X, P), g \in \text{Hom}_A(P, Y)\}$$

$\mathcal{I}(X, Y)$ $\text{inj} A$ と定める

② $\underline{\text{mod}} A := (\text{mod} A) / \mathcal{P}$: stable category

$\overline{\text{mod}} A := (\text{mod} A) / \mathcal{I}$: costable category

proof of Thm 7 ① $X \in \text{ind} A$ が "non-projective" なら. exact seq. (*)

が τX の min. injective copresentation であることより従う

② は [ASS, Cor IV.2.11] 参照 $\square$

Thm 8 [Auslander-Reiten 1975] K : field. A : fin. dim. K -algebra

① $\forall X \in \text{ind} A : \text{non-proj.}$ $\exists$ exact seq. $0 \rightarrow \tau X \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$
 s.t. f is a sink morph. of X , g is a source morph. of τX

② $\forall X \in \text{ind} A : \text{non-inj.}$ $\exists$ exact seq. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} \bar{\tau} X \rightarrow 0$
 s.t. f' is a source morph. of X , g' is a sink morph. of τX

①② の exact seq. を AR sequence or almost split sequence とよぶ

Thm 8 の証明のポイント 以下の2つを用いる

• 一般に $\text{Ext}_A^1(X, Y) \cong \{ \text{exact seq. } 0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0 \} / \text{iso.}$ (**)

Thm 9 K, A : as in Thm 8

$\forall X, Y \in \text{mod } A$, $\exists$ natural isomorphism (called **AR duality**)

$$\underline{\text{Hom}}_A(\tau Y, X) \cong D \text{Ext}_A^1(X, Y) \cong \overline{\text{Hom}}_A(Y, \tau X)$$

where $\underline{\text{Hom}}_A$ (resp. $\overline{\text{Hom}}_A$) is a morphism space in $\underline{\text{mod}} A$ (resp. $\overline{\text{mod}} A$)

簡単のため K が algebraically closed とする.

non-proj. な $X \in \text{ind } A$ に対し. Thm 9 より $\text{Ext}_A^1(X, \tau X) \cong D \underline{\text{End}}_A(X)$ で

ある. ここで自然な epi. $\underline{\text{End}}_A(X) \rightarrow \text{End}_A(X)/J(X, X) \cong K$ を

$D \underline{\text{End}}_A(X)$ の元と見て. 対応する $\text{Ext}_A^1(X, \tau X)$ の元は (**) により exact seq.

$$0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0 \text{ を与える.}$$

これが AR sequence であることが確かめられる.

詳細は [ASS, Thm IV.3.1] 参照 $\square$

レポート Thm 9 または (Thm 9 $\Rightarrow$ Thm 8) を示せ

Ex (p44, p45 の Ex の続き) K : field. $A = \begin{bmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \cong KQ$ for $Q = [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3]$

- $X = [K00]$ に対し $\tau X = [0K0]$ だった

p45 の min. proj. pres. を用いて. $\dim_K \text{Ext}_A^1(X, \tau X) = 1$ が分かる

これより 任意の non-split な exact seq. $0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$ は AR seq. となる

例えば $0 \rightarrow [0K0] \xrightarrow{g} [KK0] \xrightarrow{f} [K00] \rightarrow 0$ は AR seq.

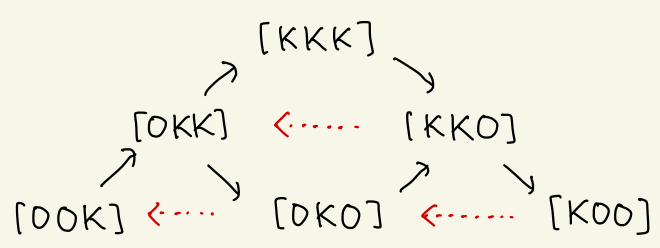
(g, f は自然な morph : $g(0 \otimes 0) = (0 \otimes 0)$, $f(x \otimes 0) = (x00)$)

- 同様に $0 \rightarrow [00K] \rightarrow [0KK] \rightarrow [0K0] \rightarrow 0$
 $0 \rightarrow [0KK] \rightarrow \begin{bmatrix} KKK \\ \oplus \\ 0K0 \end{bmatrix} \rightarrow [KK0] \rightarrow 0$ } も AR seq.

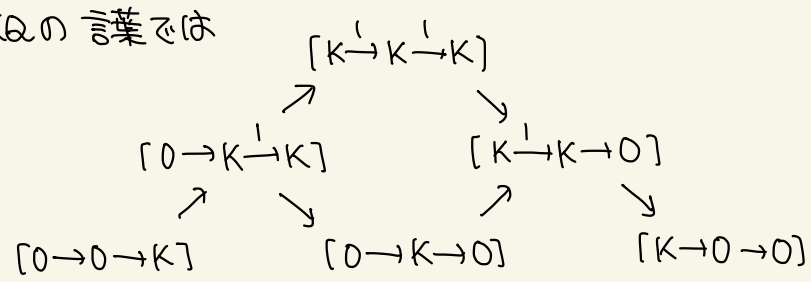
- 例えば Gabriel's Theorem (§7. Thm 8) を用いることで

$$\text{ind } A = \left\{ \begin{array}{ccc} & [KKK] & \\ [0KK] & & [KK0] \\ [00K] & [0K0] & [K00] \end{array} \right\} \text{ が分かる}$$

- 以上の計算で, sink morph. と source morph. は全て求められている
特に, Prop3 より $AR(A)$ は 以下のようになる ($\leftarrow \dots$ は τ を表す)

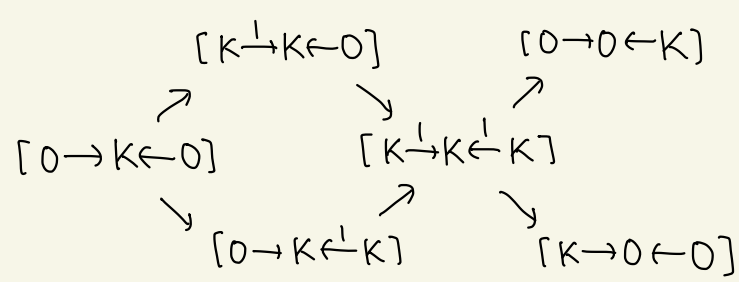


rep KQ の言葉では

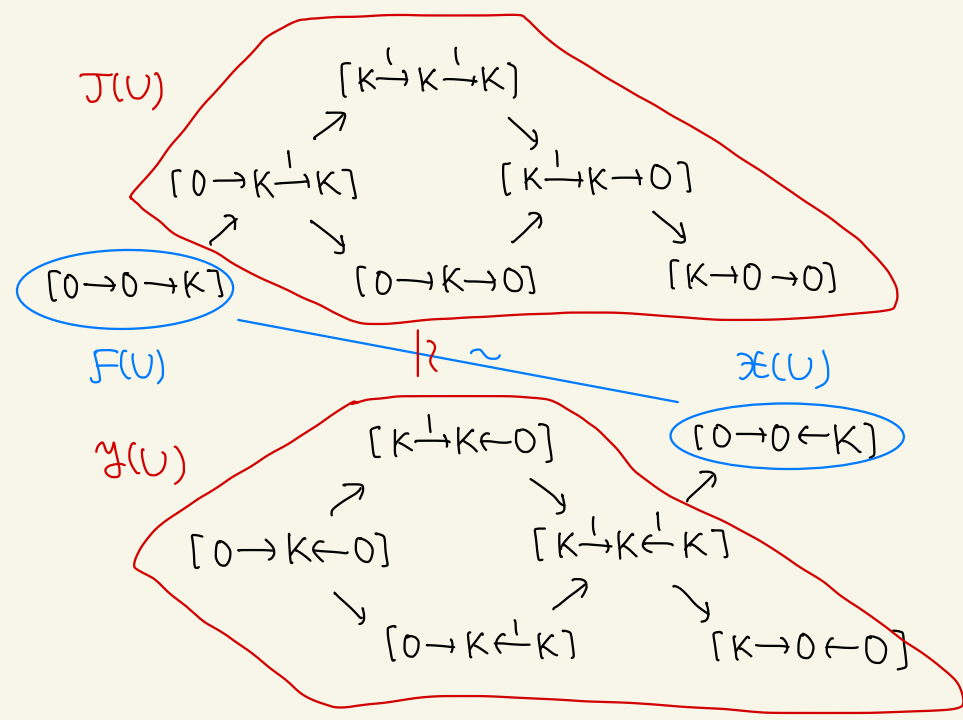


Ex 上の Q に対し $Q' := \sigma_3 Q = [1 \rightarrow 2 \leftarrow 3]$ とおく

- $AR(KQ')$ は



- Brenner - Butler の equivalences は 以下のようになる



$\mathcal{A}$: abelian category, $\mathcal{A} \supset \mathcal{E}$: full subcategory

Assume $\mathcal{E}$ is **extension-closed** i.e.

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 : \text{exact sequence in } \mathcal{A} \Rightarrow Y \in \mathcal{E}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & \cap & & \cap & & \\ & & \mathcal{E} & & \mathcal{E} & & \end{array}$$

$$\mathcal{S} := \left\{ 0 \rightarrow \underbrace{X \rightarrow Y \rightarrow Z}_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 : \text{exact seq. in } \mathcal{A} \right\}$$

以上の $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ の公理化

Def [Quillen 73, Keller 90]

$\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \mathcal{S})$ が **exact category** (**完全圏**) $\iff$

- $\mathcal{E}$ は additive category

- $\mathcal{S}$ は $\mathcal{E}$ の列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z \rightarrow 0$ で

$i = \ker d$, $d = \operatorname{cok} i$ をみたすもの (の一部) からなる

($\mathcal{S}$ の元を **conflation**, i を **inflation**, d を **deflation** とよぶ)

- 以下が満たされる.

(Ex0) $\mathcal{S}$ は同型で閉じる.

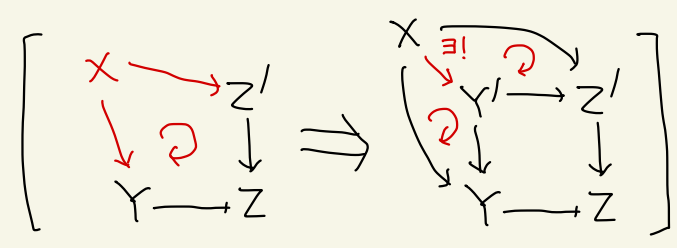
$$\bullet \forall X, Y \in \mathcal{E}, [0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} Y \rightarrow 0] \in \mathcal{S}$$

(Ex1) deflations の合成は deflation

(Ex1)^{op} inflations $\longrightarrow$ inflation

(Ex2) $\forall f: Z' \rightarrow Z \quad \forall \text{ deflation } d: Y \rightarrow Z$

$\exists$ pullback $\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\ f' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array}$ s.t. $d': \text{deflation}$



$(\text{Ex2})^{\text{op}}$ (Ex2) の dual

Ex 最初の $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ は exact category

とくに $(\mathcal{A}: \text{abelian cat.}, \{ \text{all short exact seq.} \})$ は exact cat.

Rem [Keller] $\forall$ essentially small (= obj. の同型類が集合をなす) exact cat. はこのようにして得られる

Def $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \mathcal{S})$: exact category

① $Z \in \mathcal{E}$: projective $\iff \forall [0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \rightarrow 0] \in \mathcal{S}$
は split exact ($\stackrel{\text{def}}{\iff} p: \text{split epi} \iff i: \text{split mono.}$)

② $\mathcal{E}$ has enough projective objects $\iff \forall Z \in \mathcal{E}$

$\exists [0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0] \in \mathcal{S}$ s.t. Y : projective

• 双対的に injective, enough injective objects を定める

Def exact category $\mathcal{E}$ が Frobenius category $\iff$

① $\mathcal{E}$ has enough proj. obj. and enough inj. obj.

② $X \in \mathcal{E}$ is projective $\iff$ injective

Ex $\mathcal{E}$: additive category, $\mathcal{S} = \{ \text{all split exact seq.} \}$
は Frobenius category

Ex K : field A : finite dimensional K -algebra

$$A : \text{self-injective} \stackrel{\text{def}}{\iff} A \text{ is injective } A\text{-module} \\ \iff A \text{ is injective } A^{\text{op}}\text{-module}$$

このとき $(\text{mod } A, \{\text{all short exact seq.}\})$ は Frobenius category

Def $\mathcal{E}$: exact cat. with enough proj. obj.

- $\mathcal{E}$ の ideal $\mathcal{P}$ を以下で定める: $\forall X, Y \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{g \circ f \mid P \in \mathcal{E} : \text{proj. } f \in \mathcal{E}(X, P), g \in \mathcal{E}(P, Y)\} \text{ と定める}$$

$$\underline{\mathcal{E}} := \mathcal{E} / \mathcal{P} : \text{stable category (安定圏)}$$

(これは §8 の $\text{mod } A$ の一般化)

- $\Omega : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}} : \text{syzygy functor}$

$$\forall X \in \mathcal{E}, \text{ fix a conflation } \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega X & \xrightarrow{\text{proj.}} & P_X & \rightarrow & X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \Omega f & & \downarrow & & \downarrow f \\ f \downarrow & & 0 & \rightarrow & \Omega Y & \xrightarrow{\text{proj.}} & P_Y \rightarrow Y \rightarrow 0 \\ Y \in \mathcal{E} & & & & & & \end{array}$$

Ωf is uniquely determined in $\underline{\mathcal{E}}$

Prop 1 Ω gives a well-defined functor $\underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}$

Def $\mathcal{E}$: exact cat. with enough inj. obj. に対し. 双対的に

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\mathcal{E}} : \text{costable category} \\ \Sigma : \overline{\mathcal{E}} \rightarrow \overline{\mathcal{E}} : \text{cosyzygy functor} \end{array} \right\} \text{ を定める}$$

$$0 \rightarrow X \rightarrow I_X^{\text{inj.}} \rightarrow \Sigma X \rightarrow 0$$

Prop 2 $\mathcal{E}$: Frobenius category $(\Rightarrow \underline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}})$

$\Omega : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}$ は equivalence 也. Σ が quasi-inverse

§10 Triangulated category

Def $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, [\Sigma], \Delta)$ が triangulated category (三角圏) $\iff$

- $\mathcal{T}$: additive category
- $[\Sigma]: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ は equivalence (shift) (suspension functor とよぶ)
- Δ は $\mathcal{T}$ の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[\Sigma]$ のクラスで. 以下を満たす (Δ の元を triangle とよぶ)

(TR1) Δ は 同型で 閉じる

$$\forall X \in \mathcal{T}, [X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[\Sigma]] \in \Delta$$

$$\forall f \in \mathcal{T}(X, Y) \exists [X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[\Sigma]] \in \Delta$$

$\parallel$
cone f (iso. を除いて unique)

(TR2) $[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[\Sigma]] \in \Delta$

$$\Rightarrow [Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[\Sigma] \xrightarrow{-f[\Sigma]} Y[\Sigma]] \in \Delta$$

(TR3) $[X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[\Sigma]] \in \Delta$

$$a \downarrow \quad b \downarrow \quad \exists \downarrow \quad a[\Sigma] \downarrow$$

$$[X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[\Sigma]] \in \Delta$$

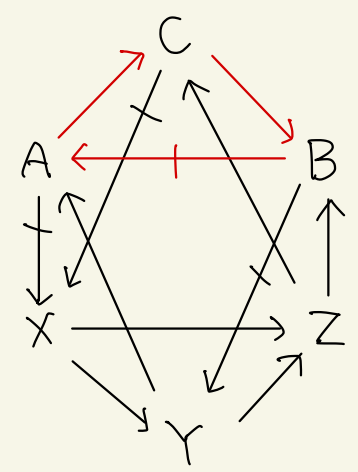
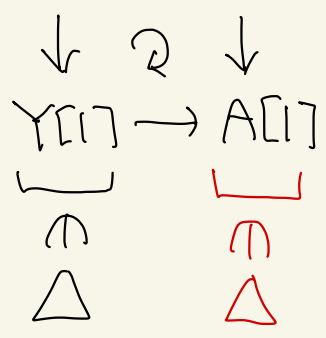
(TR4) $[X \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow X[\Sigma]] \in \Delta$

$$\parallel \downarrow \quad \exists \downarrow \quad \parallel$$

$$[X \rightarrow Z \rightarrow C \rightarrow X[\Sigma]] \in \Delta$$

$$\downarrow \quad \exists \downarrow \quad \downarrow$$

$$B \cong B \rightarrow Y[\Sigma]$$



Thm 1 [Happel 88] $\mathcal{E} : \text{Frobenius cat.}$ $\Sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} : \text{cosyzgy}$
 $\Rightarrow (\mathcal{E}, \Sigma, \triangle) : \text{triangulated cat.}$

Δ の定め方 $\forall f \in \mathcal{E}(X, Y)$

conflation
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\text{injective}} & I_X & \longrightarrow & \Sigma X \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & \text{PO} \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma X \longrightarrow 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{PO} = \text{pushout} \\ := (\text{pull back})^{\text{op}} \end{array} \right)$$

by $(\text{Ex 2})^{\text{op}}$

$\mathcal{E}$ の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ と同型なもの全体を Δ とする

Def このようにして得られる triang. cat. を **algebraic** とよぶ

Ex K : field, A : finite dimensional selfinjective K -alg
 $\Rightarrow \text{mod } A$ is an algebraic triangulated cat.

Ex $\mathcal{A}$: additive category

$C[\mathcal{A}]$: the category of chain complexes

obj: $\mathcal{A}$ の列 $X = [\dots \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \dots]$ s.t. $d^{i+1} d^i = 0$

morph: $\mathcal{A}$ の commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} X & & \dots & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \dots \\ & \downarrow f & & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ Y & & \dots & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \xrightarrow{d_Y^{i+1}} \dots \end{array}$$

Prop 2 $\mathcal{A}$: additive cat. $\Rightarrow (C[\mathcal{A}], \mathcal{S})$ は Frobenius category

$\mathcal{S} := \{ 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0 \mid \forall i. 0 \rightarrow X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i \rightarrow 0 \text{ is split exact seq. } \}$

Def $\mathcal{A}$: additive cat.

$K[\mathcal{A}] := \underline{C[\mathcal{A}]}$: homotopy category

Rem 上の X , f に対し

$$X[i] := \left[\dots \xrightarrow{-d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{-d_X^{i+1}} X^{i+2} \xrightarrow{-d_X^{i+2}} \dots \right]$$

$$\text{cone } f := \left[\dots \xrightarrow{\quad} Y^i \oplus X^{i+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Y^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix}} Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \xrightarrow{\quad} \right] \text{ とおく}$$

とおく.

① $\forall X \in C[\mathcal{A}], \text{ cone } 1_X \in C[\mathcal{A}]$ は projective かつ injective

② $f \in C[\mathcal{A}](X, Y)$ が $\underline{C[\mathcal{A}]}$ で 0 $\iff$ null-homotopic

③ $\left[0 \rightarrow Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \text{cone } f \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} X[i] \rightarrow 0 \right] \in \mathcal{S}$

$$\left[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \text{cone } f \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} X[i] \right] \in \Delta$$

①, ③ より, $[1]$ と $\text{cone } f$ が, P52 の Def にあるものと一致することになる

レポート Rem ①~③ のいずれかをたしかめよ

Def $(\mathcal{T}, [1], \Delta), (\mathcal{T}', [1]', \Delta') : \text{triang. cat.}$

• A **triangle functor** is a pair (F, α) of an additive functor

$F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ and an isomorphism $\alpha: F \circ [1] \xrightarrow{\sim} [1]' \circ F$ of functors

s.t.

$$[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[i]] \in \Delta \implies [FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \xrightarrow{\alpha_Z Fh} (FX)[i]'] \in \Delta'$$

• さらに F が equivalence のとき, (F, α) を **triangle equivalence** とよぶ

Ex $(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{G}})$: Frobenius cat. $\underline{\mathcal{E}} \supset \mathcal{P}$: the cat. of projective obj.

$$C[\mathcal{P}] \supset \textcolor{red}{Ca}[\mathcal{P}] := \left\{ \dots \rightarrow p^{i-1} \rightarrow p^i \rightarrow p^{i+1} \rightarrow \dots \right\}$$

Prop 3 $Ca[\mathcal{P}]$ も Frobenius category

$\textcolor{red}{Ka}[\mathcal{P}] := \underline{Ca}[\mathcal{P}]$ とおく.

$\exists$ triangle equivalence $Ka[\mathcal{P}] \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{E}}$
 $(p^i, d^i) \mapsto x^0$

Rem $Ca[\mathcal{P}]$ は "dg category" の構造を持ち.

$$H^0(Ca[\mathcal{P}]_{dg}) = Ka[\mathcal{P}]$$

特に. triang. cat. が algebraic $\iff$ dg enhancement を持つ

R : commutative ring

Def ① (A, d) is a differential graded (dg) R -algebra $\iff$

- $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ is a $\mathbb{Z}$ -graded R -algebra ($A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$)
- $\left[\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots \right] \in C[\text{Mod } R]$
- (Leibniz rule) $d(ab) = d(a)b + (-1)^i a d(b)$ ($a \in A^i, b \in A$)

Ex $\mathcal{A}$: add. cat. $\forall X \in C[\mathcal{A}]$ gives a dg end. alg. $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$

② (X, d) is a dg A -module $\iff$

- $X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X^i$ is a $\mathbb{Z}$ -graded A -module ($X^i \cdot A^j \subset X^{i+j}$)
- $\left[\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots \right] \in C[\text{Mod } R]$
- (Leibniz rule) $d(ab) = d(a)b + (-1)^i a d(b)$ ($a \in X^i, b \in A$)

Ex A 自身は dg A -module

③ A morphism $f: X \rightarrow Y$ of dg A -modules is a morphism of $\mathbb{Z}$ -graded A -modules (= morph. in $\text{Mod } A$ s.t. $\forall i \in \mathbb{Z}, f(X^i) \subset Y^i$) s.t. $f d_X = d_Y f$

$C(A)$: the category of dg A -modules

Ex $A = A^0 \implies C(A) = C[\text{Mod } A]$

Prop 1 A : dg algebra $\implies (C(A), \exists \mathcal{S})$ is a Frobenius cat.

$\mathcal{S} := \{ 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 \mid \mathbb{Z}\text{-graded } A\text{-module の } \text{図式} \text{ で split exact} \}$

$K(A) := \underline{C(A)}$: homotopy category of A

Ex $A = A^0 \Rightarrow K(A) = K[\text{Mod } A]$

Def $X = (X, d) \in C(A)$, $i \in \mathbb{Z}$ に対し $H^i(X) := \frac{\text{Ker } d^i}{\text{Im } d^{i-1}} \in \text{Mod } k$

$$X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1}$$

Lem 2 $\forall$ triangle $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ in $K(A)$, $\exists$ exact seq

$$\cdots \rightarrow H^i(X) \rightarrow H^i(Y) \rightarrow H^i(Z) \rightarrow H^{i+1}(X) \rightarrow H^{i+1}(Y) \rightarrow H^{i+1}(Z) \rightarrow \cdots$$

Def $\mathcal{T}$: triang. cat. $\mathcal{T} \supset \mathcal{U}$: full subcat.

$\mathcal{U}$: thick subcategory $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- $\mathcal{U}[\pm 1] \subset \mathcal{U}$
- $\underbrace{[X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]]}_{\mathcal{U}} \in \Delta \Rightarrow \underbrace{Z}_{\mathcal{U}}$
- direct summand で閉じる

Ex A : dg algebra

$Ka(A) := \{ X \in K(A) \mid X: \text{acyclic} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i \in \mathbb{Z}, H^i(X) = 0 \}$

は thick subcat. of $K(A)$ (by Lem 2)

Def $\mathcal{T} \supset \mathcal{U}$: thick subcat. に対し, Verdier quotient $\mathcal{T}/\mathcal{U}$ を定める

- obj. は $\mathcal{T}$ と同じ
- $(\mathcal{T}/\mathcal{U})(X, Y) := \{ [X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y] \mid Z \in \mathcal{T}, \text{ cone } S \in \mathcal{U} \} / \sim$

$(f, s) \sim (f', s') \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ commu. diag

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & f \nearrow & & \nwarrow s & \\ X & & & & Y \\ & f' \searrow & & \swarrow s' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

$\begin{array}{c} \downarrow \\ Z'' \\ \uparrow \end{array}$

$\begin{array}{c} \leftarrow s'' \\ \leftarrow s' \end{array}$

s.t.
cone $S'' \in \mathcal{U}$

Prop 3 $\mathcal{T}/\mathcal{U}$ は canonical な triangulated cat. の構造を持ち,

さらに canonical な functor $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{U}$ は triangle functor になる

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \\ f &\mapsto (f, 1) \end{aligned}$$

Rem $\mathcal{T}$ の morph. f で $\text{cone } f \in \mathcal{U}$ であるものは, $\mathcal{T}/\mathcal{U}$ で iso. になる (58)

Def A : dg algebra 導来圏

$D(A) := K(A) / K_a(A)$: derived category of A

Rem $f \in C(A)(X, Y)$ が quasi-isomorphism

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} H^i(f): H^i(X) \xrightarrow{\sim} H^i(Y) \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \stackrel{\text{Lem 2}}{\iff} \text{cone } f \in K_a(A)$$

- $\forall$ quasi-isomorphism は, $D(A)$ で iso. になる.

Def $D(A) \supset \text{per } A := \text{thick}_{D(A)} A$ ($:= A$ を含む $D(A)$ の最小の thick subcat.)

Ex $A = A^0 \Rightarrow \text{per } A \simeq K^b[\text{proj } A] :=$
 $\{ X \in K[\text{proj } A] \mid \text{有限個の } i \text{ を除いて } X^i = 0 \}$

Rem ring A に対する $\text{Mod } A \supset \text{proj } A$ の
derived category 版が $D(A) \supset \text{per } A$

- $D(A)$ の morphism の計算や, $D(A)$ 間の functor の構成のためには, projective resolution, injective resolution が必要

Def $K_p(A) := \{ X \in K(A) \mid K(A)(X, K_a(A)) = 0 \}$ K -projective

$K_i(A) := \{ \text{ } \text{ } (K_a(A), X) \text{ } \text{ } \}$ K -injective

Thm 4 [Keller] 標準的な functors $K_p(A) \subset K(A) \xrightarrow{i} D(A)$ の
合成により triangle equiv. $K_p(A) \xrightarrow{\sim} D(A)$ をうる
 $K_i(A) \xrightarrow{\sim} D(A)$

Rem $(K_p(A), K_a(A))$ および $(K_a(A), K_i(A))$ は $K(A)$ の torsion pair
(§6 の torsion pair の三角圏類似)

Derived functors A, B, C : dg R -algebras $\otimes := \otimes_R$

$A \otimes B^{\text{op}}$ は自然に dg alg の構造を持つ

$X \in C(A \otimes B^{\text{op}}), Y \in C(A \otimes C^{\text{op}}), Z \in C(B \otimes C^{\text{op}})$

右から A , 左から B が作用

自然に $\text{Hom}_A(X, Y) \in C(B \otimes C^{\text{op}})$. $Z \otimes_B X \in C(A \otimes C^{\text{op}})$ となる

特に $C = \mathbb{R}$ として $\text{Hom}_A(X, -) : C(A) \rightarrow C(B)$ は
 $\text{Hom}_A(X, -) : K(A) \rightarrow K(B)$ を induce

Caution しかし一般に $K_A(A) \rightarrow K_A(B)$ を induce しない ので
functor $D(A) \rightarrow D(B)$ を定めるには、次のようにする必要がある

Def $X \in C(A \otimes B^{\text{op}})$

$\text{RHom}_A(X, -) := \left[D(A) \xrightarrow[\text{Thm 4}]{\text{Hom}_A(X, -)} K(A) \rightarrow K(B) \rightarrow D(B) \right]$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} - \overset{L}{\otimes}_B X : D(B) &\rightarrow D(A) \\ \text{RHom}_A(-, X) : D(A) &\rightarrow D(B^{\text{op}}) \end{aligned} \right\} \text{を } (D(A) \simeq K_B(A) \text{ を用いて}) \text{ 定める}$$

- $f : A \rightarrow B$: dg algebras の **morphism** $\overset{\text{def}}{\iff}$ f は $C(\mathbb{R})$ の morphism で、かつ 環準同型 **quasi-iso.**

このとき $B \in C(A \otimes B^{\text{op}})$ とみなされる

Prop 5 $f : A \rightarrow B$: dg alg. の quasi-iso.

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} D(B) &\overset{- \overset{L}{\otimes}_B B}{\xleftarrow{\quad}} D(A) \\ &\xrightarrow{\text{RHom}_A(B, -)} \\ \text{per } B &\overset{- \overset{L}{\otimes}_B B}{\xleftarrow{\quad}} \text{per } A \\ &\xrightarrow{\text{RHom}_A(B, -)} \end{aligned} \right\} \text{は triangle equivalences}$$

§12 Tilting object

Def $\mathcal{T}$: triangulated category

$\mathcal{T} \ni U$: **tilting object**

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \textcircled{1} \mathcal{T}(U, U[i]) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \textcircled{2} \mathcal{T} = \text{thick}_{\mathcal{T}} U \quad (:= U \text{ を含む } \mathcal{T} \text{ の最小の thick sub.}) \end{cases}$$

Ex A : ring $\text{per } A$ の tilting object を A の **tilting complex** とよぶ

① $A = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{\circ}{A} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots] \in \text{per } A$ は A の tilting complex

② $\forall$ tilting A -module U (§6) は A の tilting complex
($\forall X, Y \in \text{Mod } A, \text{Ext}_A^i(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X, Y[i])$)

レポート Ex ① or ② をたしなめよ

Rem $\mathcal{T}$ が $\mathcal{D}(A)$ などの大きな (= coproduct を持つ per) triang. cat. の場合は、 U が compact (per) であることを課し、②を $\mathcal{T} = \text{Loc}_{\mathcal{T}} U$ ($:= U$ を含み coproduct 閉じた最小の thick subcat.) に置き換える。

• 森田の定理 (§4) の derived category 版

Thm 1 [Rickard 89] ring A, B に対し、以下は同値

① $\exists$ triangle equivalence $\mathcal{D}(A) \simeq \mathcal{D}(B)$

② $\exists$ ————— $\text{per } A \simeq \text{per } B$

③ $\exists$ tilting complex U of A s.t. $\text{End}_{\mathcal{D}(A)}(U)$ と B は環同型

このとき A と B は **derived equivalent** (導来同値) であるという

森田の定理

① $\iff \text{Mod } A \simeq \text{Mod } B$

② $\iff \text{proj } A \simeq \text{proj } B$

③ $\iff \exists$ progenerator P of A s.t. $\text{End}_A(P)$ と B は環同型

証明は森田の定理とパラレル

Sketch ① $\Rightarrow$ ② 次を用いる (§5)

$D(A)$ は coproduct を持ち, $X \in D(A)$ に対し
 $X \in \text{per} A \iff X : \text{compact in } D(A)$

② $\Rightarrow$ ③ 明らか $\begin{array}{ccc} \text{per} A & \simeq & \text{per} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longleftarrow & B \end{array}$

③ $\Rightarrow$ ① §11 Thm 4 より $U \in K_p(A)$ としてよい

dg $\mathbb{Z}$ -algebra $E := \text{End}_A(U)$ を考えると $U \in C(A \otimes_{\mathbb{Z}} E^{\text{op}})$ であり. 以下が equivalence であることが分かる.

$$D(E) \xrightleftharpoons[\text{RHom}_A(U, -)]{\sim \bigotimes_E U} D(A) \quad (*)$$

(注 この部分は, tilting object の条件② $\text{per} A = \text{thick } U$ のみで OK, A も全く一般の dg algebra で OK)

$$\text{ここで } H^i(E) = \text{Hom}_{D(A)}(U, U[i]) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ \text{End}_{D(A)}(U) \cong B & i = 0 \end{cases}$$

↑
tilting obj の条件①

なので, dg algebra E' と dg algebras の quasi-isomorphisms

$E' \hookrightarrow E$ と $E' \twoheadrightarrow B$ が以下で定まる.

$$\begin{array}{ccccccc} E & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \longrightarrow & \cdots \\ U & & & \parallel & & U & & \uparrow & & \\ E' & \cdots & \longrightarrow & E^{-1} & \longrightarrow & \text{Ker } d^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B & & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^0(E) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

以上より. $D(A) \simeq D(E) \xrightarrow{(*)} D(E') \simeq D(B)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\S 11 \text{ Prop 5}$ □

Rem 2 (1) ③の U が $U \in C(A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}})$ ならば 森田の定理と同様に 以下が 直接 equivalence を与える.

$$\begin{array}{ccc} D(B) & \xrightleftharpoons[\text{RHom}_A(U, -)]{\sim \otimes_B^L U} & D(A) \quad (*) \\ \text{per } B & \xrightleftharpoons[\text{RHom}_A(U, -)]{\sim \otimes_B^L U} & \text{per } A \end{array}$$

(2) しかし一般に, $X \in C(A)$ と $B := \text{End}_{\text{D}(A)}(X)$ に対し,

$X \in C(A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}})$ とみることはいできない ($\mathcal{L} C(A)$ なら OK)

(そのため ③ $\Rightarrow$ ① の証明は少し長くなっている)

(3) U が §6 の tilting module の場合, $U \in C(A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\text{op}})$ なので, triangle equivalence (*) を与える

Brenner-Butler の equivalences (§6 Thm 7) は (*) の制限

$$\begin{array}{ccc} D(B) & \xrightleftharpoons[\text{RHom}_A(U, -)]{\sim \otimes_B^L U} & D(A) \\ \cup & & \cup \\ \text{Mod } B & & \text{Mod } A \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{K}(U) & \xrightleftharpoons[\text{Hom}_A(U, -)]{\sim \otimes_B U} & \mathcal{K}(U) \\ & & \text{Hom}_A(U, -) \\ \mathcal{K}(U) [-1] & \xrightleftharpoons[\text{Ext}_A^1(U, -) [-1]]{\text{Tor}_1^B(-, U) [-1]} & F(U) \end{array}$$

Cor 3 [Happel 88] $k: \text{field}$

① $Q: \text{quiver}$, $i \in Q_0: \text{sink or source}$, $Q' = \sigma_i Q$
 $\Rightarrow RQ \simeq RQ'$ は derived equivalent

② $T: \text{tree}$, $Q, Q': T$ の辺を矢におきかえてえられる quiver
 $\Rightarrow RQ \simeq RQ'$ は derived equivalent

proof ① §7 Thm 6 より $\exists U: \text{tilting } RQ\text{-module st. } \text{End}_{RQ}(U) \cong RQ'$

Rickard's Thm より主張が従う

② T は tree なので, Q に sink での mutation をくり返して Q' が得られる

①より主張が従う $\square$

• Thm 1 より 一般に, 以下が成立する. 証明はほぼ同じ.

Thm 4 [Keller] $\mathcal{T}: \text{triang. cat.}$ に対し 以下は同値

① $\exists A: \text{ring} \quad \exists \text{ triang. equiv. } \mathcal{T} \simeq \text{per } A$

② $\mathcal{T}$ は algebraic, idempotent complete で tilting obj. を持つ

§13 Auslander-Reiten theory in triangulated category

(64)

以下. $\mathcal{T}$: triangulated category, $\mathbb{k}$: field

Assume $\mathcal{T}$ is $\mathbb{k}$ -linear, Hom-finite, idempotent complete

$\Rightarrow \mathcal{T}$ is Krull-Schmidt (§8. Prop 2)

Def $\mathcal{T}$ の Serre functor とは. equivalence $S: \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ で

$\forall X, Y \in \mathcal{T}, \exists$ natural isomorphism

$$\mathcal{T}(X, Y) \cong D \mathcal{T}(Y, SX) \quad D = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(-, \mathbb{k})$$

Thm 1 [Happel 88, Reiten-Van den Bergh 02] $\mathcal{T}, S$: as above

$$\textcircled{1} \forall X \in \text{ind } \mathcal{T}, \exists \text{ triangle } SX[-1] \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} X \rightarrow SX$$

s.t. f is a sink morph. of X , g is a source morph. of $SX[-1]$

$$\textcircled{2} \forall X \in \text{ind } \mathcal{T}, \exists \text{ triangle } X \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} S^{-1}X[1] \rightarrow X[1]$$

s.t. f' is a source morph. of X , g' is a sink morph. of $S^{-1}X[1]$

• $\textcircled{1} \textcircled{2}$ の triangle を AR triangle or almost split triangle とよむ.

このとき $\mathcal{T}$ は AR triangles を持つという

Rem $\textcircled{1}$ これは §8 Thm 8 の 三角圏類似

$\tau: \text{mod } A \simeq \overline{\text{mod } A}$ が $S[-1]: \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ に対応する.

$\textcircled{2}$ $\exists$ 共通の一般化 [I-Nakaoka-Palu, arXiv 1805.03766]

proof $\textcircled{1} \forall X \in \text{ind } \mathcal{T}$

$$D \text{End}_{\mathcal{T}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X, SX) \quad J := \text{rad } \mathcal{T}$$

$$D(\text{End}_{\mathcal{T}}(X)/J(X, X)) \ni \varphi \mapsto h$$

$$(\text{TR}(1, 2) \text{ より}) \exists \text{ triangle } SX[-1] \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} SX$$

① f は X の sink morphism

⊙ triangle の一般的性質より 次は exact

$$\mathcal{T}(-, SX[-1]) \xrightarrow{g_0-} \mathcal{T}(-, E) \xrightarrow{f_0-} \mathcal{T}(-, X) \xrightarrow{h_0-} \mathcal{T}(-, SX)$$

- f が right almost split を示すには, $\forall$ split epi でない $a: Z \rightarrow X$, $ha = 0$ を示せば良い.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}(X, Z) & & 0 \in D \mathcal{T}(X, Z) & \simeq & \mathcal{T}(Z, SX) \ni 0 \\ a_0- \downarrow & \searrow & \uparrow D(a_0-) \uparrow & \ni & \uparrow -oa \uparrow \\ \mathcal{T}(X, X) \supset J & & \varphi \in D \mathcal{T}(X, X) & \simeq & \mathcal{T}(X, SX) \ni h \end{array}$$

- f が right minimal であることも. $SX[-1] \in \text{ind } \mathcal{T}$ より $g \in J(SX[-1], E)$ となることから 容易に分かる

② g は $Z := SX[-1]$ の source morphism

□

⊙ split mono でない $\forall a \in \mathcal{T}(Z, W)$ に対し, (TR4) を用いて

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & Z[1] \\ a \downarrow & & b \downarrow & & \parallel & & \downarrow a[1] \\ W & \xrightarrow{g'} & F & \xrightarrow{f'} & X & \longrightarrow & W[1] \end{array} \quad : \text{ triangle}$$

$\xleftarrow{c}$

- g' が split mono なら, $\exists c$ s.t. $cg' = 1_W$ すると $a = cbg$
 - g' が split mono でないときは, f' は split epi. ではない
- ①より f は right almost spl. なので $\exists b', \exists a'$ s.t

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{g'} & F & \xrightarrow{f'} & X & \longrightarrow & W[1] \\ a' \downarrow & & b' \downarrow & & \parallel & & \downarrow a'[1] \\ Z & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & X[1] \end{array} \quad \text{は可換図式}$$

$f = f b' b$ かつ f は right min. より $b' b$ は iso.
 triangle の一般的性質 (5 Lemma) より $a' a$ も iso.
 これは a のとり方に反する $\square$

• 以下. $\mathbb{K}$: field, A : fin. dim. $\mathbb{K}$ -algebra とする

Def ① $D(A) \supset \overset{\text{thick}}{D^b(A)} := \{ X \in D(A) \mid \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{K}} H^i(X) < \infty \}$

② $X \in \text{Mod } A$

projective resolution ($n = \infty$ も含む)

$$\text{proj. dim } X_A := \inf \left\{ n \geq 0 \mid \exists 0 \rightarrow \underbrace{P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0}_{\text{projective}} \rightarrow X \rightarrow 0 \right\}$$

exact seq. in Mod A

大域次元

$$\text{gl. dim } A := \sup \{ \text{proj. dim } X_A \mid X \in \text{Mod } A \}$$

Rem ① $D^b(A)$ is $\mathbb{K}$ -linear, Hom-finite, idempotent complete
 triangulated category 特に Kull-Schmidt

$$\textcircled{2} D^b(A) \supset \text{per } A \simeq K^b[\text{proj } A]$$

$$\textcircled{3} \text{gl. dim } A < \infty \Rightarrow D^b(A) = \text{per } A$$

Thm 2 $\mathbb{K}$: field, A : fin. dim. $\mathbb{K}$ -algebra Assume $\text{gl. dim } A < \infty$

① $\nu := - \bigotimes_A^L DA : D^b(A) \rightarrow D^b(A)$ gives a Serre functor
 (derived) Nakayama functor

② $D^b(A)$ has AR triangles

Rem これは 次の事実の derived category 版

$$\nu = - \bigotimes_A DA : \text{proj } A \xrightarrow{\sim} \text{inj } A \quad (\S 8 \text{ Prop 6}) \text{ に対し}$$

$\forall P, Q \in \text{proj } A, \exists$ natural isomorphism

$$\text{Hom}_A(P, Q) \cong D \text{Hom}_A(Q, \nu P)$$

この加群圏 $\mathcal{A}$ の拡張 (= Thm 2 ① の加群圏類似) が §8 Thm 9 の AR duality

proof of Thm 2 ① $\forall X, Y \in D^b(A) = \text{per } A$

$$\begin{aligned} D R \text{Hom}_A(X, Y \overset{L}{\otimes}_A D A) &\cong D(Y \overset{L}{\otimes}_A R \text{Hom}_A(X, D A)) \\ &\cong D(Y \overset{L}{\otimes}_A D X) \cong R \text{Hom}_A(Y, \underbrace{D D X}_X) \end{aligned}$$

Taking H^0 , we obtain $D \text{Hom}_{D(A)}(X, {}^v Y) \simeq \text{Hom}_{D(A)}(Y, X)$

② Immediate from ① and Thm 1 $\square$

Def $A^e := A \overset{\otimes}{\underset{\mathbb{R}}{A}} A^{\text{op}}$: enveloping algebra

$$A^e\text{-module} = \left(M \in A \text{Mod } A \text{ st. } \forall m \in M, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha m = m \alpha \right)$$

Lem 3 $\text{gl. dim } A \leq \text{proj. dim } A_{A^e}$

proof $l := \text{RHS}$ Take a projective resolution of $A \in \text{Mod } A^e$

$$0 \rightarrow P_l \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$\forall X \in \text{Mod } A, \quad 0 \rightarrow X \otimes_A P_l \rightarrow \cdots \rightarrow X \otimes_A P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

gives a projective resolution of $X \in \text{Mod } A$ $\square$

Def $S : \mathbb{R}\text{-alg.}$ $M \in \text{Mod } S^e$ に $\hat{X} + L$.

$$T_S(M) := \bigoplus_{i \geq 0} M^i, \quad M^i := \underbrace{M \otimes_S \cdots \otimes_S M}_i \quad (M^0 = S, M^1 = M)$$

tensor algebra

$$\left(\begin{array}{l} x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \in M^i, \quad y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_j \in M^j \\ xy := x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_j \in M^{i+j} \end{array} \right)$$

Def Q : quiver kQ : path algebra of Q

- $kQ \supset \begin{matrix} kQ_0 \\ kQ_1 \end{matrix}$: subspace with basis $\{e_i \mid i \in Q_0\}$
- kQ_0 is a sub k -algebra of kQ . $kQ_0 \cong k^{\pi Q_0}$
- kQ_1 is a sub $(kQ_0)^e$ -module of kQ

Prop 4 k : field, Q : quiver

① $\exists$ 環同型 $kQ \cong T_{kQ_0}(kQ_1)$

② $\text{gl. dim } kQ = \text{proj. dim } (kQ)_{(kQ_0)^e} = \begin{cases} 1 & Q_1 \neq \emptyset \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
i.e. kQ is **hereditary**

③ $D^b(kQ)$ は Serre functor と AR triangles を持つ

proof レポート ① をたしかめよ

② 一般に, tensor algebra $T = T_S(M)$ に対して

$$0 \longrightarrow T \underset{S}{\otimes} M \underset{S}{\otimes} T \longrightarrow T \underset{S}{\otimes} T \longrightarrow T \longrightarrow 0 : \text{exact in } \text{Mod } T^e \quad (*)$$

$$\cup \quad x \otimes y \mapsto xy$$

$$x \otimes y \otimes z \mapsto xy \otimes z - x \otimes yz$$

$T = kQ$ のときは $S = k^{\pi Q_0}$ なので

$T \underset{S}{\otimes} M \underset{S}{\otimes} T, T \underset{S}{\otimes} T \in \text{proj } T^e$ となり, $(*)$ が $T \in \text{Mod } T^e$ の

proj. resolution を与え, $\text{gl. dim } T \underset{\text{Lem 3}}{\leq} \text{proj. dim } T_{T^e} \leq 1$

③ Thm 2 と ② より 従う $\square$

Prop 5 k : field, Q : acyclic quiver, $A := kQ$ ($\Rightarrow \dim_k A < \infty$)

$$\begin{array}{ccc} \exists \text{ bijection} & \text{ind}(\text{mod } A) \times \mathbb{Z} & \cong \text{ind } D^b(A) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & (X, i) & \longmapsto X[i] \end{array}$$

proof 全射性のみ示せばよい.

$D^b(A) \simeq \text{per } A \simeq k^b[\text{proj } A]$ なので,

$\forall X \in \text{ind } k^b[\text{proj } A]$ に対し, $H^i(X) \neq 0$ となる i は 1つしかない (*)

ことを示せばよいが, これは容易に確かめられる $\square$

レポート (*) を確かめよ

Def quiver Q から, 新しい quiver $\mathbb{Z}Q$ を以下で定める

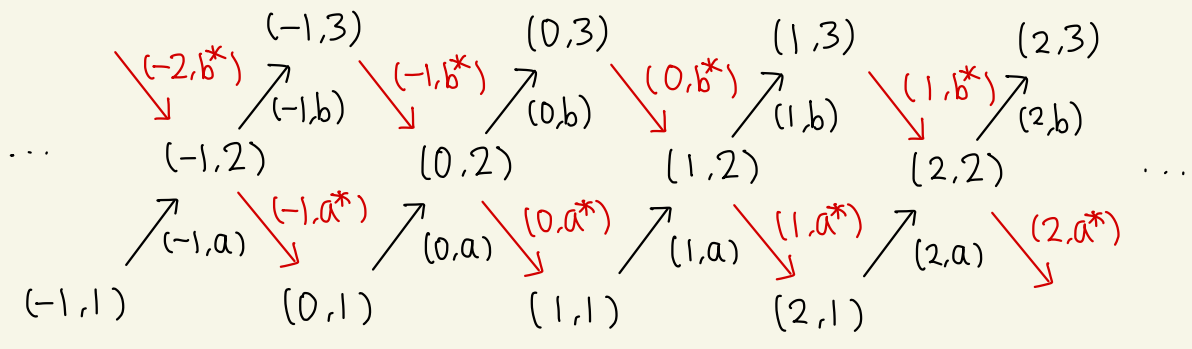
点: $(\mathbb{Z}Q)_0 = \mathbb{Z} \times Q_0$

矢: $l \in \mathbb{Z}, a \in Q_1$ から 2つの矢

$$(l, a) : (l, s(a)) \rightarrow (l, t(a))$$

$$(l, a^*) : (l, t(a)) \rightarrow (l+1, s(a))$$

Ex $Q = [1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3]$ に対し, $\mathbb{Z}Q$ は 以下

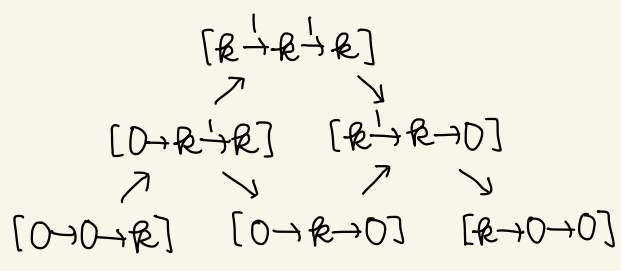


Thm 6 [Happel 88] Q : Dynkin quiver
 $D^b(kQ)$ の AR quiver は $\mathbb{Z}Q^{op}$

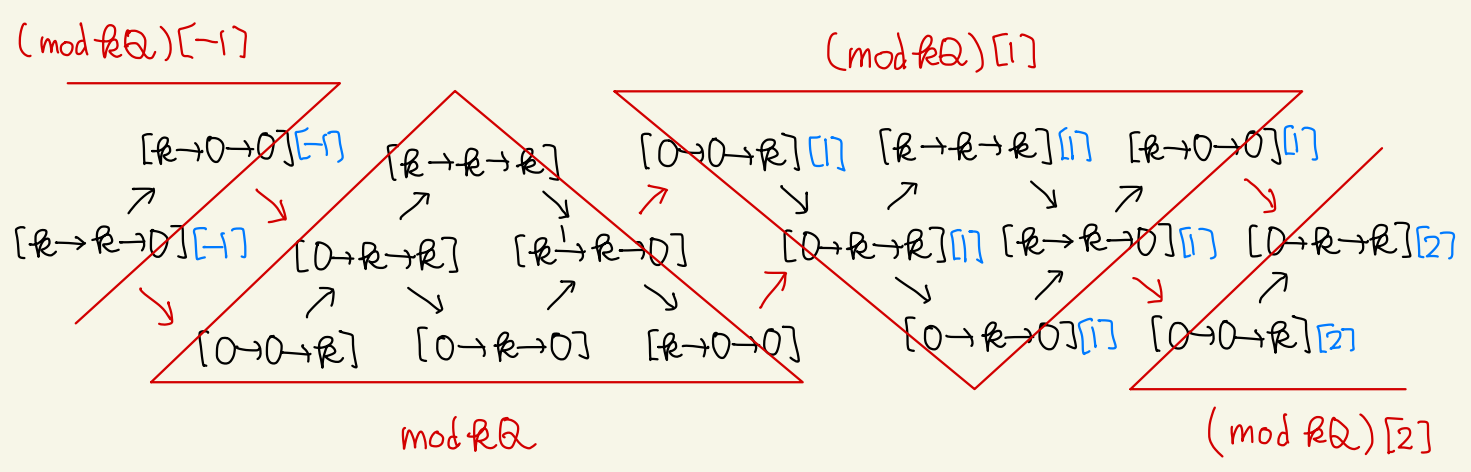
さらに $D^b(RQ)$ の AR quiver は. $\text{mod } RQ$ の AR quiver の $\mathbb{Z}$ 個のコピーを貼り合わせてえられる

Ex $Q = [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3]$

- $\text{mod } RQ$ の AR quiver

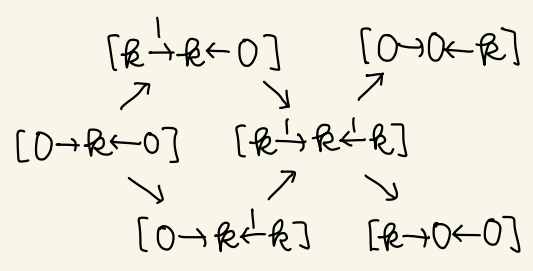


- $D^b(RQ)$ の AR quiver

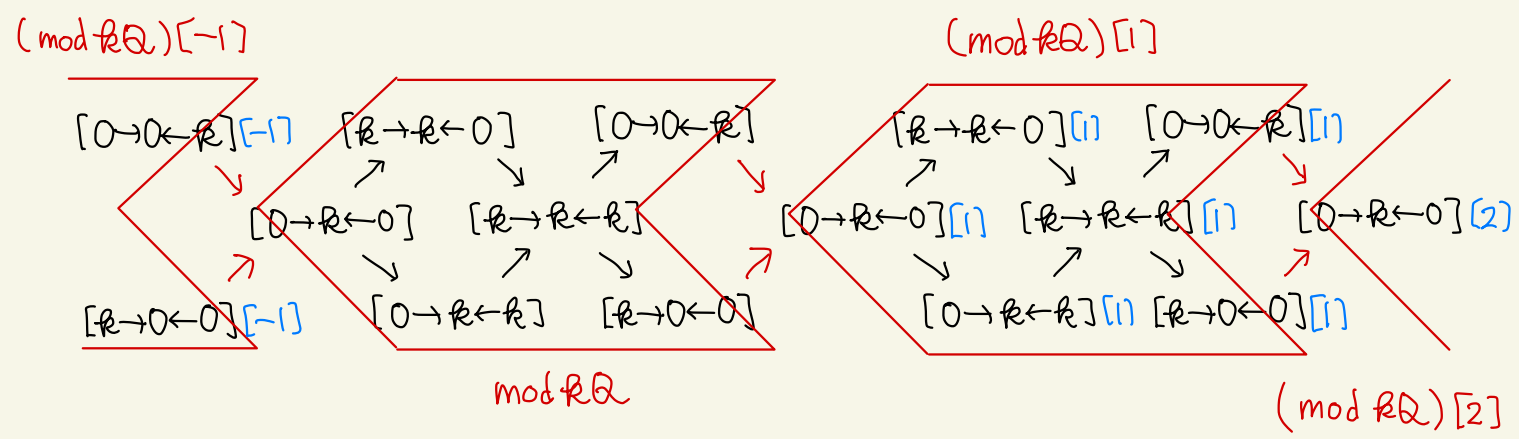


Ex $Q' = [1 \rightarrow 2 \leftarrow 3]$

- $\text{mod } RQ'$ の AR quiver



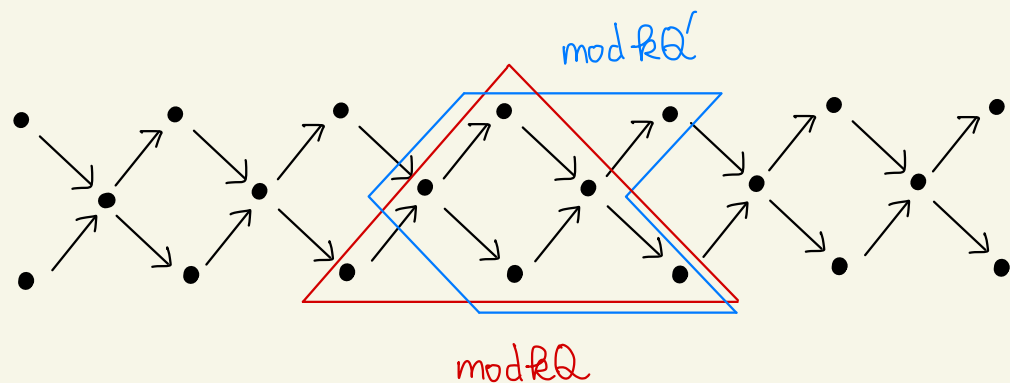
- $D^b(RQ)$ の AR quiver



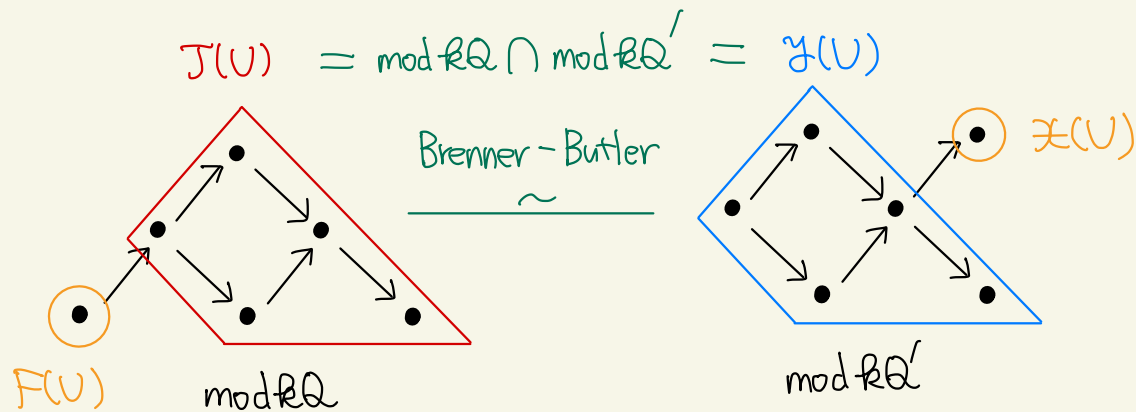
Rem 7 ① 上の $D^b(RQ)$ と $D^b(RQ')$ の AR quiver は同型だが. これは

$D^b(RQ) \simeq D^b(RQ')$ であること (§12 Cor 3) を反映している

② $D^b(RQ) \simeq D^b(RQ')$ であることは, 「1つの三角圏の中に. 2つの加群圏 $\text{mod } RQ$ と $\text{mod } RQ'$ が共存している」と解釈できる.



③ すると Brenner-Butler の圏同値は, $J(U) = \text{mod } RQ \cap \text{mod } RQ' = \mathcal{Y}(U)$ と解釈できる



同様に $F(U) = \text{mod } RQ \cap (\text{mod } RQ'[-1]) = \mathcal{Y}(U)[-1]$ である

④ ①に関連して、以下が成立することは直接的に確かめられる。

Fact 8 ① Q : quiver, $i \in Q_0$: sink or source, $Q' = \mu_i Q$
 $\Rightarrow \mathbb{Z}Q \cong \mathbb{Z}Q'$

② T : tree, Q, Q' : T の辺を矢におきかえてえられる quiver
 $\Rightarrow \mathbb{Z}Q \cong \mathbb{Z}Q'$

Def $\mathcal{T}$: Knull-Schmidt category

① $X \in \mathcal{T}$ の直既約分解 $X \cong Y_1^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus Y_\ell^{\oplus n_\ell}$

($Y_i \in \text{ind } \mathcal{T}$, $Y_i \not\cong Y_j$ ($\forall i \neq j$), $n_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) をとる

• $|X| := \ell = (X \text{ の非同型な直既約直和因子の個数})$

• X : basic $\stackrel{\text{def}}{\iff} n_1 = n_2 = \dots = n_\ell$

② $\mathcal{T}$ が triangulated category のとき.

$\text{tilt } \mathcal{T} := \{ \text{basic tilting objects in } \mathcal{T} \} / \cong_{\text{iso.}}$

③ k : 体, A : finite dimensional k -algebra

⑦②

$$\text{tilt } A := \text{tilt}(\text{per } A) = \text{tilt } k^b[\text{proj } A]$$

Prop 9 $\mathcal{T}$: Krull-Schmidt triang. category, $U, V \in \mathcal{T}$
 $\Rightarrow |U| = |V|$

次節でより一般の事実を説明する

Def k : field, Q : quiver (finite とは限らない)

Q の path category $P_k(Q)$ を以下で定める

- $\text{Ob } P_k(Q)$ は Q_0 を basis にもつ free abelian monoid
- $\forall x, y \in Q_0$, $P_k(Q)(x, y)$ は $\{x \text{ から } y \text{ への paths}\}$ を basis にもつ k -vector space とし. morph. の合成は path をつなげるごとく定める.
- $X = x_1 + \dots + x_n$, $Y = y_1 + \dots + y_m \in \text{Ob } P_k(Q)$ ($x_i, y_j \in Q_0$)
 に対しては. $P_k(Q)(X, Y) := \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} P_k(Q)(x_i, y_j)$

これを $m \times n$ 行列 $\begin{pmatrix} P_k(Q)(x_1, y_1) & \dots & P_k(Q)(x_n, y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_k(Q)(x_1, y_m) & \dots & P_k(Q)(x_n, y_m) \end{pmatrix}$ とみなし.

morphism の合成は行列の積で定める

Rem • $(a: x \rightarrow y), (b: y \rightarrow z) \in Q_1$ の合成は $b \circ a = (ab: x \rightarrow z)$

• Q が finite acyclic quiver なら. $P_k(Q) \simeq kQ \text{ proj}$

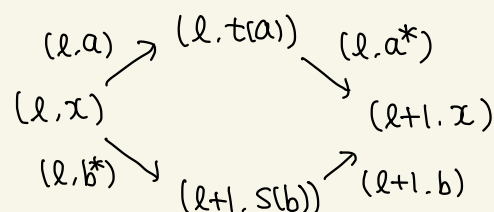
$$x_1 + \dots + x_n \mapsto \bigoplus_{i=1}^n kQ e_{x_i}$$

Def k : field, Q : quiver, $P_k(\mathbb{Z}Q)$: $\mathbb{Z}Q$ の path category

• $(l, x) \in (\mathbb{Z}Q)_0$ に対し

$$\gamma_{l, x} := \sum_{\substack{a \in Q_1 \\ s(a) = x}} (l, a^*) \circ (l, a) - \sum_{\substack{b \in Q_1 \\ t(b) = x}} (l+1, b) \circ (l, b^*) \in P_k(\mathbb{Z}Q)((l, x), (l+1, x))$$

と定める (mesh relation)



- $\{\gamma_{l,x} \mid (l,x) \in (\mathbb{Z}Q)_0\}$ で生成される $P_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q)$ の ideal を I とし.

$\mathbb{Z}Q$ の mesh category を

$$M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q) := P_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q) / I \quad \text{と定める.}$$

- isomorphism $\tau: M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q) \rightarrow M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q)$ を $l \in \mathbb{Z}, x \in Q_0, a \in Q_1$ に対し

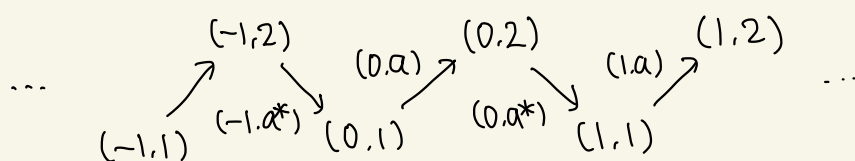
$$\tau(l, x) := \tau(l-1, x)$$

$$\tau(l, a) := \tau(l-1, a), \quad \tau(l, a^*) = (l-1, a^*) \quad \text{と定める}$$

Ex ① $Q = [\bullet]$

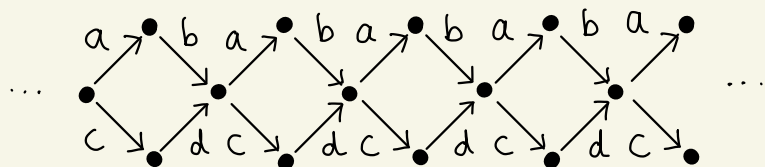
$$M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q) = P_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q) \quad \cdots \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

② $Q = [1 \xrightarrow{a} 2]$



mesh relation は、全 $\mathbb{Z}$ の長 ± 2 の path

③ Q : type A_3 , $\mathbb{Z}Q$ を以下で表す



mesh relation は $a \circ b = 0$
 $b \circ a = d \circ c$
 $c \circ d = 0$

Def $\mathbb{K}$: field, Q : acyclic quiver,

$\nu = -\bigoplus_{\mathbb{K}Q} D(\mathbb{K}Q): D^b(\mathbb{K}Q) \rightarrow D^b(\mathbb{K}Q)$: (derived) Nakayama functor

$\tau := \nu \circ [-1]: D^b(\mathbb{K}Q) \rightarrow D^b(\mathbb{K}Q)$ を (derived) Auslander-Reiten translation とよぶ

- Dynkin quiver の derived category の quiver 表示

Thm 10 [Happel 88] $\mathbb{K}$: field, Q : Dynkin quiver

① $\exists$ equivalence $F: M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q^{op}) \simeq D^b(\mathbb{K}Q)$

② $\exists$ natural isomorphism $\tau \circ F \cong F \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q^{op}) & \xrightarrow{F} & D^b(\mathbb{K}Q) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ M_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}Q^{op}) & \xrightarrow{F} & D^b(\mathbb{K}Q) \end{array}$$

Rem F は以下のような functor

$$F(l, x) = \tau^{-l}(e_x RQ)$$

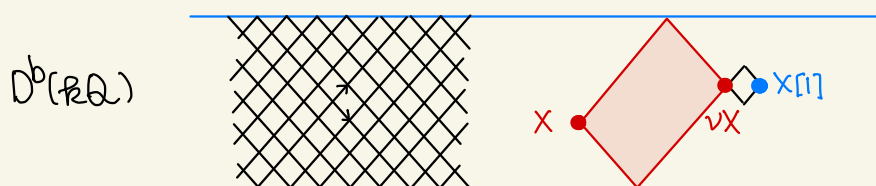
$$(a: x \rightarrow y) \in Q_1^{\text{op}} \text{ に対し } F(l, a) = \tau^{-l}(e_x RQ \xrightarrow{a} e_y RQ)$$

• Thm 10 から $D^b(RQ)$ の様々な情報が得られる

ここでは簡単のため A_n 型の時のみ扱う

Prop 11 R : field, Q : quiver of type A_n , $X \in \text{ind } D^b(RQ)$

① $\{Y \in \text{ind } D^b(RQ) \mid \text{Hom}_{D^b(RQ)}(X, Y) \neq 0\}$ は下図の赤い範囲 (境界含む)



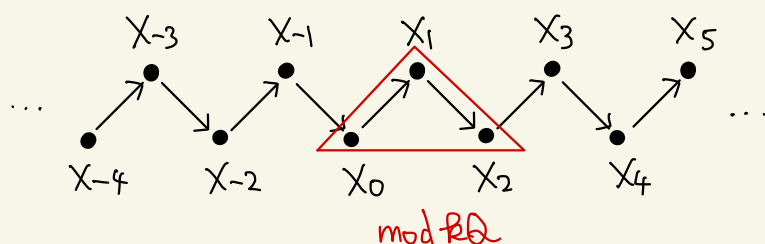
② vX と $X[1]$ は上図

• これを用いて $\text{tilt } RQ$ を分類できる

Ex $Q = [\bullet]$, $RQ = R$

$$\text{tilt } R = \{R[i] \mid i \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{Prop 9 よりすぐ})$$

Ex Q : type A_2 , $\text{ind } D^b(RQ)$ の各元を以下のように表す



このとき $\text{tilt } RQ = \{X_i \oplus X_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & \bullet & & & \\ & \bullet & \circ & \bullet & & \bullet & \\ \bullet & \circ & \bullet & \bullet & & \bullet & \\ & \bullet & \circ & \bullet & & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \circ & \bullet & & \bullet & \end{array} \right\}$

proof (⊃) $X_0 \oplus X_1 = RQ$,

$X_1 \oplus X_2 = D(RQ) =$ reflection で定まる tilting RQ -module

これを equivalence $\tau, \tau^{-1}: D^b(RQ) \rightarrow D^b(RQ)$ で移したのも tilting complex

(⊂) Prop 11 ② より $X_i[1] = X_{i+3}$ (*)

Prop 11 ① より $(X_i, X_{i+1}) \neq 0$ (**)

Prop 9 より tilt RQ の元は $U = X_i \oplus X_j$ ($i < j$) と表される

$j \neq i+1$ と仮定する

- $j-i = 3l$ ($l \geq 1$) なら

$$(U, U[l]) \supset (X_j, X_i[l]) \stackrel{(*)}{=} (X_j, X_j) \neq 0 \text{ より 矛盾}$$

- $j-i = 3l+1$ ($l \geq 2$) なら

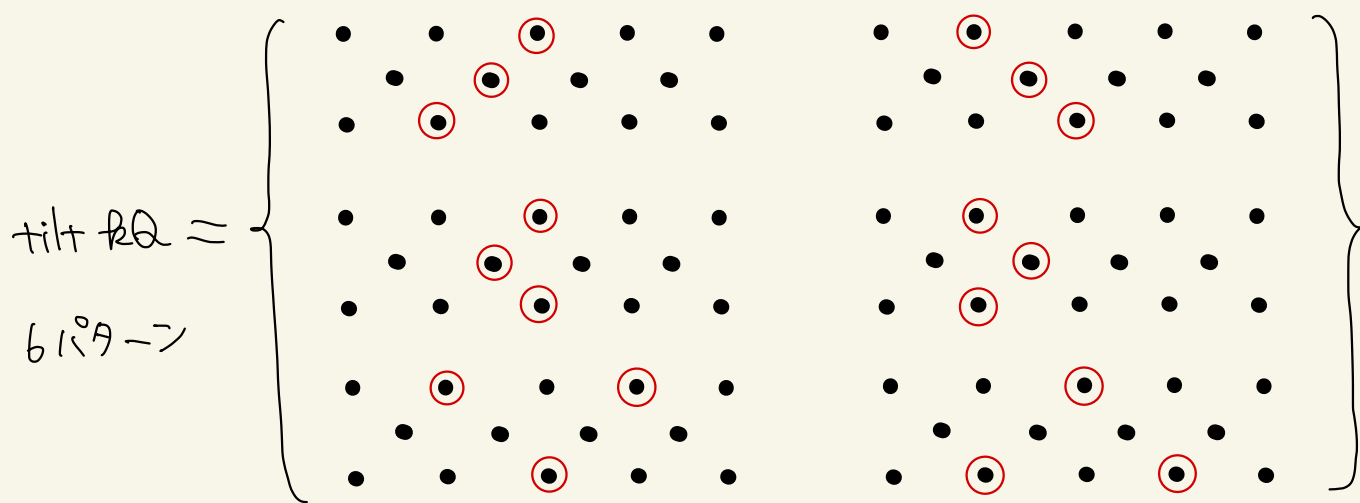
$$(U, U[-l]) \supset (X_i, X_j[-l]) \stackrel{(*)}{=} (X_i, X_{i+1}) \stackrel{(**)}{\neq} 0 \text{ より 矛盾}$$

- $j-i = 3l+2$ ($l \geq 0$) なら

$$(U, U[l+1]) \supset (X_j, X_i[l+1]) \stackrel{(*)}{=} (X_j, X_{j+1}) \stackrel{(**)}{\neq} 0 \text{ より 矛盾}$$

以上より $j = i+1$ $\square$

Ex Q: type A_3 $D^b(RQ)$ を ... と表す



レポート Q: type A_4 のとき tilt RQ を求めよ

(答のみで良い)

§14 Silting object

- tilting object よりも広い 重要な object のクラス mutation が可能

Def $\mathcal{T}$: triangulated category

① [Keller-Vossieck 88] $\mathcal{T} \ni U$: silting object

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \bullet \mathcal{T}(U, U[i]) = 0 \quad \forall i > 0 & (\text{tilting object では } \forall i \neq 0) \\ \bullet \mathcal{T} = \text{thick}_{\mathcal{T}} U \end{cases}$$

② $\mathcal{T}$: Knull-Schmidt のとき

$$\text{silt } \mathcal{T} := \{ \text{basic silting objects in } \mathcal{T} \} / \text{iso.}$$

③ k : field, A : finite dimensional k -algebra

$$\text{silt } A := \text{silt}(\text{per } A) = \text{silt } K^b[\text{proj } A]$$

- §13 Prop 9 より一般に次が成立する

Thm 1 [Aihara-I] $\mathcal{T}$: Knull-Schmidt triang. category

$$U, V \in \text{silt } \mathcal{T} \implies |U| = |V|$$

Sketch $\mathcal{T}$ の Grothendieck group を使う

$$K_0(\mathcal{T}) := \frac{(\mathcal{T} \text{ の objects の同型類を基底とする free abelian group})}{\langle [X] - [Y] + [Z] \mid X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] : \text{triangle} \rangle}$$

$\forall U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n \in \text{silt } \mathcal{T} \quad (U_i \in \text{ind } \mathcal{T})$ に対し.

$K_0(\mathcal{T})$ は $[U_1], \dots, [U_n]$ を基底とする free abelian group であることが示される



Ex A : dg algebra

$$\text{Assume } A \text{ is } \text{non-positive} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i > 0, A^i = 0$$

Then A is a silting object in $\text{per } A$

⊙ $\forall i > 0, (\text{per } A)(A, A[i]) = H^i(A) = 0 \quad \square$

⑦⑦

Prop 2 $A: \text{local} \Rightarrow \text{silt } A = \{A[i] \mid i \in \mathbb{Z}\}$

proof $U = [\dots \rightarrow 0 \rightarrow P^n \xrightarrow{d^n} \dots \xrightarrow{d^{m-1}} P^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots] \in \text{silt } A$ とする

$P^n \neq 0, P^m \neq 0, \text{Im } d^i \subset \text{rad } P^{i+1}$ (*) と仮定してよい

このとき $n=m$ を示せばよい。

A は local なので 各 P^i は free A -module で. $\forall a \in \text{Hom}_A(P^n, P^m)$ で

$\text{Im } a \not\subset \text{rad } P^m$ (**) なるものが存在する.

このとき a は $\text{per } A = K^b[\text{proj } A]$ の morphism $U \rightarrow U[m-n]$ を与える

$$\begin{array}{ccccccc} U & = & [\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 & \dots & 0 \rightarrow P^n & \xrightarrow{d^n} & \dots \rightarrow P^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots] \\ & & \downarrow 0 & \downarrow 0 & \downarrow 0 & \downarrow a & \downarrow 0 \\ U[m-n] & = & [\dots \rightarrow 0 \rightarrow P^n & \xrightarrow{d^{m-1}} & P^m \rightarrow 0 & \dots & 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots] \end{array}$$

もし $n < m$ なら null-homotopic となり. $a = d^{m-1} \circ s + t \circ d^n$ となる s, t

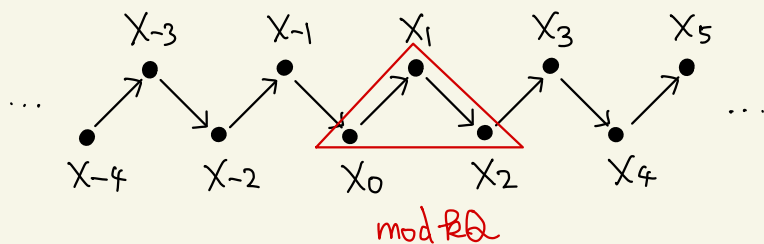
が存在するが, (*) より $\text{Im } a \subset \text{rad } P^m$ となり. (**) に反し矛盾 $\square$

Ex $Q = [\bullet \rightarrow]$

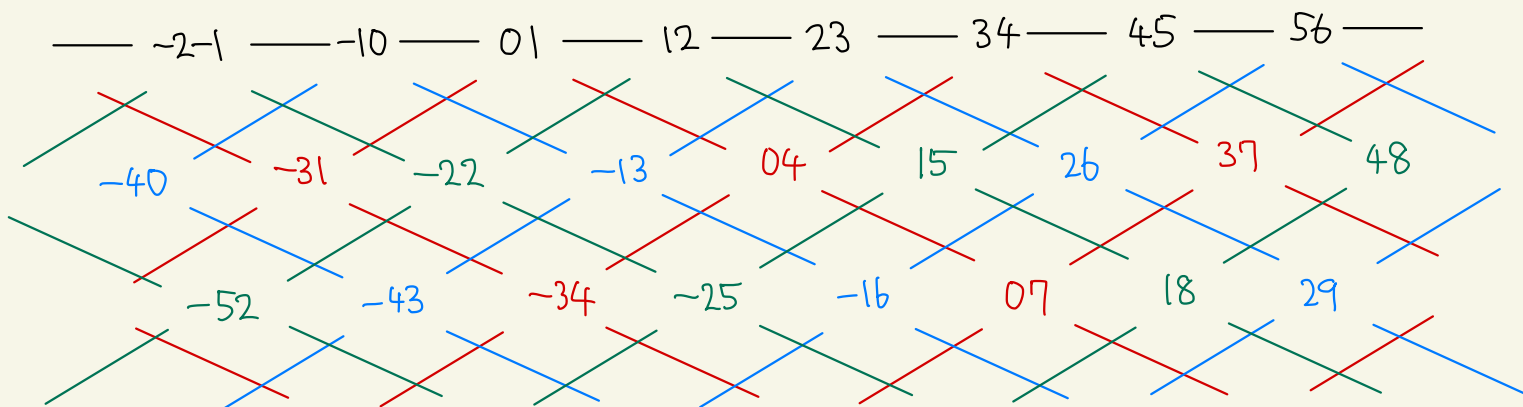
$D^b(\mathbb{R}Q) = \text{per } \mathbb{R}Q$

$\text{tilt } \mathbb{R}Q = \{X_i \oplus X_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}\}$

$\cap$
 $\text{silt } \mathbb{R}Q = \{X_i \oplus X_{i+3j+1} \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$



- 近い (直和因子を共有する + α) silt obj の間に辺を描く (後で定義する)



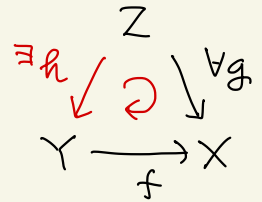
ただし $X_i \oplus X_j$ を ij と表す.

各 ij から 丁度 4本の 辺が 出ているが. これが 次に定める **mutation**

Def $\mathcal{A}$: additive category, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$: full subcat. $X \in \mathcal{A}$

① $f: Y \rightarrow X$ is a **right $\mathcal{B}$ -approximation** of X $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$Y \in \mathcal{B}$ かつ $\forall Z \in \mathcal{B}, \forall g: Z \rightarrow X, \exists h: Z \rightarrow Y$
s.t. $g = f \circ h$



また right minimal (p42) な right $\mathcal{B}$ -approximation を
minimal right $\mathcal{B}$ -approximation とよぶ

② 双対的に (minimal) **left $\mathcal{B}$ -approximation** を定める

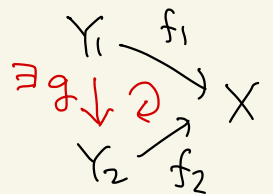
Ex $X \in \mathcal{B}$ ならば. $1_X: X \rightarrow X$ が minimal right $\mathcal{B}$ -approximation (left)

- minimal right $\mathcal{B}$ -approximation の 存在と一意性

Prop 3 $\mathbb{k}$: field, $\mathcal{A}$: $\mathbb{k}$ -linear Hom-finite Knull-Schmidt category

$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$: full subcategory

① $f_i: Y_i \rightarrow X$: minimal right $\mathcal{B}$ -approximation of X
($i=1,2$) $\Rightarrow \exists$ iso. $g: Y_1 \cong Y_2$ s.t. $f_1 = f_2 \circ g$



② Assume $\exists B \in \mathcal{A}$ s.t. $\mathcal{B} = \text{add } B$

Then $\forall X \in \mathcal{A}$ has a minimal right $\mathcal{B}$ -approximation

proof ① Clear

② $\mathcal{A}(B, X)$ の $\mathbb{k}$ -basis $f_1, \dots, f_n$ をとると.

$f := (f_1, \dots, f_n): B^{\oplus n} \rightarrow X$ は right $\mathcal{B}$ -approximation

$B^{\oplus n}$ の 直和分解 $B^{\oplus n} = Y \oplus Z$ で $f|_Z = 0$ となるもののうち.

Z が 極大であるものをとると. $f|_Y: Y \rightarrow X$ が minimal right $\mathcal{B}$ -approximation であることが 容易に分かる. $\square$

- これを用いて mutation が定義される

Def $\mathcal{R}$: field. $\mathcal{T}$: $\mathcal{R}$ -linear Hom-fin. Knull-Schmidt triang. cat.

$U \in \text{silt } \mathcal{T}$ の直和分解 $U = X \oplus V$ をとる.

① X の minimal right $(\text{add } V)$ -approximation f を

$\mathcal{T}$ の triangle $Y \rightarrow V' \xrightarrow{f} X \rightarrow Y[1]$ (*) に延長する

$\mu_X^+(U) := Y \oplus V$ を U の right mutation とよぶ

② X の minimal left $(\text{add } V)$ -approximation g を

$\mathcal{T}$ の triangle $X \xrightarrow{g} V'' \rightarrow Z \rightarrow Y[1]$ に延長する

$\mu_X^-(U) := Z \oplus V$ を U の left mutation とよぶ

Ex ① $\mu_0^+(U) = U = \mu_0^-(U)$

② $\mu_U^+(U) = U[-1], \mu_U^-(U) = U[1]$

Thm 4 ① $\mu_X^+(U), \mu_X^-(U) \in \text{silt } \mathcal{T}$

② $\mu_Y^- \circ \mu_X^+(U) \cong U \cong \mu_Z^+ \circ \mu_X^-(U)$

つまり μ^+ と μ^- は互いに逆操作

proof ① $Y \oplus V$ が silting object であることを示す

(0) triangle (*) より $U = X \oplus V \in \text{thick } \mathcal{T}(Y \oplus V)$ なので.

$\text{thick } \mathcal{T} U = \mathcal{T}$ より $\text{thick } \mathcal{T}(Y \oplus V) = \mathcal{T}$

(1) (*) に $\mathcal{T}(V, -)$ を apply して

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{T}(V, V') \xrightarrow{f} \mathcal{T}(V, X) \rightarrow \mathcal{T}(V, Y[1]) \rightarrow & \boxed{\mathcal{T}(V, V'[1])} & \rightarrow & \boxed{\mathcal{T}(V, X[1])} & \rightarrow & \dots \\ \uparrow & \searrow & & \searrow & & \\ \text{f のとり方より epi.} & \mathcal{T}(V, Y[2]) \rightarrow & \boxed{\mathcal{T}(V, V'[2])} & \rightarrow & \boxed{\mathcal{T}(V, X[2])} & \rightarrow \dots \end{array}$$

これより $\forall i \geq 1, \mathcal{T}(V, Y[i]) = 0$

(2) $\forall i \geq 1, (*)$ に $\mathcal{T}(-, V[i])$ を apply して

$$0 = \mathcal{T}(V', V[i]) \rightarrow \mathcal{T}(Y, V[i]) \rightarrow \mathcal{T}(X, V[i+1]) = 0$$

$$\text{これより } \mathcal{T}(Y, V[i]) = 0$$

(3) $\forall i \geq 1$. (*) に $\mathcal{T}(X, -[i])$ を apply して

$$0 = \mathcal{T}(X, X[i]) \rightarrow \mathcal{T}(X, Y[i+1]) \rightarrow \mathcal{T}(X, V[i+1]) = 0$$

$$\text{これより } \mathcal{T}(X, Y[i+1]) = 0$$

(4) $\forall i \geq 1$. (*) に $\mathcal{T}(-, Y[i])$ を apply して

$$0 \stackrel{(1)}{=} \mathcal{T}(V', Y[i]) \rightarrow \mathcal{T}(Y, Y[i]) \rightarrow \mathcal{T}(X, Y[i+1]) \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$\text{これより } \mathcal{T}(Y, Y[i]) = 0$$

(1)(2)(4) より $\forall i \geq 1$. $\mathcal{T}(Y \oplus V, (Y \oplus V)[i]) = 0$ なので.

$Y \oplus V$ は silting object

(5) triangle (*) $Y \xrightarrow{g} V' \xrightarrow{f} X \rightarrow Y[1]$ において.

g は left (add V)-approximation である

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{\ast} (*) \text{ に } \mathcal{T}(-, V) \text{ を apply して} \\ \mathcal{T}(V', V) \xrightarrow{- \circ g} \mathcal{T}(Y, V) \rightarrow \mathcal{T}(X, V[1]) = 0 : \text{exact.} \end{array} \right)$$

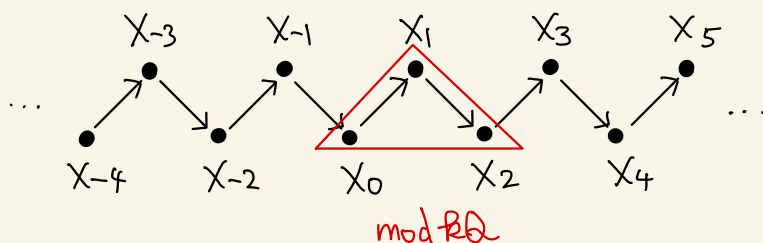
$f \in \text{rad } \mathcal{T}$ なので g は left minimal である (cf. 第7回の2つ目のレポート)

このことより $Y \oplus V$ が basic であること (つまり $Y \oplus V \in \text{silt } \mathcal{T}$) と

$$\mu_{\overline{Y}}(Y \oplus V) \cong X \oplus V \text{ が従う } \square$$

$$\underline{\text{Ex}} \quad Q = [\bullet \rightarrow \bullet]$$

$$D^b(\mathbb{R}Q) = \text{per } \mathbb{R}Q$$



$$\text{triangle } X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_{-1}[1] = X_2 \text{ より } \mu_{X_1}^+(X_0 \oplus X_1) = X_{-1} \oplus X_0$$

$$X_{-3} = X_0[-1] \rightarrow 0 \rightarrow X_0 \rightarrow X_0$$

$$\text{より } \mu_{X_0}^+(X_0 \oplus X_1) = X_{-3} \oplus X_1$$

$$\text{同様に } \mu_{X_0}(X_0 \oplus X_1) = X_1 \oplus X_2$$

$$\mu_{X_1}(X_0 \oplus X_1) = X_0 \oplus X_4$$

Ex Q : acyclic quiver, $i \in Q_0$: sink

§7 Thm 6 より $\exists U$: tilting RQ -module s.t. $\text{End}_{RQ}(U) \cong R \sigma_i Q$

実は $\mu_{e_i RQ}^-(RQ) = U$ が成立する

つまり reflection (≠ mutation) の一例

proof $U = (1 - e_i)RQ \oplus C$ i を target とする矢 $\begin{matrix} \delta_1 & \searrow \\ & \vdots \\ \delta_n & \searrow \end{matrix} i$ に対し

$$0 \rightarrow e_i RQ \xrightarrow{g} \bigoplus_{l=1}^n e_{\delta_l} RQ \rightarrow C \rightarrow 0 \text{ として } C \text{ を構成したが,}$$

この g は $e_i RQ$ の minimal $(\text{add}((1 - e_i)RQ))$ -approximation である. $\square$

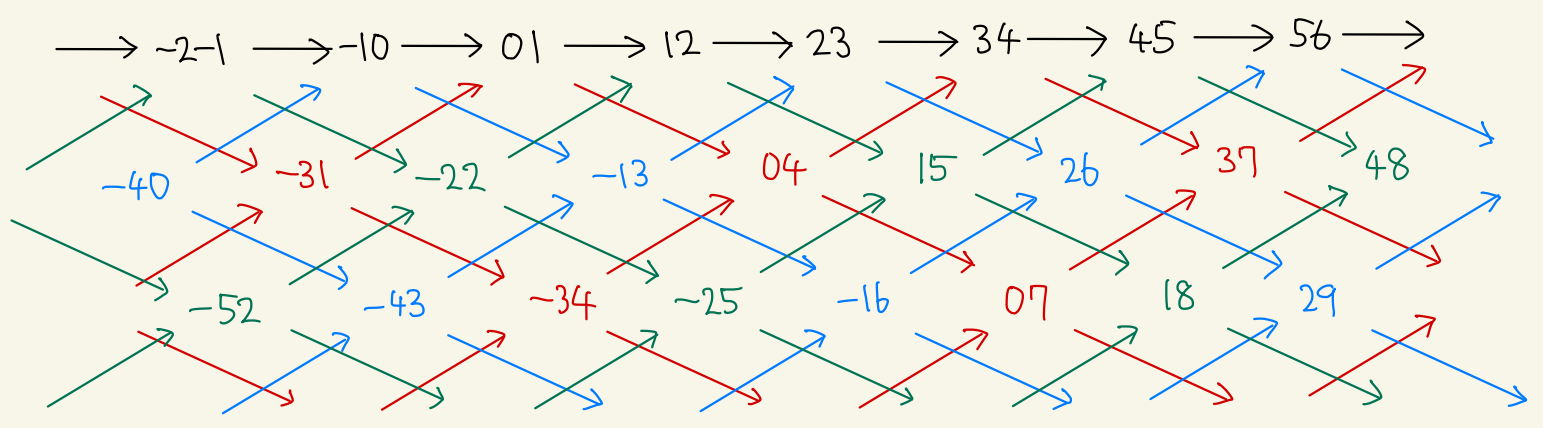
Def $\mathcal{T}$ の silting quiver (exchange quiver) を以下で定める

- vertices : $\text{silt } \mathcal{T}$
- arrows : $\exists U \rightarrow V \xLeftrightarrow{\text{def}} \exists X \in \text{ind } \mathcal{T} \text{ s.t. } \mu_X^-(U) \cong V$
 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \exists Y \in \text{ind } \mathcal{T} \text{ s.t. } \mu_Y^+(V) \cong U$
Thm 4 ②

Ex ① A : fin. dim. local k -algebra

$$\cdots \rightarrow A[-1] \rightarrow A \rightarrow A[1] \rightarrow A[2] \rightarrow \cdots$$

② $Q = k[\bullet \rightarrow \bullet]$, $A = kQ$



• silting quiver は. $\text{silt } \mathcal{T}$ の半順序を表示する

Def $\text{silt } \mathcal{T} \ni U, V$

$$U \geq V \xLeftrightarrow{\text{def}} \forall i > 0. \mathcal{T}(U, V[i]) = 0$$

Thm 5 [AI] k : field. $\mathcal{T}$: k -lin. Hom-fin. Knull-Schmidt triang. cat.

① $(\text{silt } \mathcal{T}, \geq)$ は partially ordered set

② $U, V \in \text{silt } \mathcal{T}$ に対し. 以下は同値

(1) $U > V$ かつ $(U > W > V$ となる $W \in \text{silt } \mathcal{T}$ は存在しない)

(2) silting quiver で $\exists$ arrow $U \rightarrow V$

つまり **silting quiver** = $(\text{silt } \mathcal{T}, \geq)$ の Hasse quiver)

以下. ①のみ示す ②は [AI, 2.35] 参照

Def $\mathcal{T}$: triang. category $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$: full subcat. of $\mathcal{T}$

$$\mathcal{X} * \mathcal{Y} := \{ T \in \mathcal{T} \mid \exists \begin{array}{c} X \longrightarrow T \longrightarrow Y \longrightarrow X[1] \\ \cap \qquad \qquad \cap \\ \mathcal{X} \qquad \qquad \mathcal{Y} \end{array} : \text{triangle in } \mathcal{T} \}$$

$$\text{smd } \mathcal{X} := \{ T \in \mathcal{T} \mid \exists X \in \mathcal{X} \text{ s.t. } T \text{ は } X \text{ の直和因子} \}$$

Fact 6 ① $(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z} = \mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z})$ by (TR4)

② $T \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$, $\mathcal{T}(\mathcal{X}, T) = 0 \Rightarrow T \in \text{smd } \mathcal{Y}$

$\mathcal{T}(T, \mathcal{Y}) = 0 \Rightarrow T \in \text{smd } \mathcal{X}$

Lem 7 $\mathcal{T}$: triang. cat. $U \in \mathcal{T}$: silting obj. $\mathcal{U} := \text{add } U$

$$\Rightarrow \mathcal{T} = \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{U}[-l] * \mathcal{U}[1-l] * \cdots * \mathcal{U} * \mathcal{U}[1] * \cdots * \mathcal{U}[l]$$

proof ① $\mathcal{T}$ の任意の subcat. $\mathcal{U}$ に対し.

$$\text{thick } \mathcal{U} = \bigcup_{\substack{l \geq 1 \\ i_1, \dots, i_l \in \mathbb{Z}}} \text{smd}(\mathcal{U}[i_1] * \mathcal{U}[i_2] * \cdots * \mathcal{U}[i_l]) \text{ が成立}$$

($\odot$ $\mathcal{T}$ は明らかな. 右辺は cone, $[\pm 1]$, 直和因子で閉じているので $\subset$ も成立する)

② 主張の $\mathcal{U}$ に対して. $\text{thick } \mathcal{U} = \mathcal{T}$ であり.

$$\left. \begin{array}{l} i > j \text{ のとき } \mathcal{U}[i] * \mathcal{U}[j] \subset \mathcal{U}[j] * \mathcal{U}[i] \\ i = j \text{ } \qquad \qquad \qquad \subset \mathcal{U}[i] \end{array} \right\} \text{ が成立}$$

($\odot$) $U'[i] \rightarrow X \rightarrow U''[j] \xrightarrow{0} U'[i+1]$ より $X = U'[i] \oplus U''[j]$

ゆえに $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ の場合のみ考えればよく. 特に

$$\mathcal{T} = \bigcup_{l \geq 0} \text{smd}(U[-l] * U[1-l] * \dots * U[l]) \text{ が成立}$$

smd を外せることは [I-Yang 2.7(a)] $\square$

Def $\mathcal{T}$: triang. cat. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$: $\mathcal{T}$ の iso. で閉じた subcat.

① $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: **torsion pair** in $\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0, \mathcal{T} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$

② torsion pair $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が **t-structure** in $\mathcal{T}$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{X}[1] \subset \mathcal{X} \iff \mathcal{Y}[1] \supset \mathcal{Y}$$

このとき $\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y}[1])$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ の **heart** とよぶ

③ torsion pair $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が **co-t-structure** in $\mathcal{T}$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{X}[1] \supset \mathcal{X} \iff \mathcal{Y}[1] \subset \mathcal{Y}$$

このとき $\mathcal{X}[1] \cap \mathcal{Y}$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ の **coheart** とよぶ

Ex A : ring

$$\textcircled{1} D^{\leq 0}(A) := \{ X \in D(A) \mid \forall i > 0, H^i(X) = 0 \}$$

$$D^{\geq 1}(A) := \{ X \in D(A) \mid \forall i \leq 0, H^i(X) = 0 \}$$

$(D^{\leq 0}(A), D^{\geq 1}(A))$ は $D(A)$ の **standard t-structure**
heart は $\text{Mod } A$

$$\textcircled{2} \text{per}_{\geq 1} A := \{ X \in \text{per } A \mid X \cong [\dots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{p^1 \rightarrow p^2 \rightarrow \dots}_{\text{proj } A}] \}$$

$$\text{per}_{\leq 0} A := \{ X \in \text{per } A \mid X \cong [\dots \rightarrow \underbrace{p^{-1} \rightarrow p^0}_{\text{proj } A} \rightarrow 0 \rightarrow \dots] \}$$

$(\text{per}_{\geq 1} A, \text{per}_{\leq 0} A)$ は $\text{per } A$ の **standard co-t-structure**
coheart は $\text{proj } A$

Def $\mathcal{T}$: triang. cat. $U \in \mathcal{T}$: silting obj.

$$\mathcal{T}_{\leq 0}^U := \{ X \in \mathcal{T} \mid \forall i > 0, \mathcal{T}(U, X[i]) = 0 \}$$

$$\mathcal{T}_{\geq 1}^U := \{ X \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(X, \mathcal{T}_{\leq 0}^U) = 0 \}$$

Ex A : ring. $\mathcal{T} = \text{per } A$ に対し.

$$\mathcal{T}_{\leq 0}^A = \text{per}_{\leq 0} A, \quad \mathcal{T}_{\geq 1}^A = \text{per}_{\geq 1} A$$

Prop 8 $\mathcal{T}$: triang. cat. $U, V \in \mathcal{T}$: silting obj.

① $(\mathcal{T}_{\geq 1}^U, \mathcal{T}_{\leq 0}^U)$ は $\mathcal{T}$ の co-t-structure で, coheart は $\text{add } U$

$$\textcircled{2} \quad U \geq V \iff \mathcal{T}_{\leq 0}^U \supset \mathcal{T}_{\leq 0}^V \iff \mathcal{T}_{\geq 1}^U \subset \mathcal{T}_{\geq 1}^V$$

proof ① $\mathcal{U} := \text{add } U$ に対し

$$\mathcal{T}_{\leq 0}^U = \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{U} * \mathcal{U}[1] * \cdots * \mathcal{U}[l] \quad (*) \text{ を示す}$$

$\supset$ は明らか $\subset$ は, $\forall T \in \mathcal{T}_{\leq 0}^U$ に対し, Lem 7 より

$$T \in \underbrace{\mathcal{U}[-l] * \cdots * \mathcal{U}[-1]}_{\mathcal{X}} * \underbrace{\mathcal{U} * \cdots * \mathcal{U}[l]}_{\mathcal{Y} \text{ とおく}}$$

$\mathcal{T}(\mathcal{X}, T) = 0$ なので Fact 6 ② より $T \in \text{smd } \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$

同様にして $\mathcal{T}_{\geq 1}^U = \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{U}[-l] * \cdots * \mathcal{U}[-1]$ が示され.

これと (*) と Lem 7 より $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\geq 1}^U * \mathcal{T}_{\leq 0}^U$ が成立し.

$(\mathcal{T}_{\geq 1}^U, \mathcal{T}_{\leq 0}^U)$ は $\mathcal{T}$ の co-t-structure

• coheart $\mathcal{T}_{\geq 1}^U[1] \cap \mathcal{T}_{\leq 0}^U$ は明らかに $\mathcal{U}$ を含む.

逆に $\forall T \in \text{coheart}$ に対し, (*) より $T \in \underbrace{\mathcal{U}}_{\mathcal{X}} * \underbrace{\mathcal{U}[1] * \cdots * \mathcal{U}[l]}_{\mathcal{Y} \text{ とおく}}$
となる $l \geq 0$ をとる

$\mathcal{T}(T, \mathcal{Y}) = 0$ なので Fact 6 ② より $T \in \mathcal{U}$

② 1つ目の $\Leftarrow$) $\mathcal{T}_{\leq 0}^U \supset \mathcal{T}_{\leq 0}^V \ni V$ より $\forall i > 0, \mathcal{T}(U, V[i]) = 0$

1つ目の $\Rightarrow$) $V := \text{add } V$ とおくと (*) より

$$J_{\leq 0}^V = \bigcup_{l \geq 0} V * V[l] * \cdots * V[l]$$

これと $J(U, V[i]) = 0$ ($\forall i > 0$) より $J(U, J_{\leq 0}^V[i]) = 0$ ($\forall i > 0$)

つまり $J_{\leq 0}^U \subset J_{\leq 0}^V$ $\square$

proof of Thm 5 ① 半順序の axiom をたしあめる $U, V, W \in \text{silt } J$

- $J(U, U[i]) = 0$ ($\forall i > 0$) より $U \geq U$
- $U \geq V \geq W \Rightarrow J_{\leq 0}^U \supset J_{\leq 0}^V \supset J_{\leq 0}^W \Rightarrow J_{\leq 0}^U \supset J_{\leq 0}^W \Rightarrow U \geq W$
 prop 8 ② prop 8 ②
- $U \geq V \geq U \Rightarrow J_{\leq 0}^U \supset J_{\leq 0}^V \supset J_{\leq 0}^U \Rightarrow J_{\leq 0}^U = J_{\leq 0}^V$
 prop 8 ②

ゆえに U と V の co-t-structure は一致し. coheart も一致するので

Prop 8 ① より $\text{add } U = \text{add } V$. U, V は basic なので $U \cong V$ $\square$

Silting - t-structure correspondence

derived category における重要な構造の間の bijection

Thm 9 [König-Yang 2014] $\mathbb{k}$: field, A : fin. dim. $\mathbb{k}$ -alg.

以下の間に bijection が存在する

- | | | |
|---|----------------------------------|-------------------|
| ① $\text{silt } A$ | $\leftarrow$ progenerator の一般化 | } $\text{per } A$ |
| ② { bounded co-t-structures in $\text{per } A$ } | | |
| ③ { simple-minded collections in $D^b(A)$ } | $\leftarrow$ simple modules の一般化 | } $D^b(A)$ |
| ④ { algebraic t-structures in $D^b(A)$ } | | |

赤字の定義と具体的な対応は下で与える

- Ex
- | | |
|--------------------------------|--|
| ① $A \in \text{silt } A$ の対応物は | ② $(\text{per}_{\geq 1} A, \text{per}_{\leq 0} A)$ |
| ③ { simple A -modules の同型類 } | ④ $(D^{\leq 0}(A), D^{\geq 1}(A))$ |

$$\text{ただしここでは } D^{\leq 0}(A) = \{X \in D^b(A) \mid \forall i > 0, H^i(X) = 0\}$$

$$D^{\geq 1}(A) = \{ \text{---} \mid \forall i < 0 \text{ ---} \}$$

Def $\mathcal{T}$: triang. category

① $\mathcal{T}$ の co-t-structure $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が **bounded** $\Leftrightarrow \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{X}[i] = \mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{Y}[-i]$

$\mathcal{C} = \mathcal{X}[1] \cap \mathcal{Y}$: coheart $\Leftrightarrow \mathcal{T} = \text{thick } \mathcal{C}$

Ex $(\text{per}_{\leq 1} A, \text{per}_{\geq 0} A)$ は $\text{per} A$ の bounded co-t-structure

② $\mathcal{T}$ の t-structure $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が **bounded** $\Leftrightarrow \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{X}[-i] = \mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{Y}[i]$

$\mathcal{H} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}[1]$: heart $\Leftrightarrow \mathcal{T} = \text{thick } \mathcal{H}$

Ex $(D^{\leq 0}(A), D^{\geq 1}(A))$ は $D^b(A)$ の bounded t-structure
($D(A)$ では同様のことは成立しない)

Prop 10 triang. category の $\forall$ t-structure の heart は abelian category $\mathcal{H}$

(triangle $\underbrace{X \rightarrow Y \rightarrow Z}_{\mathcal{H}} \rightarrow X[1]$ に対し, $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ が $\mathcal{H}$ の short exact seq. の全列を与える)

• abelian category $\mathcal{A}$ が **length category** $\Leftrightarrow \forall$ object $X \in \mathcal{A}$ は長さ有限つまり $\exists X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n = 0$: subobject の列 st. X_i/X_{i+1} は simple object in $\mathcal{A}$ ($\forall i = 0 \sim n-1$)

• $\mathcal{T}$ の bounded t-structure $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が **algebraic** $\Leftrightarrow$ heart が length category

Ex $(D^{\leq 0}(A), D^{\geq 1}(A))$ は $D^b(A)$ の algebraic t-structure

Def つぎ ③ $\mathcal{T}$ の objects の 同型類の集合 $\mathcal{S}$ が **simple-minded collection (SMC)**

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall S, T \in \mathcal{S}, \mathcal{T}(S, T) = \begin{cases} \text{division ring} & (S \approx T) \\ 0 & (S \not\approx T) \end{cases} \\ \forall i < 0, \mathcal{T}(S, T[i]) = 0 \end{array} \right.$

$\bullet \mathcal{T} = \text{thick } \mathcal{S}$

対応

$\bullet \text{ per } A$ の方 :

$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} : \text{silt } A \ni U \mapsto (\mathcal{T}_{\geq 1}^U, \mathcal{T}_{\leq 0}^U) \quad (\text{Prop 8})$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1} : (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto U \quad \text{ここで } U \in \mathcal{T} \text{ は } \text{add } U = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \text{ を}$$

$\bullet D^b(A)$ の方 : むしろ basic object

$$\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{3} : (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto \{ \text{heart } \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}[1] \text{ の simple objects の 同型類} \}$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4} : \mathcal{S} \mapsto \left(\bigcup_{l \geq 0} \mathcal{H}[l] * \cdots * \mathcal{H}[1] * \mathcal{H}, \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{H}[-1] * \cdots * \mathcal{H}[-l] \right)$$

$$\text{ただし } \mathcal{H} := \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S} \quad (l \text{ 個})$$

$\bullet \text{ per } A$ から $D^b(A)$

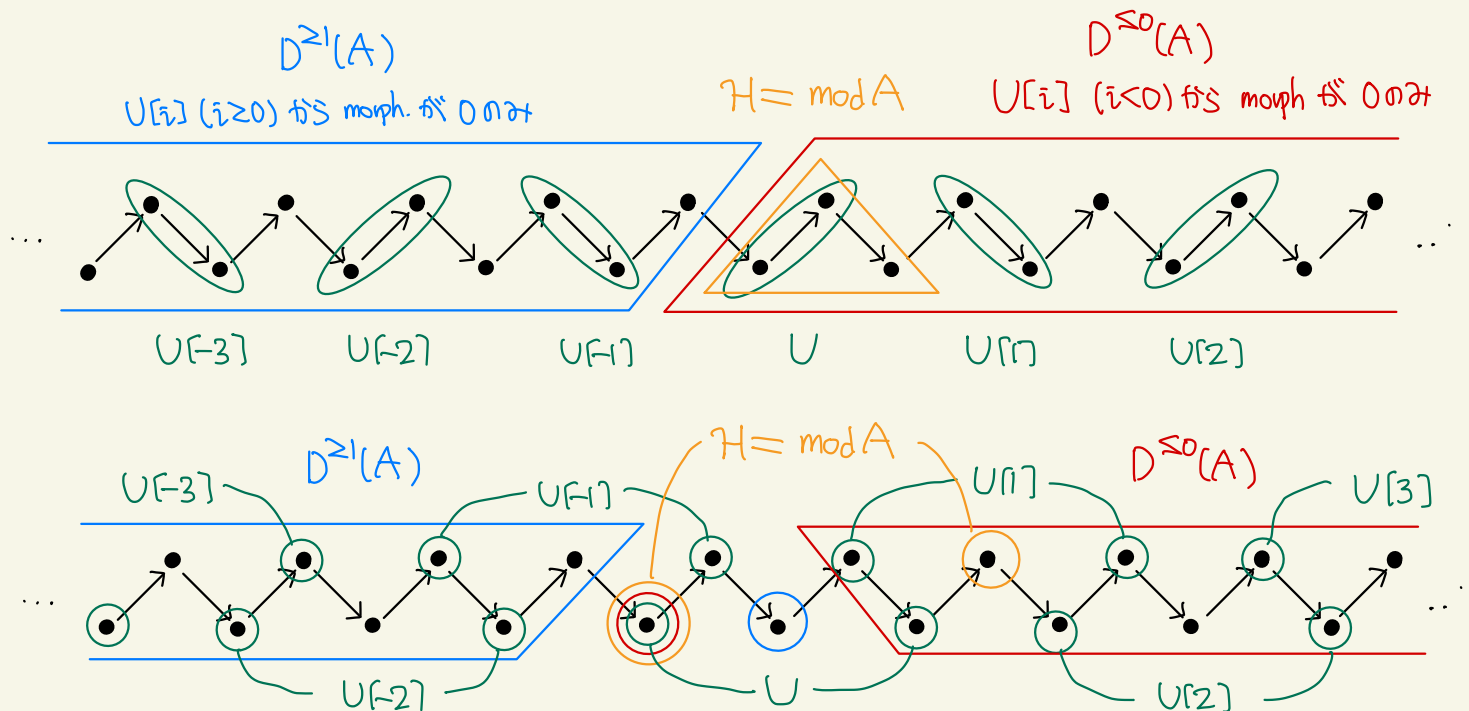
$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{4} : U \mapsto (D_U^{\leq 0}(A), D_U^{\geq 1}(A))$$

$$\text{ただし } D_U^{\leq 0}(A) := \{ X \in D^b(A) \mid \forall i > 0, D^b(A)(U, X[i]) = 0 \}$$

$$D_U^{\geq 1}(A) := \{ \text{--- } i < 0, \text{---} \}$$

($H^i(X) = D^b(A)(A, X[i])$ なので $U = A$ とすると $(D^{\leq 0}(A), D^{\geq 1}(A))$ をうる.)

$$\underline{\text{Ex}} \quad A = k[\bullet \rightarrow \bullet] \quad D^b(A) = \text{per } A$$



レポート $A = k[\bullet \rightarrow \bullet]$ のとき, $D^b(A)$ の algebraic t-structure を全て決定せよ

($\text{silt } A$ は 79 ページで与えている)

Sketch of proof of Thm9

(1) $\forall$ triang. cat. $\mathcal{T}$ に対し, 以下の bijections があることは 容易

- ① { **silting subcategories** $\mathcal{U}$ in $\mathcal{T}$ } $\cong$ ② { bounded co-t-structures in $\mathcal{T}$ }
- $$\left(\begin{array}{l} \mathcal{T}(\mathcal{U}, \mathcal{U}[i]) = 0 \quad (\forall i > 0) \\ \text{thick}_{\mathcal{T}} \mathcal{U} = \mathcal{T} \\ \mathcal{U} = \text{add } \mathcal{U} \end{array} \right) \quad \mathcal{U} \mapsto (\mathcal{T}_{\geq 1}^{\mathcal{U}}, \mathcal{T}_{\leq 0}^{\mathcal{U}})$$
- (84 ページと同様に定める)

レポート これをたしかめよ

(Lem7, Prop8 は silting subcat でも成立するので使てよい)

- ③ { SMC in $\mathcal{T}$ } $\cong$ ④ { algebraic t-structures in $\mathcal{T}$ }

(2) 対応 ① $\rightarrow$ ④ が bijection であること

$$\mathcal{U} \mapsto (D_{\mathcal{U}}^{\leq 0}(A), D_{\mathcal{U}}^{\geq 1}(A))$$

- 一般に non-positive dg $\mathbb{R}$ -algebra C に対し.

$$\mathcal{D}^b(C) := \{ X \in D(C) \mid \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{R}} H^i(X) < \infty \}$$

standard t-structure $(\mathcal{D}^{\leq 0}(C), \mathcal{D}^{\geq 1}(C))$ を持つ.

$$H^i(X) = 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \forall i > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \forall i \leq 0 \end{matrix}$$

- $U \in \text{silt} A = \text{silt} K^b[\text{proj} A]$ に対し. dg $\mathbb{R}$ -algebra $B := \text{End}_A(U)$ を考えると. $H^i(B) = 0 \quad (\forall i > 0)$ なので

$$\begin{array}{ccccccc} B : & \cdots & \rightarrow & B^{-2} & \rightarrow & B^{-1} & \rightarrow & B^0 & \xrightarrow{d^0} & B^1 & \rightarrow & B^2 & \rightarrow & \cdots \\ U & & & \parallel & & \parallel & & U & & \uparrow & & \uparrow & & \\ C : & \cdots & \rightarrow & B^{-2} & \rightarrow & B^{-1} & \rightarrow & \text{Ker } d^0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

により 定まる non-positive dg $\mathbb{R}$ -algebra C と B は quasi-iso

特に triangle equivalences $\bigcap U \xrightarrow{\quad} \bigcap C$ をうる.

$$\mathcal{D}^b(A) \simeq \mathcal{D}^b(B) \simeq \mathcal{D}^b(C)$$

61 ページ 注 §11 Prop5

これは $D_{\mathcal{U}}^{\leq 0}(A) \simeq D^{\leq 0}(C), \quad D_{\mathcal{U}}^{\geq 1}(A) \simeq D^{\geq 1}(C)$ に制限される

$(D^{\leq 0}(C), D^{\geq 1}(C))$ は algebraic t-structure なので. $(D_{\mathcal{U}}^{\leq 0}(A), D_{\mathcal{U}}^{\geq 1}(A))$ もそうである

- ① $\rightarrow$ ④ の 全射性 は. [König-Yang], [Su-Yang] を参照 □

① torsion pair in a triangulated category (§14)

② **torsion pair** (T, F) in an abelian category $\mathcal{A}$ (§6 $\mathcal{A} = \text{Mod } A$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{A}(T, F) = 0 \\ \bullet \forall X \in \mathcal{A}, \exists \text{ exact seq. } 0 \rightarrow \underset{\cap}{T} \rightarrow X \rightarrow \underset{\cap}{F} \rightarrow 0 \\ \bullet T, F : \text{iso. で閉じる} \end{array} \right.$$

このとき T を **torsion class**, F を **torsionfree class** とよぶ

①と②は類似概念だが, 以下の直接的な対応がある

Prop 1 [Happel-Reiten-Smalø 96] $\mathcal{T}$: triang. cat.

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: t-structure in $\mathcal{T}$, $\mathcal{H} = \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y}[1])$: heart

以下の間に bijection がある

$$\begin{aligned} \text{① } \{ (\mathcal{X}', \mathcal{Y}') : \text{t-structure in } \mathcal{T} \mid \mathcal{X} \supset \mathcal{X}' \supset \mathcal{X}[1] \} \\ (\Leftrightarrow \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}[1]) \end{aligned}$$

$$\text{② } \{ (T, F) : \text{torsion pair in } \mathcal{H} \}$$

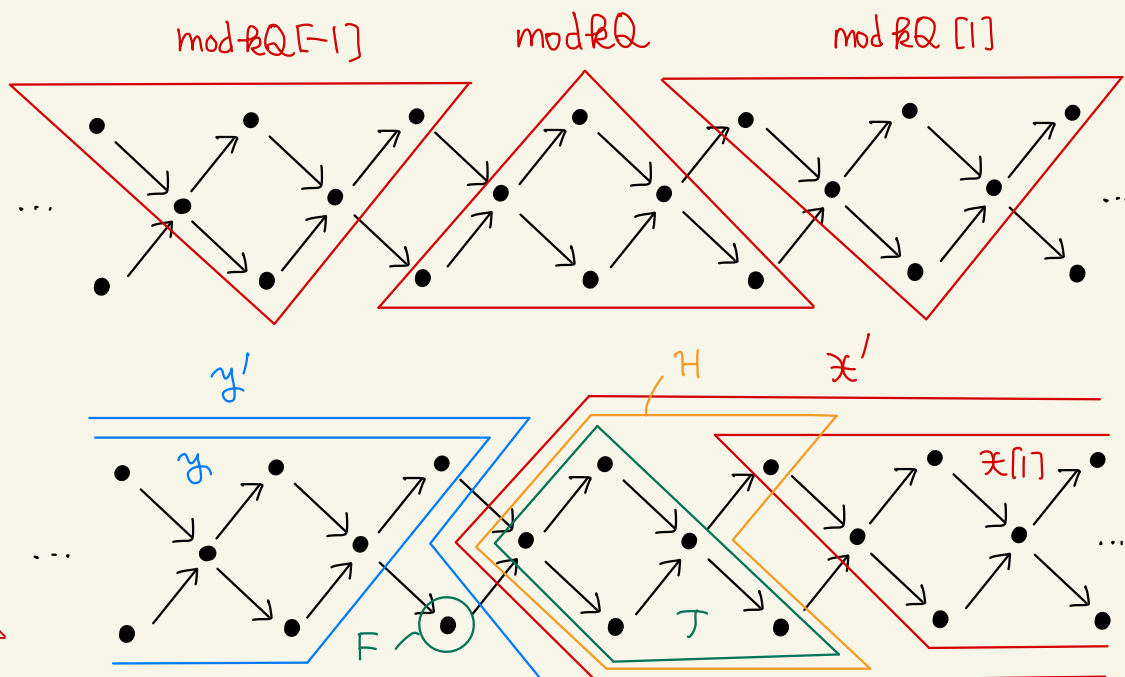
$$(\mathcal{X}', \mathcal{Y}') \mapsto (T, F) \text{ のとき, } (\mathcal{X}', \mathcal{Y}') \text{ の heart は } F[1] * T$$

対応 ① $\rightarrow$ ② : $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}') \mapsto (\mathcal{X}' \cap (\mathcal{Y}[1]), \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}')$

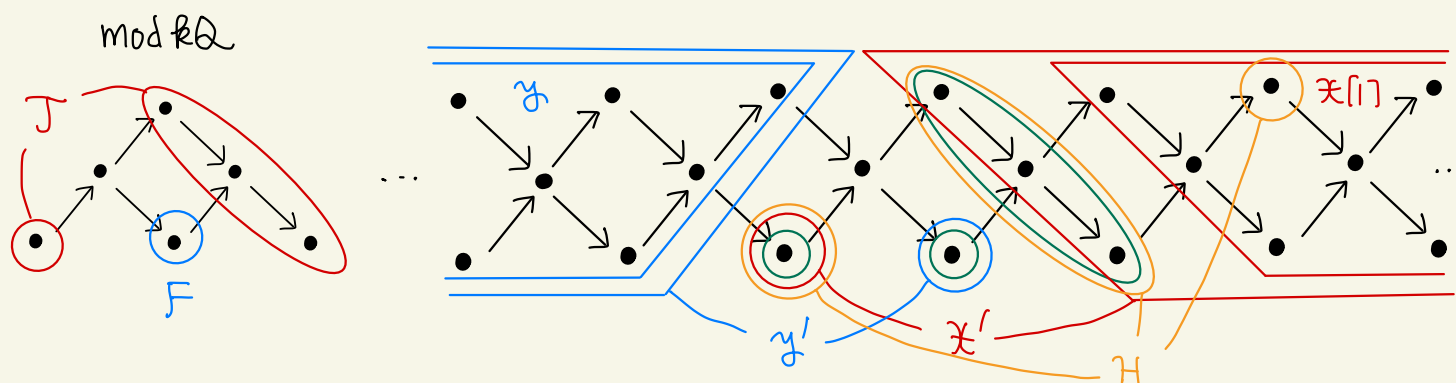
② $\rightarrow$ ① : $(T, F) \mapsto (\mathcal{X}[1] * T, F * \mathcal{Y})$

Ex

$$A = k[\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet]$$



上の $\text{mod } RQ$ と $\mathcal{H}$ の関係は, reflection の場合の Brenner-Butler の定理 (90) (48ページ, 71ページ) でも扱った



- Prop 1 を silting-t-structure correspondence の観点から調べる

Def $\mathcal{T}$: triang. cat. $U, V \in \mathcal{T}$: silting obj. $n \geq 1$

V is n -term w.r.t. $U \stackrel{\text{def}}{\iff} U \geq V \geq U[n-1]$

Ex A : fin. dim. k -alg.

$U \in \text{silt } A$ が n -term w.r.t. $A \iff U \cong [\dots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{p^{l-n} \rightarrow \dots \rightarrow p^0}_{\text{proj } A}} \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$

Prop 2 A : fin. dim. k -alg. $n \geq 1$

silting-t-structure corresp. を制限して 以下の間の bijection がえられる

① $n\text{-silt } A := \{U \in \text{silt } A \mid U \text{ is } n\text{-term w.r.t. } A\}$

② $\{(\mathcal{X}, \mathcal{Y}): \text{alg. t-structure in } D^b(A) \mid D^{\leq 0}(A) \supset \mathcal{X} \supset D^{\leq 1-n}(A)\}$
 $(\iff D^{\geq 1}(A) \subset \mathcal{Y} \subset D^{\geq 2-n}(A))$

proof $U \in \text{silt } A$, $\mathcal{U} = \text{add } U$ に対し $\mathcal{T}_{\leq 0}^U = \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{U} * \mathcal{U}[1] * \dots * \mathcal{U}[l]$

であた (§14 Prop 8 の proof) とくに

$$D_{\mathcal{U}}^{\geq 1} = \{X \in D^b(A) \mid D^b(A)(\mathcal{T}_{\leq 0}^U, X) = 0\}$$

また $D_{\mathcal{U}}^{\leq 0} \cap \text{per } A = \mathcal{T}_{\leq 0}^U$ が容易に分かる. 特に

$\mathcal{T}_{\leq 0}^U = \{X \in \text{per } A \mid D^b(A)(X, D_{\mathcal{U}}^{\geq 1}) = 0\}$ が成立

$\therefore U \geq V \Leftrightarrow J_{\leq 0}^U \supset J_{\leq 0}^V \Leftrightarrow D_U^{\geq 1} \subset D_V^{\geq 1}$ より主張が従う
 §14 Prop 8 □

- $n=2$ の場合が特に重要 [Brüstle-Yang]

2-silt $A \cong \{ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \text{alg. t-structure in } \mathcal{D}(A) \mid D^{\leq 0}(A) \supset \mathcal{X} \supset D^{\leq -1}(A) \}$
 $\cap$ prop 2 prop 1
 $\{ \text{torsion pairs in mod } A \}$

Ex $\forall$ tilting A -module U は 2-term sifting obj. w.r.t. A

$$\left(\textcircled{\ominus} \textcircled{\text{T}} \quad 0 \rightarrow \underbrace{P_1 \xrightarrow{f} P_0}_{\text{proj } A} \rightarrow U \rightarrow 0 \quad U \cong [0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow 0] \right)$$

上の対応は $U \mapsto (J(U), F(U))$ に一致する

- 2-silt A に対応する torsion pair は 次のように特徴付けられる

Thm 3 [Adachi-I-Reiten 2014] $\mathbb{k}$: field. A : fin. dim. $\mathbb{k}$ -alg.

以下の間に bijections が存在する

- ① 2-silt A
- ② $\{ \text{basic support } \tau\text{-tilting } A\text{-modules} \} / \text{iso.}$
- ③ $\{ \text{functorially finite torsion classes in mod } A \}$
- ④ $\{ \text{functorially finite torsionfree classes in mod } A \}$
- ⑤ $\{ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \text{alg. t-structure in } \mathcal{D}(A) \mid D^{\leq 0}(A) \supset \mathcal{X} \supset D^{\leq -1}(A) \}$

赤字の定義と 具対的な対応は下で与える

Def $\mathcal{A}$: additive category, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$: full subcat.

$\mathcal{X}$ is contravariantly finite in $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall A \in \mathcal{A}$ は right $\mathcal{B}$ -approximation をもつ
(covariantly finite) (left) (78ページ)

functorially finite := (contravariantly finite かつ covariantly finite)

Ex $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: torsion pair in an abelian / a triang. cat. $\mathcal{A}$

② $\rightarrow$ ③ $X \mapsto \text{gen } X$ ($\text{Fac } X$ と表す)
ii

$\{ Y \in \text{mod } A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } Y \text{ は } X^{\oplus n} \text{ の factor module と iso.} \}$

③ $\rightarrow$ ② $\mathcal{T}$ は $\text{mod } A$ の extension-closed subcat. なので, canonical な exact category の構造を持つ

$\mathcal{T} \mapsto X$ s.t. $\text{add } X = \{ \text{projective objects in the exact cat. } \mathcal{T} \}$

③ $\leftrightarrow$ ④ $\leftarrow$ ① は Prop 1, Prop 2 の制限 $\square$

- 2-term silting は多くの良い性質をみたす

Prop 4 [AIR, Derksen-Fei] A : fin. dim. $\mathbb{K}$ -alg

① $V \in \text{per } A$: basic 2-term presilting obj. $|V| = |A| - 1$
(つまり $\forall i > 0, (\text{per } A)(V, V[i]) = 0$)

$\Rightarrow V$ の $\mathcal{T}$ 度 2 個の 2-silt A の元の直和因子になる

② $\forall U \in 2\text{-silt } A, U = X \oplus V, X$: indecomp.

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{T}}^+(U)$ と $\mu_{\mathcal{T}}^-(U)$ の $\mathcal{T}$ 度 1 つか 2-silt A の元となる.

より最近の結果は [Demonet - I - Jasso, Asai 1, Asai 2] などを参照

- $2\text{-silt } A \ni U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ に対し

$K_0(\text{proj } A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の cone $C(U) := \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} [U_i]$ が得られ.

$C(U)$ (U : presilting) が $K_0(\text{proj } A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の fan を与える

- $\# 2\text{-silt } A < \infty$ のときは $\mathcal{T}$ -tilting-finite とよばれ, 多くの重要な例がある

参考文献

- category の基礎 : [中岡] 中岡宏行 「圏論の技法」 日本評論社
- §4 入門書 : 岩永恭雄・佐藤真久
「環と加群のホモロジー代数的理論」 日本評論社
専門書 : F.W. Anderson, K.R. Fuller
「Rings and Categories of modules」 Springer GTM13
- §6 A が特別 (体上の有限次元代数) な場合
[ASS] Assem, Simson, Skowronski 「Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 1」 Chapter VI
- §7 [ASS] Chapter II, III, VII
- §8 [ASS] Chapter IV
- §9 [中岡] §5
[Keller] B. Keller "Chain complexes and stable categories", Appendix A
Manuscripta Math. 1990
- §10 [中岡] §6
- §11, 12 [Keller 2] B. Keller "Deriving DG categories"
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1994
[Yang] D. Yang "Introduction to derived categories of differential graded algebras", book in preparation
- §13 [Happel] D. Happel "Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras" LMS Lecture Note, 1988
[Reiten-Van den Bergh] I. Reiten, M. Van den Bergh
"Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality" JAMS 2002
- §14 [Aihara-I] T. Aihara, O. Iyama "Sifting mutation in triangulated categories" J. Lond. Math. Soc. 2012

[I-Yang] O. Iyama, D. Yang "Silting reduction and Calabi-Yau reduction of triangulated categories" Trans. Amer. Math. Soc. 2018

[König-Yang] S. König, D. Yang "Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for fin. dim. algebras" Doc. Math. 2014

[Su-Yang] H. Su, D. Yang "From simple-minded collections to silting objects via Koszul duality" Algebr. Represent. Theory 2019

• §15 [Happel-Reiten-Smalø] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø

"Tilting in abelian categories and quasitilted algebras" Mem. Amer. Math. Soc. 1996

[Brüstle-Yang] T. Brüstle, D. Yang "Ordered exchange graphs" Advances in representations of algebras, 135-193 EMS Ser. Congr. Rep. 2013

[Adachi-I-Reiten] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten "τ-tilting theory" Comp. Math. 2014

[Demonet-I-Jasso] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso "τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors" Int. Math. Res. Not. IMRN 2019

[Asai 1] S. Asai "Semibricks" Int. Math. Res. Not. IMRN 2020

[Asai 2] ——— "The wall-chamber structure of the real Grothendieck groups" Adv. Math. 2021