箙の表現と団代数

予定 §1	箙とその表現	1回目
§2	箙の鏡映とその応用	2・3回目
§3	箙の変異と団代数	3・4回目

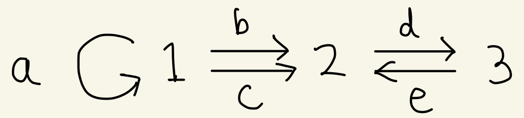
§1 箙とその表現　Gabriel　1972〜

えびら
箙 (quiver) : 様々な数学的対象の構造を視覚化したもの
||
有向グラフ　　代表例: 環と圏

Def quiver とは 4つ組 (Q_0, Q_1, s, t) で 集合 Q_0, Q_1 と
写像 $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ よりなるもの
（特に断らない限り、Q_0, Q_1 は有限集合とする）

- Q_0 を点の集合、Q_1 を矢の集合とみなし $a \in Q_1$ を矢 $s(a) \xrightarrow{a} t(a)$ とみなすことにより、quiver は有向グラフとして図示される

Ex



$Q_0 = \{1, 2, 3\}$
$Q_1 = \{a, b, c, d, e\}$

	a	b	c	d	e
s	1	1	1	2	3
t	1	2	2	3	2

線型代数より: $\mathbb{C}$: 複素数の全体

$M_{m,n}(\mathbb{C})$: $m \times n$ 行列の全体　　$m = n$ のとき $M_n(\mathbb{C})$

$GL_n(\mathbb{C})$: n 次正則行列の全体

問1 ① $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対し、$P \in GL_m(\mathbb{C})$ と $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ をうまく見つけて PAQ をなるべく簡単にせよ

② $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し、$P \in GL_m(\mathbb{C})$ をうまく見つけて $P^{-1}AP$ をなるべく簡単にせよ

答 ① 基本変形による簡約化：いつでも $\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ とできる

② Jordan 標準形：いつでも $\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_\ell} \end{bmatrix}$ $A_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & & 0 \\ & \alpha_i & 1 & \\ & & \alpha_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \alpha_i \end{bmatrix}$ とできる

- これらは箙の表現の特別な場合

Def quiver $Q=(Q_0, Q_1, s, t)$ の表現（representation）とは、

$V=(V_i, V_a)_{i\in Q_0,\, a\in Q_1}$ で

- 各 $i\in Q_0$ に対し、V_i は $\mathbb{C}$ベクトル空間（特に断らない限り有限次元）
- 各 $a\in Q_1$ に対し、$V_a : V_{s(a)} \longrightarrow V_{t(a)}$ は線型写像

$\underline{\dim} V := (\dim_{\mathbb{C}} V_i)_{i\in Q_0}$ ： Vの次元ベクトル

Ex ① $Q=[\bullet]$ の rep. は、1つの $\mathbb{C}$ベクトル空間

② $Q=\left[\bullet \begin{smallmatrix}\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow\end{smallmatrix} \bullet\right]$ の rep. は $V=\left[\mathbb{C}^n \begin{smallmatrix}\xrightarrow{A_1} \\ \xrightarrow{A_2} \\ \vdots \\ \xrightarrow[A_\ell]{}\end{smallmatrix} \mathbb{C}^m\right]$ $A_1 \sim A_\ell \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

（ℓ本）

$\underline{\dim} V = (n, m)$

③ $Q=[\bullet \circlearrowleft]$ の rep. は $V=[\mathbb{C}^n \circlearrowleft A]$ $A\in M_n(\mathbb{C})$

$\underline{\dim} V = (n)$

Def Qの rep. $V=(V_i, V_a)$，$W=(W_i, W_a)$ に対し

① $f: V\longrightarrow W$ が射（morphism）であるとは、$f=(f_i)_{i\in Q_0}$ で

- 各 $i\in Q_0$ に対し、$f_i : V_i \longrightarrow W_i$ は線型写像
- 各 $(a: i\longrightarrow j)\in Q_1$ に対し、$f_j \circ V_a = W_a \circ f_i$

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "V_a"] \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_j \arrow[d, "f_j"] \\ W_i \arrow[r, "W_a"'] & W_j \end{tikzcd}$$

② 射 $f: V\longrightarrow W$ が同型射（isomorphism）であるとは

各 $i\in Q_0$ に対し、$f_i : V_i \longrightarrow W_i$ が全単射であること

このとき VとWは同型であると言い、$V\simeq W$ と表す

Rem ・$V\simeq W \Longrightarrow \underline{\dim} V = \underline{\dim} W$

- 逆は成立しない $Q=[\bullet\to\bullet]$ $[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}] \not\simeq [\mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C}]$

問 Qの表現の同型類を決定せよ

- そのために rep. をより基本的なものに分解する

Def Qの rep. $V=(V_i, V_a)$, $W=(W_i, W_a)$ に対し

直和 $V\oplus W = (X_i, X_a)$ を以下で定める

- 各 $i\in Q_0$ に対し、$X_i := V_i \oplus W_i$
- 各 $(a: i\to j)\in Q_1$ に対し、$X_a := V_a\oplus W_a : V_i\oplus W_i \longrightarrow V_j \oplus W_j$

$$(x,y)\longmapsto (V_a(x), W_a(y))$$

Ex $Q=[\bullet\to\bullet]$ $[\mathbb{C}\to 0]\oplus[0\to\mathbb{C}] = [\mathbb{C}\xrightarrow{0}\mathbb{C}]$

Prop 2 $\underline{\dim}(V\oplus W) = \underline{\dim}\, V + \underline{\dim}\, W$

Def ① 全てのベクトル空間が 0 である表現を 0 と表す

② Qの 0 でない rep. V が 直既約 (indecomposable) であるとは、

- Qの rep. W, W' が $V\simeq W\oplus W'$ をみたせば、$W=0$ or $W'=0$

Ex $k\in Q_0$ に対し Qの rep. $S(k)$ を以下で定めると、直既約

(simple rep.) (by Prop 2)

- $S(k)_i = \begin{cases}0 & i\neq k\\ \mathbb{C} & i=k\end{cases}$
- $\forall a\in Q_1$, $S(k)_a = 0$

Thm 3 (Krull-Schmidt Theorem) Q: quiver

① $\forall$ Qの rep. V, $\exists$ Qの indecomp. rep. $W_1\sim W_n$ s.t. $V\simeq W_1\oplus\cdots\oplus W_n$

② Qの indecomp. rep. $W_1\sim W_n$, $W_1'\sim W_m'$ に対し、

$W_1\oplus\cdots\oplus W_n \simeq W_1'\oplus\cdots\oplus W_m' \Longrightarrow n=m$ かつ 番号をつけかえて $W_i\simeq W_i'$ $(i=1\sim n)$

証明は略す

- Thm 3 より、Qの rep. の同型類を求めるには、indecomp. rep. の同型類を求めればよい

Ex $Q=[\bullet]$ の indecomp. rep. の同型類は $[\mathbb{C}]$ の 1つ

Ex 4 $Q=[1\to 2]$ の indecomp. rep. の同型類は 以下の3つ

$[\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}]$, $S(1)=[\mathbb{C}\to 0]$, $S(2)=[0\to\mathbb{C}]$

これは 問1 ① の答の言いかえ

proof Qの rep. で、次元ベクトルが (n,m) のものは

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ から定まる $V_A := [\mathbb{C}^n \xrightarrow{A}\mathbb{C}^m]$ と iso.

- $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ に対し，

$$V_A \simeq V_B \iff {}^{\exists}P \in GL_m(\mathbb{C})\ {}^{\exists}Q \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } BQ = PA$$
$$\iff \underline{\hspace{6cm}}\ B = PAQ^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "P"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

- 行列の基本変形により

$$V_A \simeq V_B \qquad B = \begin{array}{r} r\{ \\ \end{array}\!\begin{array}{|c|c|}\hline \begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\simeq [\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}]^{\oplus r} \oplus [\mathbb{C}\longrightarrow 0]^{\oplus(n-r)} \oplus [0\longrightarrow\mathbb{C}]^{\oplus(m-r)} \qquad \square$$

Ex5 $Q = [\bullet\circlearrowright]$ の indecomp. rep. の同型類は以下.

$n \geq 1$，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\left[\ \mathbb{C}^n \circlearrowright \begin{array}{|cccc|}\hline \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \\ \hline\end{array}\ \right]$

問1 ② の答の言いかえ

proof Q の rep. で，次元ベクトルが (n) のものは
$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ から定まる $W_A := [\mathbb{C}^n \circlearrowright A]$ と iso.

- $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，

$$W_A \simeq W_B \iff {}^{\exists}P \in GL_m(\mathbb{C}) \text{ s.t. } BP = PA$$
$$\iff \underline{\hspace{4cm}}\ B = PAP^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "P"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

- Jordan 標準形により $W_A \simeq W_B$，$B = \begin{array}{|cccc|}\hline B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_\ell \\ \hline\end{array}$ $\quad B_i = \begin{array}{|cccc|}\hline \alpha_i & 1 & & 0 \\ & \alpha_i & 1 & \\ & & \alpha_i \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha_i \\ \hline\end{array}$

$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{\ell} W_{B_i} \qquad \square$$

- より一般の quiver ではどうなるか？

Def quiver Q が <u>有限表現型</u> $\iff$ Q の indecomp. rep. の同型類が有限個
そうでないとき 無限表現型

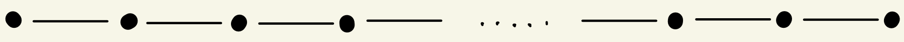
Ex $[\bullet]$，$[\bullet\longrightarrow\bullet]$ は有限表現型 $\quad [\bullet\circlearrowright]$ は無限表現型

Thm6 [Gabriel 1972] 連結な quiver Q に対し，以下は同値

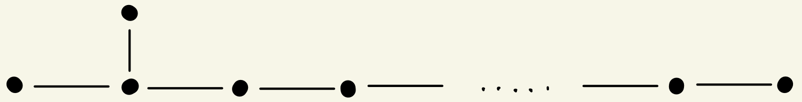
① Q は有限表現型

② Q は以下のグラフの辺を矢におきかえてえられる $\quad (n := \#Q_0)$

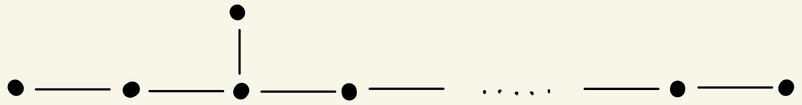
A_n $(n \geq 1)$



D_n $(n\geq4)$



E_n $(n=6,7,8)$



このような quiver を Dynkin quiver とよぶ

- 1つのグラフから 2^{n-1} 個の Dynkin quiver が定まる

Ex A_3 $\bullet\to\bullet\to\bullet$ $\bullet\to\bullet\leftarrow\bullet$ $\bullet\leftarrow\bullet\to\bullet$ $\bullet\leftarrow\bullet\leftarrow\bullet$

Def ① quiver Q の 2次形式 $q_Q : \mathbb{R}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下で定める

$$q_Q(x) := \sum_{i\in Q_0} x_i^2 - \sum_{a\in Q_1} x_{s(a)}x_{t(a)} \quad \left(x=(x_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{R}^{Q_0} \right)$$

(q_Q はグラフのみで決まる)

② Q : Dynkin quiver

$x\in\mathbb{Z}^{Q_0}$ が root $\Longleftrightarrow$ $q_Q(x)=1$

さらに $x\in\mathbb{Z}_{\geq0}^{Q_0}$ のとき. positive root

Ex A_n のとき

$$q_Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 \right)$$

positive root は $(0,\cdots,0,\overset{i}{1},\cdots,\overset{j}{1},0,\cdots0)$ $(1\leq i\leq j\leq n)$

の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個

Thm 7 (Thm 6 のつづき)

Dynkin quiver Q に対し 以下の全単射がある

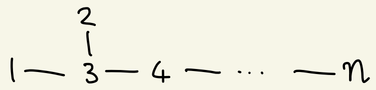
$$\{ Q \text{ の indecomp. rep. の同型類} \} \longrightarrow \{ q_Q \text{ の positive roots} \}$$
$$V \longmapsto \underline{\dim} V$$

Ex $Q=[\bullet\to\bullet]$ のとき positive root は $(1,1)$ $(1,0)$ $(0,1)$ の3個

A_2 Ex5 より indecomp. rep. は $[\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}]$ $[\mathbb{C}\to0]$ $[0\to\mathbb{C}]$ の3個

Q	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
positive root の数	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	63	120

Ex D_n の positive roots は以下の $n(n-1)$ 個

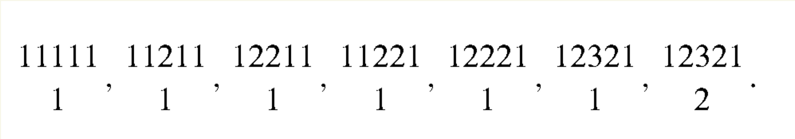


$0\overset{0}{0}0\cdots0\underset{i}{1}\cdots\underset{j}{1}0\cdots0$ $(3\leq i\leq j\leq n)$　　$1\overset{0}{1}1\cdots\underset{i}{1}0\cdots0$ $(1\leq i\leq n,\ i\neq 2)$

$1\overset{1}{2}2\cdots2\underset{i}{1}\cdots\underset{j}{1}0\cdots0$ $(3\leq i\leq j\leq n)$　　$0\overset{1}{1}1\cdots\underset{i}{1}0\cdots0$ $(2\leq i\leq n)$

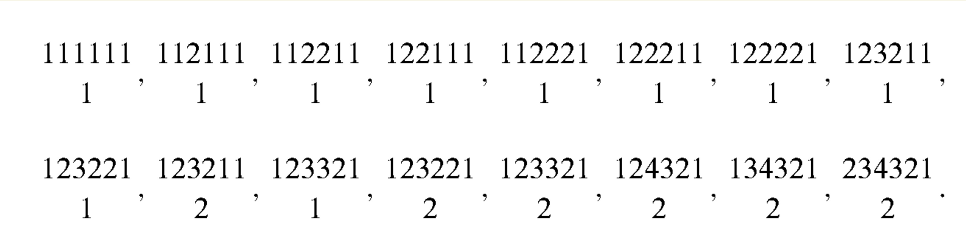
- E_n の positive roots は、以下と部分グラフの positive roots

E_6



$\begin{smallmatrix}11111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}11211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}11221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}12221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}12321\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}12321\\2\end{smallmatrix}.$

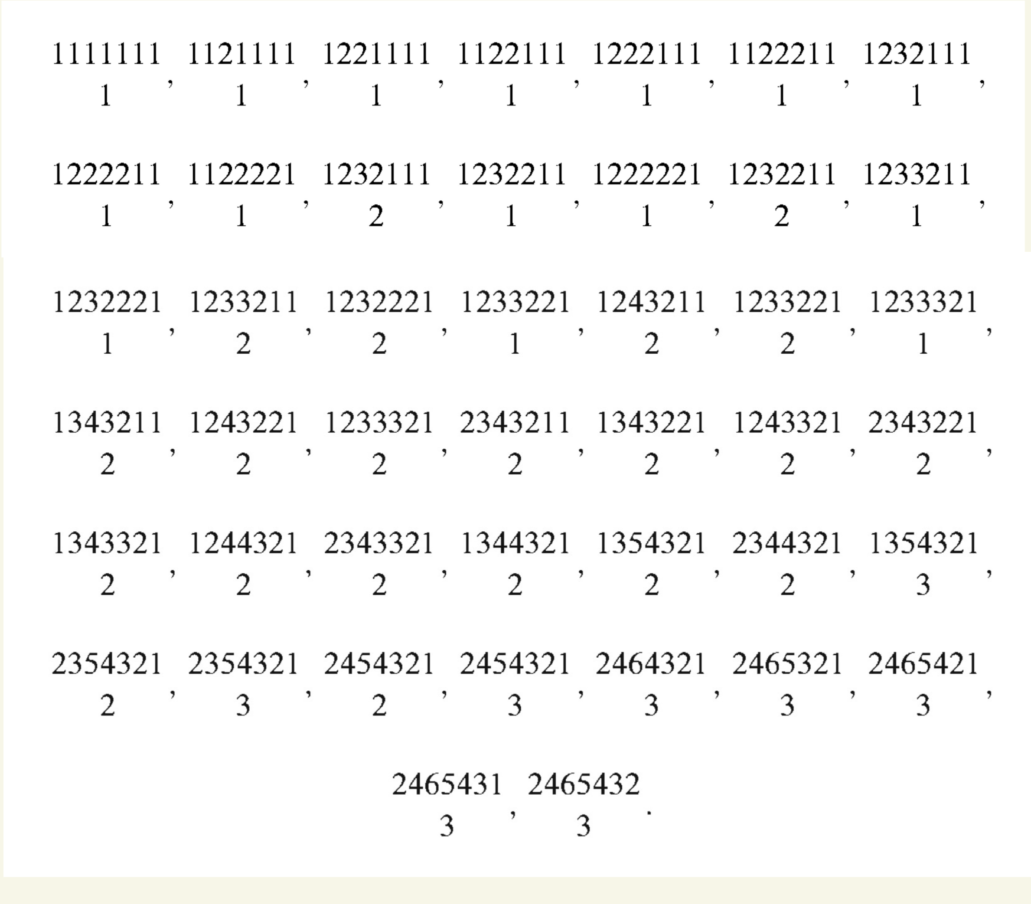
E_7



$\begin{smallmatrix}111111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}112111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}112211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}122111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}112221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}122211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}122221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}123211\\1\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}123221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}123211\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}123321\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}123221\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}123321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}124321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}134321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}234321\\2\end{smallmatrix}.$

E_8



$\begin{smallmatrix}1111111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1121111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1221111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1122111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1222111\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1122211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1232111\\1\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}1222211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1122221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1232111\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1232211\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1222221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1232211\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1233211\\1\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}1232221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1233211\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1232221\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1233221\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1243211\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1233221\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1233321\\1\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}1343211\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1243221\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1233321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2343211\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1343221\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1243321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2343221\\2\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}1343321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1244321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2343321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1344321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1354321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2344321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1354321\\3\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}2354321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2354321\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2454321\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2454321\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2464321\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2465321\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2465421\\3\end{smallmatrix},$

$\begin{smallmatrix}2465431\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2465432\\3\end{smallmatrix}.$

[5]

レポート　以下の①〜③から１つを選んで解答せよ

① $[\bullet \rightrightarrows \bullet]$ の同型でない無限個の indecomp. rep. を挙げよ
（全て挙げる必要はない）

② quiver
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$
の indecomp. rep. の同型類を全て挙げよ
（Thm7 を用いて良い）

③ quiver $\bullet \longrightarrow \bullet$ の以下の表現を indecomp. rep. の直和に分解せよ

$$\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0&1&2&3 \\ 2&3&4&5 \\ 4&5&6&7 \end{bmatrix}} \mathbb{C}^3$$

補足：ベクトル空間の直和

① ベクトル空間 V, W に対し，

$$V \oplus W = \{ (x, y) \mid x \in V,\ y \in W \}$$

V のベクトルと W のベクトルのペアの全体

② 以下のように和とスカラー倍を定めることにより
$V \oplus W$ はベクトル空間になる

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$　　$x, x' \in V$, $y, y' \in W$
- $\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$　　$\alpha \in \mathbb{C}$

③ ベクトル空間 $V \oplus W$ を V と W の直和とよぶ

④ 線型写像 $f : V \longrightarrow W$ と $g : V' \longrightarrow W'$ に対し
線型写像 $f \oplus g : V \oplus V' \longrightarrow W \oplus W'$ が定まる

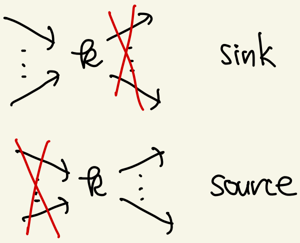
$$\begin{array}{ccc} V \oplus V' & \longrightarrow & W \oplus W' \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

Ex　$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^{n+m}$

注
- 複数のベクトル空間 $V_1, \cdots, V_n$ に対しても直和 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ が定まる
- 直和を直積と呼ぶこともある（今の状況では同じ）

§2 箙の鏡映とその応用

Def Q: quiver, $k\in Q_0$



① k : Qの sink $\iff$ $s(a)=k$ となる $a\in Q_1$ が存在しない

source $t(a)$

② σ_kQ : kを端点とする全ての矢の向きを逆にしてえられる quiver

Ex $Q=[1\to2\to3]$ $\sigma_1Q=[1\leftarrow2\to3]$ $\sigma_2Q=[1\leftarrow2\leftarrow3]$ $\sigma_3Q=[1\to2\leftarrow3]$

Recall ベクトル空間 V, W と線型写像 $f: V\longrightarrow W$に対し, Vの部分空間

$\mathrm{Ker}\, f := \{x\in V \mid f(x)=0\}$ が定まる

Def [Bernstein - Gelfand - Ponomarev 1973]

Q: quiver, $k\in Q_0$: sink　kを端点とする矢を

$$\begin{tikzcd} j_1 \arrow[rd, "a_1"] & \\ j_2 \arrow[r, "a_2"] & k \\ \vdots & \\ j_n \arrow[ruu, "a_n"'] & \end{tikzcd}$$

とする.

このとき kは σ_kQの source で, 矢

$$\begin{tikzcd} j_1 & \\ j_2 & k \arrow[lu, "b_1"'] \arrow[l, "b_2"'] \arrow[ld, "b_n"] \\ j_n & \end{tikzcd}$$

を持つ

Qの rep. $V=(V_i, V_a)$ から σ_kQの rep. $\sigma_k^+V=(V_i^+, V_a^+)$ を以下で定める

reflection (鏡映)

- $V_i^+ := \begin{cases} V_i & i\neq k \\ \mathrm{Ker}\, V_{-,k} & i=k \end{cases}$

$$V_{-,k} := \left[\begin{tikzcd} V_{j_1}\oplus\cdots\oplus V_{j_n} \arrow[r, "{[V_{a_1}\cdots V_{a_n}]}"] & V_k \\ (x_1,\cdots,x_n) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[r, mapsto] & V_{a_1}(x_1)+\cdots+V_{a_n}(x_n) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \end{tikzcd}\right]$$

- $a\in(\sigma_kQ)_1$ $a\neq b_1,\cdots,b_n$ なら $V_a^+ := V_a$

$V_{b_l}^+ : V_k^+ \longrightarrow V_{j_l}$ $(l=1,\cdots,n)$ を

$$\begin{array}{ccc} V_k^+ & \subset & V_{j_1}\oplus\cdots\oplus V_{j_n} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & = & (V_{b_1}^+(x),\cdots,V_{b_n}^+(x)) \end{array}$$

と定める

Ex $Q=[1\xrightarrow{a}2\xrightarrow{b}3]$ の rep. $V=[V_1\xrightarrow{V_a}V_2\xrightarrow{V_b}V_3]$

$\sigma_3Q=[1\xrightarrow{a}2\leftarrow3]$　　$\sigma_3^+V=[V_1\xrightarrow{V_a}V_2\hookleftarrow \mathrm{Ker}\,V_b]$

$$\sigma_3^+[\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}] = [\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\longleftarrow0]$$

$$\sigma_3^+[\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\longrightarrow0] = [\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\xleftarrow{1}\mathbb{C}]$$

Ex

$$Q = \left[\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, shift left, "a_1"] \arrow[dr, shift right, "a_2"'] & \\ & 3 \\ 2 \arrow[ur, "a_3"'] & \end{tikzcd}\right] \qquad \sigma_3 Q = \left[\begin{tikzcd} 1 & \\ & 3 \arrow[ul, shift right, "b_1"'] \arrow[ul, shift left, "b_2"] \arrow[dl, "b_3"] \\ 2 & \end{tikzcd}\right]$$

Qの rep. $V = \left[\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[dr, shift left, "1"] \arrow[dr, shift right, "0"'] & \\ & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}\right]$ に対し

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_3^+ \arrow[r, "\begin{bmatrix} V_{b_1}^+ \\ V_{b_2}^+ \\ V_{b_3}^+ \end{bmatrix}"] \arrow[d, equal] & V_1^{\oplus 2} \oplus V_2 \arrow[r, "{V_{-,3} = [V_{a_1}\ V_{a_2}\ V_{a_3}]}"] \arrow[d, equal] & V_3 \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}"'] & \mathbb{C}^3 \arrow[r, "{[1\,0\,1]}"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\sigma_3^+ V = \left[\begin{tikzcd} \mathbb{C} & \\ & \mathbb{C}^{\oplus 2} \arrow[ul, shift right, "{[10]}"'] \arrow[ul, shift left, "{[01]}"] \arrow[dl, "{[-10]}"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}\right]$$

- Qの rep. $S(k)$ が 以下で与えられた

① $S(k)_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \mathbb{C} & i = k \end{cases}$ ② $\forall a \in Q_1,\ S(j)_i = 0$

Prop 1 Qの sink k に対し $\sigma_k^+(S(k)) = 0$

proof $i \neq k$ $\sigma_k^+(S(k))_i = S(k)_i = 0$

$\sigma_k^+(S(k))_k = \mathrm{Ker}(0 \longrightarrow \mathbb{C}) = 0$ □

$$\begin{tikzcd} & Q : \text{quiver} \arrow[d, squiggly] & & V, W : Q\text{の rep.} \arrow[d, squiggly] \\ k \in Q_0 : \text{sink} & \sigma_k Q : \text{quiver} & & \sigma_k^+ V,\ \sigma_k^+ W : \sigma_k Q\text{ の rep.} \end{tikzcd}$$

Def morphism $f = (f_i) : V \longrightarrow W$ に対し,

morphism $\sigma_k^+ f = (f_i^+) : \sigma_k^+ V \longrightarrow \sigma_k^+ W$ を以下で定める

- $i \neq k$ のとき $f_i^+ := f_i$
- $i = k$ のとき

$$\begin{tikzcd} V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} \arrow[r, "V_{-,k}"] \arrow[d, "f_{j_1} \oplus \cdots \oplus f_{j_n}"'] & V_k \arrow[d, "f_k"] \\ W_{j_1} \oplus \cdots \oplus W_{j_n} \arrow[r, "W_{-,k}"'] & W_k \end{tikzcd}$$

$W_{-,k} \circ (f_{j_1} \oplus \cdots \oplus f_{j_n}) = f_k \circ V_{-,k}$ が成立するので

$$f_{j_1} \oplus \cdots \oplus f_{j_n}(V_k^+) \subset W_k^+$$

$f_{j_1} \oplus \cdots \oplus f_{j_n}$ の V_k^+ への制限を $f_k^+ : V_k^+ \longrightarrow W_k^+$ と表す

Prop 2 Q: quiver. $k \in Q_0$: sink, V, W: Q の rep.

① $f : V \longrightarrow W$: isomorphism $\Longrightarrow$ $\sigma_k^+ f : \sigma_k^+ V \longrightarrow \sigma_k^+ W$: isomorphism

とくに $V \simeq W \Rightarrow \sigma_k^+ V \simeq \sigma_k^+ W$

② $\sigma_k^+ (V \oplus W) \simeq (\sigma_k^+ V) \oplus (\sigma_k^+ W)$

- Q の source に対しては σ_k^- が 定められる

Recall ベクトル空間 V, W と 線型写像 $f : V \longrightarrow W$ に対し.

- W の部分空間 $\mathrm{Im} f := \{ f(x) \mid x \in V \}$
- W の 商空間 $\mathrm{Cok} f := W / \mathrm{Im} f$

  ($W \ni x, y$ が $x - y \in \mathrm{Im} f$ をみたすときに、同じものとみなす
  詳しくは 〔松坂〕 参照)
- 自然 な 全射 $\pi : W \longrightarrow \mathrm{Cok} f$ が 定まる

Def Q: quiver. $k \in Q_0$: source k を端点とする矢を

$$\begin{tikzcd} & j_1 \\ k \arrow[ur, "a_1"] \arrow[r, "a_2"] \arrow[dr, "a_n"'] & j_2 \\ & \vdots \\ & j_n \end{tikzcd}$$

とする.

このとき k は $\sigma_k Q$ の sink で. 矢

$$\begin{tikzcd} & j_1 \arrow[dl, "b_1"'] \\ k & j_2 \arrow[l, "b_2"'] \\ & \vdots \\ & j_n \arrow[ul, "b_n"] \end{tikzcd}$$

を持つ

Q の rep. $V = (V_i, V_a)$ から $\sigma_k Q$ の rep. $\sigma_k^- V = (V_i^-, V_a^-)$ を 以下で定める reflection (鏡映)

- $V_i^- := \begin{cases} V_i & i \neq k \\ \mathrm{Cok}\, V_{k,-} & i = k \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} V_{k,-} := \Bigl[& V_k \arrow[r, "{\begin{bmatrix} V_{a_1} \\ \vdots \\ V_{a_n} \end{bmatrix}}"] & V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} & \Bigr] \\ & x \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] & (V_{a_1}(x), \cdots, V_{a_n}(x)) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & \end{tikzcd}$$

- $a \in (\sigma_k Q)_1$ $a \neq b_1, \cdots, b_n$ なら $V_a^- := V_a$

  $V_{b_l}^- : V_{j_l} \longrightarrow V_k^-$ $(l = 1, \cdots, n)$ を
  自然 な 全射 $V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} \longrightarrow V_k^-$ の V_{j_l} への 制限 と定める

Ex $Q = [1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{b} 3]$ の rep. $V = [V_1 \xrightarrow{V_a} V_2 \xleftarrow{V_b} V_3]$

$\sigma_3 Q = [1 \xrightarrow{a} 2 \longrightarrow 3]$ $\sigma_3^- V = [V_1 \xrightarrow{V_a} V_2 \longrightarrow \mathrm{Cok}\, V_b]$

$$\sigma_3^-[\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}] = [\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\longleftarrow 0]$$
$$\sigma_3^-[\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\longrightarrow 0] = [\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}\xleftarrow{1}\mathbb{C}]$$

Prop 1' Qの source k に対し $\sigma_k^-(S(k))=0$

Def morphism $f=(f_i): V\longrightarrow W$ に対し,

morphism $\sigma_k^- f = (f_i^-) : \sigma_k^- V \longrightarrow \sigma_k^- W$ を以下で定める

- $i\neq k$ のとき $f_i^- := f_i$
- $i=k$ のとき

$$\begin{tikzcd}
V_k \arrow[r, "V_{k,-}"] \arrow[d, "f_k"'] & V_{j_1}\oplus\cdots\oplus V_{j_n} \arrow[d, "f_{j_1}\oplus\cdots\oplus f_{j_n}"] \\
W_k \arrow[r, "W_{k,-}"'] & W_{j_1}\oplus\cdots\oplus W_{j_n}
\end{tikzcd}$$

$(f_{j_1}\oplus\cdots\oplus f_{j_n})\circ V_{k,-} = W_{k,-}\circ f_k$ が成立するので

$f_k^- : V_k^- \longrightarrow W_k^-$ が自然に定まる

Prop 2' Q: quiver. $k\in Q_0$: source, V, W: Qの rep.

① $f: V\longrightarrow W$: isomorphism $\Longrightarrow$ $\sigma_k^- f : \sigma_k^- V \longrightarrow \sigma_k^- W$: isomorphism

とくに $V\simeq W \Longrightarrow \sigma_k^- V \simeq \sigma_k^- W$

② $\sigma_k^-(V\oplus W) \simeq (\sigma_k^- V)\oplus(\sigma_k^- W)$

- Q: quiver k: Qの sink $\Longrightarrow$ k: $\sigma_k Q$の source で $\sigma_k(\sigma_k Q)=Q$

$$\{Q\text{の rep.}\} \underset{\sigma_k^-}{\overset{\sigma_k^+}{\rightleftarrows}} \{\sigma_k Q\text{の rep.}\}$$

Rem σ_k^+ は (Qの表現の圏) から ($\sigma_k Q$の表現の圏) への関手 を与える

category functor

σ_k^- $\sigma_k Q$ Q

Thm 3 Q: quiver k: Qの sink, V: Qの indecomp. rep.

source

① $V\simeq S(k) \Longrightarrow \sigma_k^{\pm} V = 0$

② $V\not\simeq S(k) \Longrightarrow \sigma_k^{\pm} V$ は $\sigma_k Q$の indecomp. rep. であり,

$\sigma_k^{\mp}(\sigma_k^{\pm} V) \simeq V$

特に次の全単射をうる

$$\{ Q\text{の indecomp. rep. の同型類} \} \underset{\sigma_k^-}{\overset{\sigma_k^+}{\rightleftarrows}} \{ \sigma_k Q\text{の indecomp. rep. の同型類} \}$$

<u>proof</u> kと(kを端点とする矢)以外では V, σ_k^+V, $\sigma_k^-(\sigma_k^+V)$ は同じ

$\underline{\qquad\qquad\qquad}$ 〃 $\underline{\qquad\qquad\qquad}$ のみ見ればよい

$$\begin{tikzcd} j_1 \arrow[drr, "a_1"] & & \\ \vdots & & k \\ j_n \arrow[urr, "a_n"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_{j_1} \arrow[drr, "V_{a_1}"] & & \\ \vdots & & V_k \\ V_{j_n} \arrow[urr, "V_{a_n}"'] & & \end{tikzcd} \qquad V_{-,k} : V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n} \xrightarrow{[V_{a_1} \cdots V_{a_n}]} V_k$$

Ⓐ V: indecomp. $V \neq S(k) \Longrightarrow V_{-,k}$ は全射

∵ Qの rep. Vの V_kを $\mathrm{Im}\, V_{-,k}$ におきかえてえられる Qの rep. を V'と表す

V_kの部分空間 Uで. $V_k = \mathrm{Im}\, V_{-,k} \oplus U$ となるものをとる

このとき Qの rep. として $V \simeq V' \oplus S(k)^{\oplus \dim_{\mathbb{C}} U}$ となる

Vは indecomp なので $V = V'$ つまり $\mathrm{Im}\, V_{-,k}$ は全射 □

Ⓑ $V_{-,k}$ が全射 $\Rightarrow V \simeq \sigma_k^-(\sigma_k^+ V)$

∵ $W := \sigma_k^+ V$ とおくと

$$\begin{tikzcd} & V_{j_1} = W_{j_1} \\ W_k = \mathrm{Ker}\, V_{-,k} \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots \\ & V_{j_n} = W_{j_n} \end{tikzcd}$$

$W_{k,-} = [\mathrm{Ker}\, V_{-,k} \hookrightarrow V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n}]$

$$\mathrm{Cok}\, W_{k,-} = \frac{V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_n}}{\mathrm{Ker}\, V_{-,k}} \underset{\text{準同型定理}}{\simeq} \mathrm{Im}\, V_{-,k} \underset{V_{-,k}:\text{全射}}{=} V_k$$

□

Ⓒ V: indecomp. $V \neq S(k) \Longrightarrow \sigma_k^+ V$: indecomp.

∵ $\sigma_k^+ V \simeq W \oplus W'$ とすると.

$$V \underset{ⒶⒷ}{\simeq} \sigma_k^-(\sigma_k^+ V) \underset{\text{Prop}2'}{\simeq} (\sigma_k^- W) \oplus (\sigma_k^- W')$$

V: indecomp. より $\sigma_k^- W = 0$ or $\sigma_k^- W' = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$W \underset{ⒶⒷ\text{の dual}}{\simeq} \sigma_k^+(\sigma_k^- W) = 0 \qquad W' = 0$$

□

Ex $Q = [1 \to 2 \to 3]$ $\sigma_3 Q = [1 \to 2 \leftarrow 3]$

Q の indecomp. rep.

$[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}]$

$[0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}]$ $[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \to 0]$

$[0 \to 0 \to \mathbb{C}]$ $[0 \to \mathbb{C} \to 0]$ $[\mathbb{C} \to 0 \to 0]$

$S(3)$

$\sigma_3^+ \downarrow$ $\uparrow \sigma_3^-$

$[0 \to 0 \leftarrow \mathbb{C}]$ $S(3)$

$\sigma_3 Q$ の indecomp. rep.

$[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \leftarrow 0]$

$[0 \to \mathbb{C} \leftarrow 0]$ $[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}]$

$[0 \to \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}]$ $[\mathbb{C} \to 0 \leftarrow 0]$

レポート ① $Q = [1 \to 2 \leftarrow 3]$ の以下の6個の indecomp. rep. V に対し、$\sigma_2^+ V$ を求めよ

$[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \leftarrow 0]$ $[0 \to 0 \leftarrow \mathbb{C}]$

$[0 \to \mathbb{C} \leftarrow 0]$ $[\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}]$

$[0 \to \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}]$ $[\mathbb{C} \to 0 \leftarrow 0]$

② $Q = [1 \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} 2]$ に対し以下を求めよ.

$\sigma_1^+ \sigma_2^+ \cdots \sigma_1^+ \sigma_2^+ \sigma_1^+ \sigma_2^+ S(1)$ ($2n$回の reflection)

Def $\mathrm{ind}\, Q := \{ Q$ の indecomp. rep. の同型類 $\}$

Ex $\mathrm{ind}\,[\bullet] = \{\mathbb{C}\}$

$\mathrm{ind}\,[\bullet \to \bullet] = \{ [\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}],\ S(1) = [\mathbb{C} \to 0],\ S(2) = [0 \to \mathbb{C}] \}$

$$\mathrm{ind}\,[\bullet \circlearrowleft] = \left\{ \mathbb{C}^n \circlearrowleft \boxed{\begin{matrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{matrix}} \;\middle|\; n \geq 1,\ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

Thm 3 (要約) Q : quiver $k \in Q_0$: sink

$\Rightarrow$ 全単射 $\mathrm{ind}\, Q \setminus \{S(k)\} \underset{\sigma_k^-}{\overset{\sigma_k^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{ind}\, \sigma_k Q \setminus \{S(k)\}$

- reflection による次元ベクトルの変化を記述する

Def 双線型写像 $(-,-) : \mathbb{R}^{Q_0}\times\mathbb{R}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$x=(x_i),\ y=(y_i)\in\mathbb{R}^{Q_0}$ に対し

$$(x,y) := \sum_{i\in Q_0} x_i y_i - \frac{1}{2}\sum_{a\in Q_1}\left(x_{s(a)}y_{t(a)}+x_{t(a)}y_{s(a)}\right)$$ で定める

Fact 4 ① $(x,x)=q_Q(x)$, $(x,y)=(y,x)$

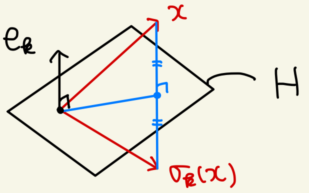
② Q : Dynkin quiver $\Rightarrow$ $(-,-)$ は $\mathbb{R}^{Q_0}$ の内積を与える（標準内積とは異なる）

レポート Fact 4 ② を確かめよ

Def 線型変換 $\sigma_k : \mathbb{R}^{Q_0}\longrightarrow\mathbb{R}^{Q_0}$ を

$\sigma_k(x) := x-2(e_k,x)e_k$ で定める $\left(e_k := (0,\cdots,0,\overset{k}{1},0,\cdots,0)\right)$

Rem σ_k は $\mathbb{R}^{Q_0}$ の超平面 $H=\{x\in\mathbb{R}^{Q_0}\mid (e_i,x)=0\}$ に関する鏡映 reflection



Fact 5 ① $\sigma_k(e_k) = -e_k$

② $\sigma_k\circ\sigma_k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{Q_0}}$

Prop 6 Q : quiver, k : Q の sink, $V\in\operatorname{ind}Q$

$$\underline{\dim}\,\sigma_k^+ V = \begin{cases}\sigma_k(\underline{\dim}\,V) & V\neq S(k)\\ 0 & V\simeq S(k)\end{cases}$$

- reflection の応用

Def Q, Q' : quiver が reflection equivalent

$\Longleftrightarrow$ Q の点の列 $i_1,\cdots,i_\ell\in Q_0$ で以下の条件を満たすものがある

- 各 $m=1,\cdots,\ell$ に対し, i_m は $\sigma_{i_{m-1}}\cdots\sigma_{i_2}\sigma_{i_1}Q$ の sink or source

Cor 7 Q, Q' : reflection equivalent $\Rightarrow$ $\#\operatorname{ind}Q = \#\operatorname{ind}Q'$

proof **Thm3** を繰り返し用いよ □

Def グラフが木であるとは、異なる辺の列 $i_1 \overset{a_1}{—} i_2 \overset{a_2}{—} \cdots \overset{a_{l-1}}{—} i_l = i_1$ が存在しないこと $(l \geq 2)$

Prop 8 T: tree Q, Q': T の辺を矢におきかえてえられる quiver

① Q と Q' は reflection equivalent

② $\# \operatorname{ind} Q = \# \operatorname{ind} Q'$

proof ① $\# Q_0$ についての数学的帰納法で示される

② **Cor7** と ① より従う □

Def $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, $Q' = (Q_0', Q_1', s', t)$: quiver

Q' が Q の部分 quiver $\Leftrightarrow$ $Q_0' \subset Q_0$, $Q_1' \subset Q_1$

$\forall a \in Q_1'$, $s(a) = s'(a)$, $t(a) = t'(a)$

Prop 9 Q': Q の部分 quiver $\Longrightarrow$ $\# \operatorname{ind} Q' \leq \# \operatorname{ind} Q$

proof 単射 $\operatorname{ind} Q' \longrightarrow \operatorname{ind} Q$ を構成すればよい

Q' の rep. $V = (V_i, V_a)_{i \in Q_0', a \in Q_1'}$ から

Q の rep. $FV = (W_i, W_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ を以下で定める

- $W_i = \begin{cases} V_i & i \in Q_0' \\ 0 & i \notin Q_0' \end{cases}$
- $W_a = \begin{cases} W_a & a \in Q_1' \\ 0 & a \in Q_1 \end{cases}$

このとき、Q' の rep. V, V' に対し、以下が成立することが容易に分かる。

① V: indecomp. $\Longrightarrow$ FV: indecomp.

② $V \simeq V'$ $\Leftrightarrow$ $FV \simeq FV'$

つまり単射 $F: \operatorname{ind} Q' \longrightarrow \operatorname{ind} Q$ が得られた □

Ex $Q = [1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2 \longrightarrow 3]$ $Q' = [1 \xrightarrow{a} 2]$

$V = [V_1 \xrightarrow{V_a} V_2]$ に対し、$FV = [V_1 \underset{0}{\overset{V_a}{\rightrightarrows}} V_2 \xrightarrow{0} 0]$

Def10 quiver Q と 矢 $[a_0 : i_0 \to j_0] \in Q_1$ に対し，a_0 を取り除いて i_0 と j_0 を同一視して得られる quiver を $Q[a_0^{-1}]$ と表す

Ex $Q = \left[\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "a_0"] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\ & 3 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd}\right]$ $Q[a_0^{-1}] = \left[\begin{tikzcd} 1=2 \arrow[d, bend left, "b"] \\ 3 \arrow[u, bend left, "c"] \end{tikzcd}\right]$

Prop11 $Q' = Q[a_0^{-1}]$ に対し $\# \operatorname{ind} Q' \leq \# \operatorname{ind} Q$

proof 単射 $\operatorname{ind} Q' \longrightarrow \operatorname{ind} Q$ を構成すればよい

$i_0 \xrightarrow{a_0} j_0$ とすると，Q' では i_0 と j_0 は 1つの点 k_0 となる

Q' の rep. $V = (V_i, V_a)_{i \in Q'_0, a \in Q'_1}$ から

Q の rep. $GV = (W_i, W_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ を以下で定める

- $W_i = \begin{cases} V_{k_0} & i = i_0 \text{ or } j_0 \\ V_i & \text{else} \end{cases}$ • $W_a = \begin{cases} \mathrm{id}\, V_{i_0} & a = a_0 \\ V_a & \text{else} \end{cases}$

このとき，Q' の rep. V, V' に対し，以下が成立することが容易に分かる．

① V: indecomp. $\Longrightarrow$ GV: indecomp.

② $V \simeq V'$ $\Longleftrightarrow$ $GV \simeq GV'$

つまり 単射 $G : \operatorname{ind} Q' \longrightarrow \operatorname{ind} Q$ が得られた □

Ex 上の Ex の Q と $Q[a_0^{-1}]$

$$V = \left[\begin{tikzcd} V_{k_0} \arrow[d, bend left, "V_b"] \\ V_3 \arrow[u, bend left, "V_c"] \end{tikzcd}\right] \text{ に対し } GV = \left[\begin{tikzcd} V_{k_0} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & V_{k_0} \arrow[dl, "V_b"] \\ & V_3 \arrow[ul, "V_c"] & \end{tikzcd}\right]$$

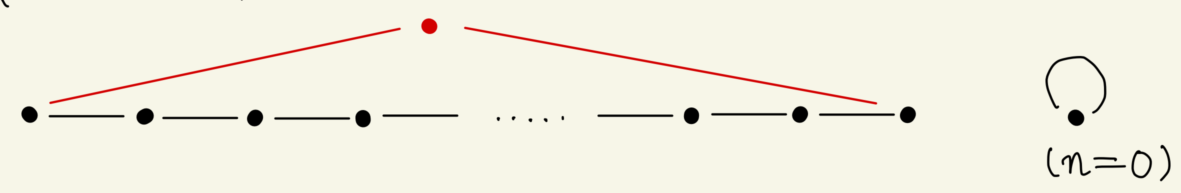
---

§1 Thm3 有限表現型 $\Longrightarrow$ Dynkin quiver の証明

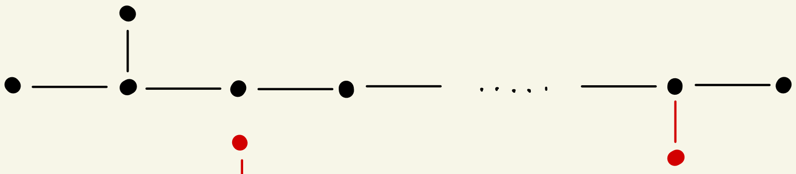
- いろいろな証明があるが，以下では reflection を主に用いた証明を与える

Def 以下のグラフの辺を矢におきかえてえられる quiver を 拡大Dynkin quiver とよぶ ($\# Q_0 = n+1$)

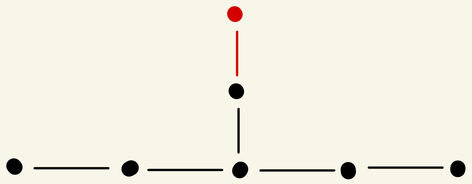
$\tilde{A}_n$ $(n \geq 0)$



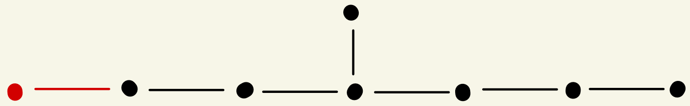
$\tilde{D}_n$ $(n \geq 4)$



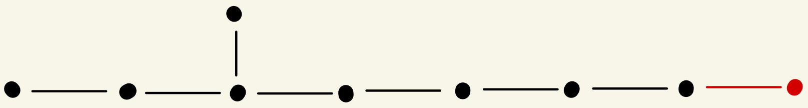
$\tilde{E}_6$



$\tilde{E}_7$



$\tilde{E}_8$



Prop 12 連結な quiver が Dynkin quiver でないならば、拡大 Dynkin quiver を部分 quiver に持つ

proof 連結なグラフが $\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_n$ を部分グラフに持たないなら、A_n, D_n, E_n のいずれかであることが、容易に確かめられる □

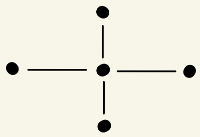
- Prop 9 と 12 より、拡大 Dynkin quiver が無限表現型であることを示せば良い

① $\tilde{A}_n$ のとき

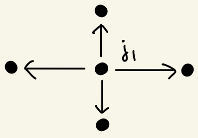
Q に Def 10 の操作を繰り返して $\tilde{A}_0$  にできる

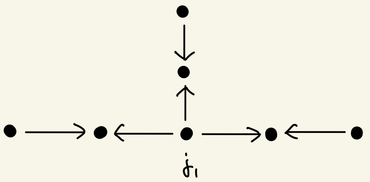
これは無限表現型なので Prop11 より Q も無限表現型

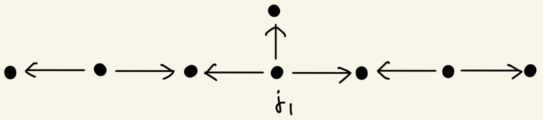
② $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_n$ のとき

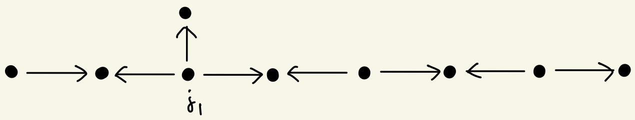
$\tilde{D}_n$ なら Def 10 の操作を繰り返して $\tilde{D}_4$  にできるので $\tilde{D}_4$ のみ考えればよい

これらのグラフは tree なので、Prop8 ② より、1つの quiver Q が無限表現型であることを示せば良い









全ての点は sink か source である

sink を $i_1, i_2, \cdots, i_\ell$, source を $j_1, j_2, \cdots, j_m$ とし

$\sigma_I := \sigma_{i_\ell} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1}$, $\sigma_J := \sigma_{j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{j_1}$

$C := \sigma_J \circ \sigma_I$ とおくと $Q = CQ$ が成立する

Ex

$$\left[\begin{tikzcd} & 2 & \\ 1 & 5 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & 3 \\ & 4 & \end{tikzcd}\right] \xrightarrow{\sigma_I = \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1} \left[\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & 5 & 3 \arrow[l] \\ & 4 \arrow[u] & \end{tikzcd}\right] \xrightarrow{\sigma_J = \sigma_5} \left[\begin{tikzcd} & 2 & \\ 1 & 5 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & 3 \\ & 4 & \end{tikzcd}\right]$$

rep. に対しても $\sigma_I^+ := \sigma_{i_\ell}^+ \circ \cdots \circ \sigma_{i_1}^+$, $\sigma_J^+ := \sigma_{j_m}^+ \circ \cdots \circ \sigma_{j_1}^+$

$C^+ := \sigma_J^+ \circ \sigma_I^+$ とおき. 各 $\ell \geq 0$ に対して Q の rep.

$C^{+\ell}(S(j_1))$ を考える

$\boxed{\text{Prop 6 を用いて次元ベクトルを計算すると. これが全て非同型な indecomp. rep. であることが分かる.}}$ (*)

特に Q は無限表現型 □

Ex $Q = \left[\begin{tikzcd} & 2 & \\ 1 & 5 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & 3 \\ & 4 & \end{tikzcd}\right]$ $\underline{\dim}\, S(5) = \begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_1} \begin{bmatrix} & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_2} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_3} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_4} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_5} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 3 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_I} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_J} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 3 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_I} \begin{bmatrix} & 2 & \\ 2 & 3 & 2 \\ & 2 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_J} \begin{bmatrix} & 2 & \\ 2 & 5 & 2 \\ & 2 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_I} \cdots\cdots$$

$$\underline{\dim}\, C^{+\ell}(S(j_1)) = \begin{bmatrix} & \ell & \\ \ell & 2\ell+1 & \ell \\ & \ell & \end{bmatrix}$$

Rem ① §1 Thm 3 Dynkin quiver $\Longrightarrow$ 有限表現型

$\underline{\dim} : \mathrm{ind}\, Q \longrightarrow \{ \Phi_Q \text{ の positive roots} \}$: 全単射

の証明も reflection を駆使して与えられる [草場]

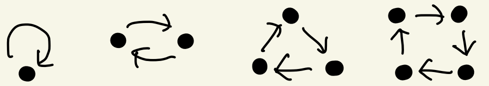
② Dynkin でない quiver に対しては. root の定義を変えると

全射 $\underline{\dim} : \mathrm{ind}\, Q \longrightarrow \{ \Phi_Q \text{ の positive roots} \}$ が得られる (Kacの定理)

[DW]

§3 箙の変異と団代数

Conway－Coxeter frieze (1973)　　frieze : 壁の帯状装飾

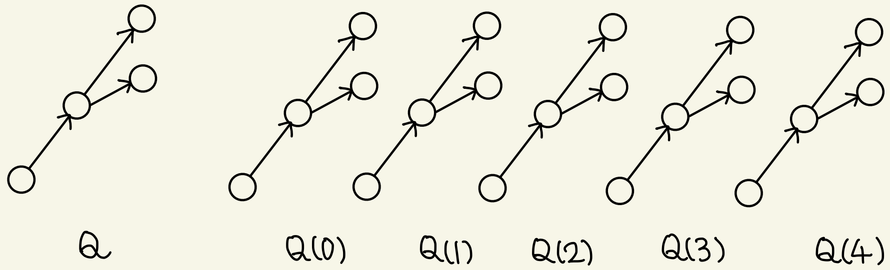
Q : サイクル ( , …) を持たない quiver

Q から 新しい 無限 quiver を 以下で定める

① Q のコピー Q(i) (i≥0) を横一列に並べる (矢は常に右側に向かう)

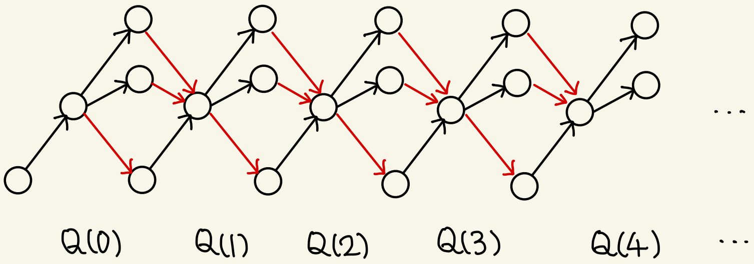
Ex

D_4



② Q の各矢に対し、逆向きの矢を Q(i) から Q(i+1) へ描く

Ex



③ Q(0) の各点に数字 1 を書く

以下のルールを満たすように左から順に数字を書いていく

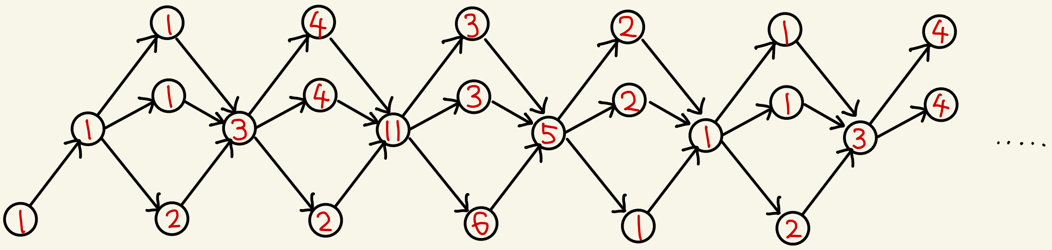
(ルール)

$$\begin{tikzcd}
 & b_1 \arrow[rd] & \\
 & b_2 \arrow[r] & c \\
a \arrow[ruu] \arrow[ru] \arrow[rd] & \vdots & \\
 & b_\ell \arrow[ruu] &
\end{tikzcd}$$

(a と c は Q の同じ点に対応)

$$\Longrightarrow \quad ac - b_1 b_2 \cdots b_\ell = 1$$

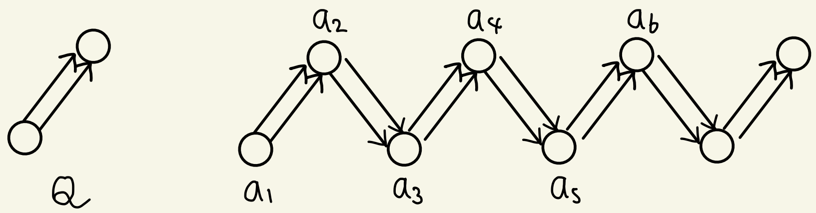
Ex



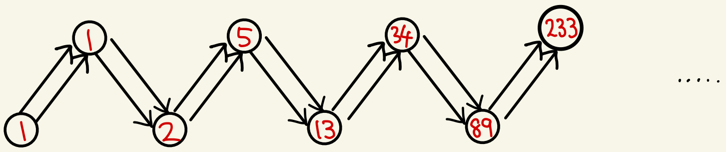
Observation　① 全て自然数　② 周期性

Ex

$\widetilde{A}_1$



$$a_{n-2}a_n - a_{n-1}^2 = 1$$



- quiver が複雑になっても自然数だが、周期性は不成立

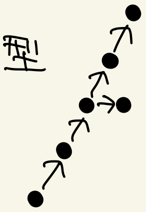
レポート問題 ① または ② に答えよ

① 以下のいずれか1つの主張を証明せよ

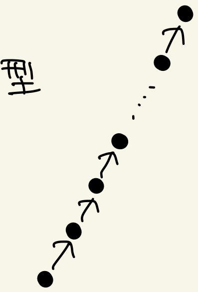
- Prop 8 ①
- Prop 9 証明中の①②
- Prop 11 証明中の①②
- Prop 12
- 18ページ (＊)

② 以下のどちらかの quiver の frieze を計算せよ

- E_6型



A_n型



- 有理関数 frieze　$Q_0=\{1,2,\cdots,n\}$ とする　①②は 19ページと同じ

③' $Q(0)$ の各点 i に変数 x_i を書く

以下のルールを満たすように左から順に数字を書いていく

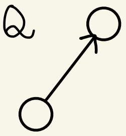
(ルール)

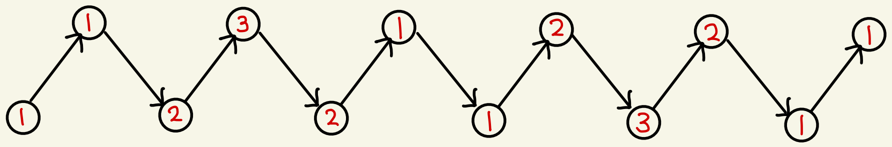
$$\begin{tikzcd} & b_1 \arrow[ddr] & \\ & b_2 \arrow[dr] & \\ a \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & c \\ & b_\ell \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(a と c は Q の同じ点に対応)

$$\Longrightarrow\quad ac-b_1b_2\cdots b_\ell=1$$

Ex　Q





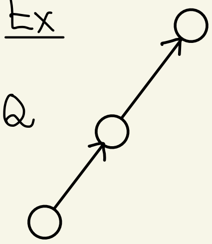
$$\begin{tikzcd} & x_2 \arrow[dr] & & \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \arrow[dr] & & x_1 \arrow[dr] & \\ x_1 \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_1} \arrow[ur] & & \frac{x_1+1}{x_2} \arrow[ur] & & x_2 \end{tikzcd}$$

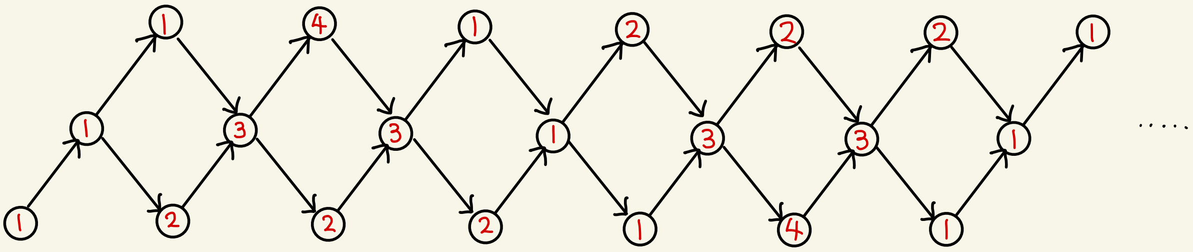
くり返し

$$\frac{\frac{x_2+1}{x_1}+1}{x_2}=\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2},\qquad \frac{\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}+1}{\frac{x_2+1}{x_1}}=\frac{x_1(x_1x_2+x_1+x_2+1)}{x_1x_2(x_2+1)}=\frac{x_1+1}{x_2},\qquad\cdots$$

- $x_1=x_2=1$ を代入して、元の frieze が得られる

Ex

Q




$$\begin{tikzcd}
 & & x_3 \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \arrow[dr] & & x_1 \arrow[dr] & & \\
 & x_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dr] & \\
x_1 \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_1} \arrow[ur] & & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_3} \arrow[ur] & & x_3
\end{tikzcd}$$

くり返し

Observation 1 ① 全て分母は単項式（特に各 x_i に 1 を代入すると整数）

② Q : Dynkin quiver ⟺ 周期性

- これは団代数（cluster algebra）[Fomin-Zelevinsky] の理論によって説明される

Cluster algebra : quiver Q から定義される．有理関数の集まり（代数 ≒ 環）
algebra ring

Def（quiver の変異（mutation））

quiver Q が loop •↺ と 2-cycle •⇄• を持たないと仮定

$k \in Q_0$ に対し．以下で新しい quiver $\mu_k Q$ を定める

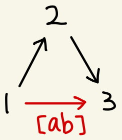
① $t(a) = k$ である全ての矢 a と，$s(b) = k$ である全ての矢 b に対し．
新しい矢 $[ab] : s(a) \longrightarrow t(b)$ を付け加える

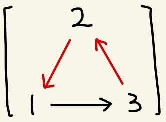
② k を端点とする全ての矢の向きを逆にする

③ 2-cycle を1つずつ．無くなるまで取り除く

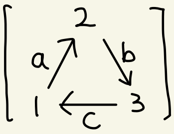
Ex • k が sink or source なら $\mu_k Q = \sigma_k Q$

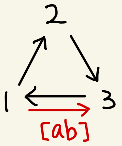
つまり mutation は reflection の拡張

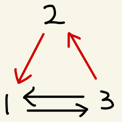
- $Q = [1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3]$ の $\mu_2 Q$ ①


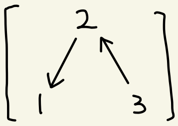
②


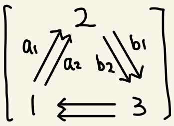
$= \mu_2 Q$ ③ なし

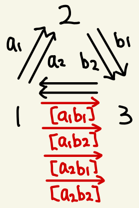
- Q =


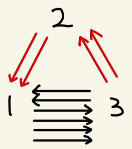
の $\mu_2 Q$ ①


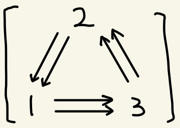
②


③ $\mu_2 Q =$


- Q =


の $\mu_2 Q$ ①


②


③ $\mu_2 Q =$


- i から j へ ℓ 本の矢があるとき，$i \xrightarrow{(\ell)} j$ と表すことにする

$$Q=\left[\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "(m)"] & \\ 1 \arrow[ur, "(\ell)"] & & 3 \arrow[ll, "(n)"] \end{tikzcd}\right] \text{ の } \mu_2 Q$$

① $$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "(m)"] & \\ 1 \arrow[ur, "(\ell)"] \arrow[rr, shift right, "(\ell m)"'] & & 3 \arrow[ll, shift right, "(n)"'] \end{tikzcd}$$

② $$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "(\ell)"'] & \\ 1 \arrow[rr, shift right, "(\ell m)"'] & & 3 \arrow[ul, "(m)"'] \arrow[ll, shift right, "(n)"'] \end{tikzcd}$$

③ $$\mu_2 Q = \begin{cases} \left[\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "(\ell)"'] & \\ 1 \arrow[rr, "(\ell m-n)"'] & & 3 \arrow[ul, "(m)"'] \end{tikzcd}\right] & \ell m \geq n \\ \left[\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "(\ell)"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "(m)"'] \arrow[ll, "(n-\ell m)"] \end{tikzcd}\right] & \ell m \leq n \end{cases}$$

Prop 2 ① $\mu_k Q$ も loop と 2-cycle を持たない

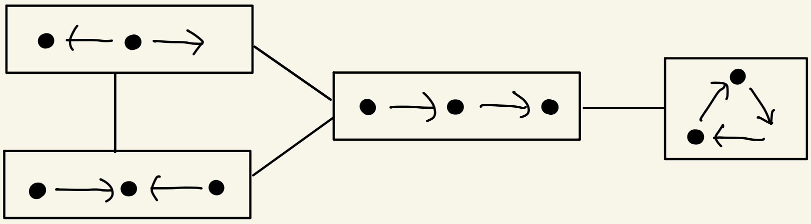
② $\mu_k(\mu_k Q) = Q$

Def quiver Q と Q' が mutation equivalent であるとは，

Q に mutation を繰り返して Q' が得られること

Ex 2点 $[\bullet \xrightarrow{(\ell)} \bullet]$ の mutation $[\bullet \xleftarrow{(\ell)} \bullet]$ は 元と同じ（点の入れかえ）

Ex A_3 型 quiver と mutation equivalent なものは 以下



レポート
$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] & & & \vdots \arrow[dl] \\ & n \arrow[ul] & n-1 \arrow[l] & \end{tikzcd}$$
が D_n 型 quiver と mutation equivalent であることを示せ

- Google "Quiver mutation" B. Keller のページ

以下

- quiver といえば，点 $\{1,2,\cdots,n\}$ を持ち，loop と 2-cycle を持たないもののみ考える
- 有理関数といえば，n 変数 $x_1,\cdots,x_n$ の有理関数を意味する．

Def [Fomin-Zelevinsky 2002]

① quiver R と 有理関数 $u_1,\cdots,u_n$ の組 $(R,\{u_1,\cdots,u_n\})$ を 種子 (seed) とよぶ

② seed $(R,\{u_1,\cdots,u_n\})$ と $1 \leq k \leq n$ に対し，新しい seed を以下で定める

$$\mu_k(R,\{u_1,\cdots,u_n\}) = (\mu_k R, \{u_1,\cdots,u_k',\cdots,u_n\})$$ ：種子の変異 (mutation)

$$u_k' := \frac{1}{u_k}\left(\prod_{\substack{a\in Q_1 \\ t(a)=k}} u_{s(a)} + \prod_{\substack{a\in Q_1 \\ s(a)=k}} u_{t(a)}\right)$$

- seed $(R, \{u_1, \cdots, u_n\})$ を R の点 i に u_i を書いて表す

  例えば $([1 \to 2], \{x_1, x_2\})$ なら $[x_1 \to x_2]$

Ex

$$\begin{tikzcd}
{[x_1 \to x_2]} \arrow[r, dash, "\mu_1"] & {\left[\frac{x_2+1}{x_1} \leftarrow x_2\right]} \arrow[r, dash, "\mu_2"] & {\left[\frac{x_2+1}{x_1} \to \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}\right]}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\text{Prop 3}\quad \mu_k(\mu_k(R, \{u_1, \cdots, u_n\})) = (R, \{u_1, \cdots, u_n\})}$$

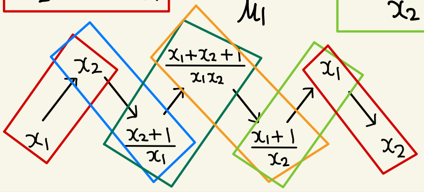
③ quiver Q に対し、seed $(Q, \{x_1, \cdots, x_n\})$ に mutation を繰り返して得られる seed $(R, \{u_1, \cdots, u_n\})$ に対し、$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を団 (cluster)、各 u_i を団変数 (cluster variable) とよぶ

Rem ② では $u_k \neq 0$ でなくてはならないが、$(Q, \{x_1, \cdots, x_n\})$ に mutation を得られる seed では成立する

- seed を点、変異を辺として得られるグラフを変異グラフとよぶ

Ex ①

$$\begin{tikzcd}
\boxed{x_1 \to x_2} \arrow[r, dash, "\mu_1"] \arrow[d, equal, "\text{点の入れかえ}"] & \boxed{\frac{x_2+1}{x_1} \leftarrow x_2} \arrow[r, dash, "\mu_2"] & \boxed{\frac{x_2+1}{x_1} \to \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}} \arrow[d, dash, bend left, "\mu_1"] \\
\boxed{x_2 \leftarrow x_1} \arrow[r, dash, "\mu_1"'] & \boxed{\frac{x_1+1}{x_2} \to x_1} \arrow[r, dash, "\mu_2"'] & \boxed{\frac{x_1+1}{x_2} \leftarrow \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}}
\end{tikzcd}$$

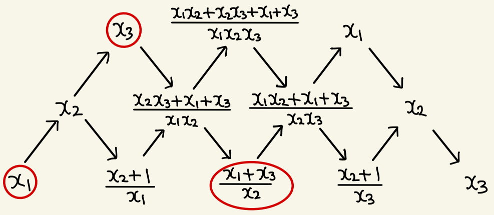


5個の cluster variable がある

② $\boxed{\text{有理関数 frieze} = (\text{source における seed mutation のくり返し})}$

③ それ以外の mutation

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[dl] & & \\
\mu_2[x_1 \to x_2 \to x_3] = \Bigg[& x_1 \arrow[rr] & & x_3 \arrow[ul] & \Bigg]
\end{tikzcd}$$



この場合、cluster variable は9個あり、全て frieze に現れる

- $\mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n) = \left\{ \frac{g}{f} \;\middle|\; \right.$ $f(\neq 0)$ と g は 有理数係数の $x_1, \cdots, x_n$ に関する多項式 $\left.\right\}$

  有理関数体

Def quiver Q の団代数 (cluster algebra) とは、全ての団変数で生成される $\mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ の部分環 $\mathcal{A}_Q$

つまり $\mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ の部分集合 S で、以下を満たすものの中で最小のもの

① 全ての団変数と定数関数 1 を含む

② $f, g \in S \Longrightarrow f \pm g,\ fg \in S$

$$\underbrace{\overbrace{+\ -\ \times}^{\text{環}}\ \div}_{\text{体}}$$

- cluster algebra は 現代数学の 様々な分野に現れる
  全く 異なる分野を 関連付ける 役割を果たしている
- cluster algebra の基本定理を２つ挙げる

<u>Thm 4</u> (Laurent phenomenon) [FZ02]
全ての cluster variable は $x_1 \sim x_n$ の Laurent 多項式である

$$\frac{(x_1 \sim x_n \text{ の多項式})}{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}} \quad (d_i \geq 0)$$

<u>Def</u> quiver Q の cluster algebra $\mathcal{A}_Q$ が 有限型 であるとは、有限個しか cluster variable を 持たないこと

<u>Thm 5</u> [FZ03] Q：連結な quiver，loop と 2-cycle を持たない

① $\mathcal{A}_Q$：有限型 $\Longleftrightarrow$ Q は Dynkin quiver と mutation equivalent

② Dynkin quiver Q に対し，以下の全単射がある

$$\{\mathcal{A}_Q \text{ の cluster variables}\} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{g}_Q \text{ の positive roots}\}$$

$$\frac{(x_1 \sim x_n \text{ の多項式})}{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}} \longmapsto (d_1, \cdots, d_n)$$

このとき cluster variable は，全て有理関数 frieze に現れる

<u>Ex</u>

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x_2 \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}\\(1,1)\end{array} \arrow[dr] & \\
x_1 \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\frac{x_2+1}{x_1}\\(1,0)\end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\frac{x_1+1}{x_2}\\(0,1)\end{array}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & x_3 \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3}\\(111)\end{array} \arrow[dr] & & \\
 & x_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2}\\(110)\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3}\\(011)\end{array} \arrow[dr] & \\
x_1 \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\frac{x_2+1}{x_1}\\(100)\end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\frac{x_1+x_3}{x_2}\\(010)\end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\frac{x_2+1}{x_3}\\(001)\end{array}
\end{tikzcd}$$

- <u>Thm 5</u> は §1 Gabriel の定理に酷似

<u>§1 Thm 6.7</u> ① 連結な quiver が 有限表現型 $\Longleftrightarrow$ Dynkin quiver

② Dynkin quiver Q に対し 以下の全単射がある

$$\{Q \text{ の indecomp. rep. の 同型類}\} \longrightarrow \{\mathfrak{g}_Q \text{ の positive roots}\}$$

$$V \longmapsto \underline{\dim} V$$

Q : Dynkin quiver

$$\begin{tikzcd}
\{Q\text{の indecomp. rep. の同型類}\} \arrow[dd, "\exists\ \text{直接構成}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "1-1"] & \\
 & \{\mathfrak{g}_Q\text{の positive roots}\} \\
\{\mathcal{A}_Q\text{の cluster variables}\} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} \arrow[ur, leftrightarrow, "1-1"'] &
\end{tikzcd}$$

Ex $[1 \leftarrow 2 \leftarrow 3]$

$$[\mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}]$$

$$[\mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C} \leftarrow 0] \quad [0 \leftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}]$$

$$[\mathbb{C} \leftarrow 0 \leftarrow 0] \quad [0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0] \quad [0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{C}]$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \arrow[dr, dash] & & \\
 & \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\frac{x_2+1}{x_1} \arrow[ur] & & \frac{x_1+x_3}{x_2} & & \frac{x_2+1}{x_3}
\end{tikzcd}$$

cluster algebra の圏化 (categorification)

[Keller] 参照

- Dynkin quiver Qの indecomp. rep. から $\mathcal{A}_Q$の cluster variable を直接構成することができる

  Caldero - Chapoton map [Keller, Section 5.3]

- $\mathcal{A}_Q$の cluster は tilting module (傾加群) に対応する
- 圏化を用いて cluster algebra に関する様々な問題が解決された

レポート

以下のいずれかの問いに答えよ

① 以下のいずれかを確かめよ

- Prop 2　　Prop 3

② 22ページの レポート問題

③ A_3型 quiver $[\bullet \longrightarrow \quad \longrightarrow \bullet]$ の変異グラフを描け

④ A_n型 quiver $[\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet]$ の cluster variable を全て求めよ

参考文献

§1,2 草場公邦 "行列特論" 裳華房

[ASS] Assem, Simson, Skowronski "Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 1" Chapter VII

[S] Schiffler "Quiver Representations"

- 松坂和夫 "代数系入門" 岩波書店

[DW] Derksen, Weyman "An introduction to Quiver representations"

§3

- 環に関する入門書は多いが、例えば

  森田康夫 "代数概論" 裳華房

  岩永恭雄・佐藤眞久 "環と加群のホモロジー代数的理論" 日本評論社

- Fomin と Zelevinsky の原論文

  "Cluster algebras I. Foundations" J. Amer. Math. Soc. 2002

  "Cluster algebras II. Finite type classification" Invent. Math. 2003

- cluster algebra に関する日本語の入門的文献：

  数理科学 2015年3月号 "団代数をめぐって"

  井上玲 "クラスター代数入門"

- quiver の表現と cluster algebra の圏化に関する概説

[Keller] B. Keller "Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories"

- cluster algebra に関する英文書籍もいくつかある