自由性と単純性：傾理論再訪

伊山　修　(東京大学)*

1　はじめに

環 (ring) とは, 整数環 $\mathbb{Z}$ や有理数体 $\mathbb{Q}$ に始まる古典的な数体系の一般化であり, 少数の公理系を満たす加法と乗法が与えられた集合のことであった. 環 A 上の**加群** (module) とは, 同様に加法と A の作用が与えられた集合のことであり, ベクトル空間とアーベル群, 環のイデアルの共通の一般化であった. ここで, 次の問いを考える.

問題 1.1　与えられた環上の加群を分類せよ.

代数学の発展史を概観するような問いであり, どのような環上のどのような加群を扱うのか, 何を以って分類と呼ぶのか等, この問いの解釈や答え方は様々である.

標題にある**自由加群**と**単純加群**は,[*1] 最も基本的な 2 つの加群のクラスであり, 互いに対極的なものである. 本稿では, これら 2 つのクラスを起点として, 問題 1.1 を論じつつ, **傾理論** (tilting theory) への導入をする. 特に, これら 2 つの遥かなる一般化を与える**準傾複体**と **semibrick** を導入し, それらに関する諸結果を紹介する.

自由加群	単純加群
準傾複体	semibrick

関心を持って下さった読者には, より専門的な解説記事 [AIR2] とそこに挙げられた文献をご覧いただきたい.

以下, 本文を通して, A で環を表す. A-加群と言えば, 右 A-加群を意味する.

2　自由加群と単純加群

最初に, 自由加群について復習する. 環の定義より, 環 A 自身が A-加群を与える.

一方, 集合 I で添字付けられた A-加群の族 X_i $(i \in I)$ に対し, **直和**と呼ばれる A-加群 $\bigoplus_{i\in I} X_i$ が, 同型を除いて一意に定まる. X_i が全て同一の加群 X のときは, $X^{\oplus I}$ と表す.

定義 2.1. A-加群 A の直和 $A^{\oplus I}$ を, **自由加群** (free module) と呼ぶ.

自由加群の自由とは, 制約が「無い」ことを意味する. そのため自由加群は, 次の意味であらゆる加群の中で「最も大きい」と言える.

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: iyama@ms.u-tokyo.ac.jp
web: https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~iyama/index.html
本研究は科研費 (課題番号:23K22384) の助成を受けたものである。
キーワード：brick, semibrick, wide 部分圏, 傾複体, 準傾複体, τ 傾加群, ねじれ類, 完備半分配束, g 扇
[*1] **正則表現**と**既約表現**, と言い換えても良い.

命題 2.2　任意の A-加群 X に対し, 自由 A-加群 F と全射準同型 $f : F \to X$ が存在する.

圏の観点からは, 自由加群よりも射影加群が自然であり, ここでは次で定義する.

定義 2.3. 自由加群の直和因子を, **射影加群** (projective module) と呼ぶ.

次に, 単純加群について復習する. **零加群** (zero module) とは, 零元のみからなる A-加群であり, 0 で表す. 単純加群は, あらゆる加群の中で零加群の次に小さなものである.

定義 2.4. A-加群 X が**単純加群** (simple module) であるとは, 0 でなく, また 0 と X 以外に部分加群を持たないこと. 単純加群の直和を, **半単純加群** (semisimple module) と呼ぶ.

線型代数学で学ぶように, 体 k 上の任意のベクトル空間は基底を持つ. このことは, 任意の k-加群が自由加群であることを意味する. また, 体 k は 0 と k 以外にイデアルを持たないため, k-加群 k は単純加群である. 以上より次が従う.

命題 2.5　体 k 上の任意の加群は, 自由加群であり, また半単純加群でもある.

それでは, 体以外の環に対し, 問題 1.1 に解答を与えることは可能だろうか？
次節では, これを議論する.

3　森田理論と Gabriel の定理

3.1　森田理論と半単純環

[*2] 環 A に対し, A-加群全体のなす**圏**を $\mathsf{Mod}\, A$ と表す. つまり $\mathsf{Mod}\, A$ とは, A-加群全体と, それらの間の A-準同型全体の成す構造である. また, 有限生成な射影 A-加群の成す $\mathsf{Mod}\, A$ の充満部分圏を, $\mathsf{proj}\, A$ と表す:

$$\mathsf{Mod}\, A \supset \mathsf{proj}\, A. \tag{3.1}$$

また, 長さが有限な A-加群全体の成す $\mathsf{Mod}\, A$ の充満部分圏を, 本稿では $\mathsf{mod}\, A$ と表す.

定義 3.1. A-加群 P が**射影生成元** (progenerator) であるとは, 以下が成立すること.

(1) $P \in \mathsf{proj}\, A$.
(2) 集合 I と全射 A-準同型 $f : P^{\oplus I} \to A$ が存在する.

条件 (2) より, 任意の A-加群 X に対しても, 全射 A-準同型 $g : P^{\oplus I'} \to X$ が存在する.

環の基本構成の一つとして, A-加群 X に対し, 自己準同型の全体 $\mathrm{End}_A(X)$ の成す環**（自己準同型環）**が挙げられる. 例えば, 高校数学で学んだ**行列環** $M_n(A)$ とは, 自由加群の自己準同型環 $\mathrm{End}_A(A^{\oplus n})$ のことであった.

次の基本定理は, 学部の授業では扱われないことが多いが, 極めて重要である.

[*2] この節の内容に関しては, [岩佐, 中岡, AF] を参照.

定理 3.2（森田紀一 [AF]）　環 A と B に対し, 以下の条件は同値である.

(1) 圏同値 $\mathsf{Mod}\, A \simeq \mathsf{Mod}\, B$ が存在する.
(2) 圏同値 $\mathsf{proj}\, A \simeq \mathsf{proj}\, B$ が存在する.
(3) A の射影生成元 P で, 自己準同型環 $\mathrm{End}_A(P)$ が B と環同型であるものが存在する.

このとき A と B は**森田同値**であるという.

定理 3.2(1) の圏同値は, (3) の P を用いて, 以下で与えられる:

$$\mathrm{Hom}_A(P, -) : \mathsf{Mod}\, A \to \mathsf{Mod}\, B, \quad - \otimes_B P : \mathsf{Mod}\, B \to \mathsf{Mod}\, A.$$

例 3.3. n を正整数とする.

(1) 自由 A-加群 $A^{\oplus n}$ は射影生成元なので, 定理 3.2 より, A と $M_n(A)$ は森田同値.
(2) k を体とする. 圏同値は加群の射影性や単純性を保存するので, (1) と命題 2.5 より, 任意の $M_n(k)$-加群は, 射影加群であり, また半単純加群でもあることが従う. n 次の行ベクトル $[kk\cdots kk]$ が, $M_n(k)$ の単純加群を与える.

学部で習う次の基本定理は, 例 3.3(2) の観察をより体系的な環のクラスに対して定式化したものと言える.

定理 3.4（Artin-Wedderburn）　環 A に対し, 以下の条件は同値である.

(1) 任意の A-加群は, 半単純加群である.
(2) 任意の A-加群は, 射影加群である.（このことを A の**大域次元が** 0 であるという.）
(3) A は, 有限個の斜体上の行列環の直積と環同型である.

このとき A を**半単純環**と呼ぶ.

半単純環は, イデアル論的には, Jacobson 根基が 0 の Artin 環として特徴付けられる.

3.2　箙と Gabriel の定理

[*3] まず, 環を与える普遍的な手法である, 次の概念を導入する.

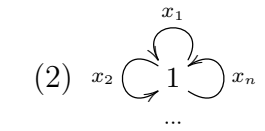
定義 3.5. 箙（えびら, quiver）とは, 4 つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ で, 以下から成るもの.

(1) Q_0 と Q_1 は集合. Q_0 の元を**点**, Q_1 の元を**矢**と呼ぶ.
(2) s と t は写像 $Q_1 \to Q_0$.

実際に Q_0 の元を点として, また Q_1 の元 a を矢 $s(a) \xrightarrow{a} t(a)$ として描く事により, Q を有向グラフとして図示できる.

[*3] この節の内容に関しては, [ASS] を参照.

例 3.6. 下の (1) は $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Q_1 = \{a_i \mid 2 \leq i \leq n\}$, $s(a_i) = i$, $t(a_i) = i - 1$, 下の (2) は $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $s(x_i) = 1 = t(x_i)$ で与えられる箙である.

(1) $1 \xleftarrow{a_2} 2 \xleftarrow{a_3} \cdots \xleftarrow{a_{n-1}} n-1 \xleftarrow{a_n} n$ (2) 

箙 Q の点を対象, 矢を射と解釈すると, Q は「合成を持たない圏」と見なされる. 以下のように, 矢の合成である道を考え, それを基礎環 A 上で A-線型化することで, 道代数（一般には道圏）が定まる.

定義 3.7. Q を箙とし, A を環とする.

(1) 長さ $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ の**道**とは, 矢の列 $p = a_\ell \cdots a_2 a_1$ で $t(a_i) = s(a_{i+1})$ $(1 \leq i < \ell)$ が成立するもの. このとき $s(p) := s(a_1)$, $t(p) := t(a_\ell)$ とおく.
長さ 0 の**道**とは, Q の点のこと. $i \in Q_0$ を道と見たものを e_i と表し, $s(e_i) = i = t(e_i)$ とおく.

(2) **道代数** AQ を, 道を基底とする自由 A-加群に, 以下で定まる積を A-線型に拡張する事により定める.
- 道 p, q が $t(p) = s(q)$ を満たすときは, これらを繋げて得られる道を qp と定める. ただし $p = e_i$ なら $qp := q$ とし, $q = e_i$ なら $qp := p$ とする.
- 道 p, q が $t(p) \neq s(q)$ を満たすときは, $qp := 0$ と定める.

Q_0 が有限集合なら, AQ は単位元 $\sum_{i \in Q_0} e_i$ を持ち, 実際に環となる. 一般の場合の AQ は, 環よりもむしろ前加法圏（**道圏**）と見なすのが自然である.[*4] 道代数を特別なテンソル代数として解釈することも可能であり, それにより次の基本性質が従う.

命題 3.8 体 k と箙 Q に対し, 道代数 kQ の大域次元は 1 以下である.[*5]

ここで環 A の（右）**大域次元**とは, 全ての A-加群の射影次元の sup である. これは環の最も重要な不変量であり, 命題 3.8 は道代数が半単純環の次に基本的なクラスであることを意味する. 本稿ではこれ以上述べないが, 大域次元が有限である環の研究には長い歴史があり, 様々な数学の原動力となっている.[*6]

道代数をイデアルで割る事が, 環の基本構成の一つである. 例えば多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ は, 次の (2) の AQ を $x_i x_j - x_j x_i$ で生成されるイデアルで割ることで得られる.

[*4] 更に言えば, 環上の加群よりも一般に, 前加法圏上の加群を扱うのが自然である.

[*5] 大域次元が 1 以下の環を**遺伝的** (hereditary) と呼ぶ. 加群の射影性が部分加群に遺伝することに由来する.

[*6] 例えば Auslander-Buchsbaum-Serre の定理, Auslander 代数, 準遺伝代数, Calabi-Yau 代数, 非可換特異点解消,...

例 3.9. 例 3.6(1) の Q に対し, AQ は n 次三角行列環

$$T_n(A) := \begin{bmatrix} A & A & \cdots & A & A \\ 0 & A & \cdots & A & A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A & A \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix}$$

と環同型である. ここで, 道 $a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_j$ は行列単位 E_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ に対応する.

例 3.6(2) の Q に対し, AQ は n 変数の非可換多項式環 $A\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ である.

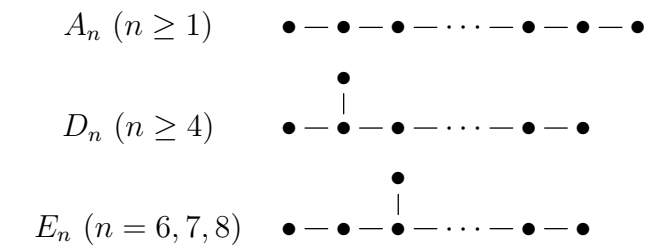
A-加群 X が**直既約**であるとは, X は 0 でなく, X が 2 つの A-加群の直和 $Y \oplus Z$ と同型ならば, Y と Z のどちらかが 0 であることである. 例えば単純加群は直既約である.

道代数 AQ 上の加群は, 箙 Q の**表現**として記述することができる. 体 k 上の道代数に対する次の定理は基本的である.

定理 3.10（Gabriel [ASS]） k を体とする. 箙 Q に対し, 以下の条件は同値.

(1) kQ は**有限表現型**である（つまり直既約 kQ-加群の同型類は有限個）.
(2) Q は **Dynkin 型**の箙の非交和.

ここで **Dynkin 型**の箙とは, 以下のグラフの辺を矢に置き換えて得られる箙のことであり, 添字の n は点の個数を表す.



Dynkin 型の箙 Q に対し, kQ-加群は十分に良く理解されている. 例えば, 次元ベクトル（＝組成因子の重複度）をとることにより, 直既約 kQ-加群の同型類と, Q に付随するルート系の正ルートが一対一に対応する.

Q	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
直既約 kQ-加群の同型類の個数	$\frac{n(n+1)}{2}$	$n(n-1)$	36	63	120

さらに圏 $\mathsf{mod}\, kQ$ の構造を, **Auslander-Reiten 箙** [*7]によって完全に記述できる.

例 3.11. 例 3.6(1) の A_n 型の箙 Q に対し, $kQ = T_n(k)$ であった（例 3.9）. このとき, $T_n(k)$ の n 個の行ベクトル

$$P_1 := [kk \cdots kk] \supset P_2 := [0k \cdots kk] \supset \cdots \supset P_{n-1} := [00 \cdots kk] \supset P_n := [00 \cdots 0k]$$

[*7] 与えられた圏の直既約対象の同型類を点とし, 既約な射から矢を定めたものである. 本稿では Auslander-Reiten 理論については割愛するが, [ASS] 参照.

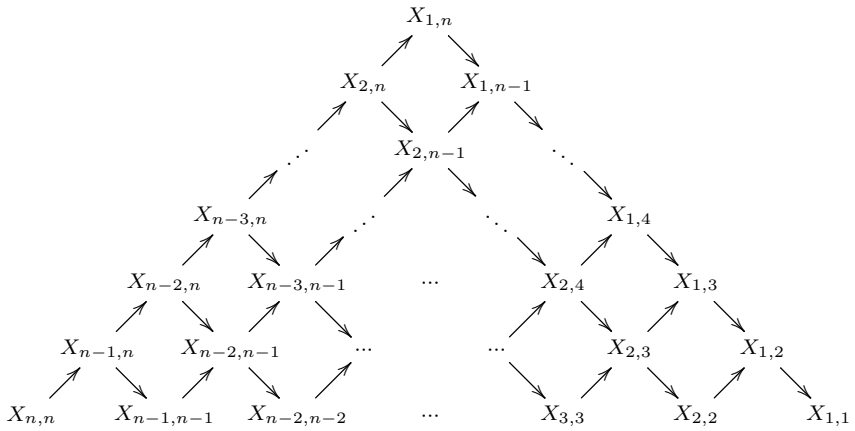
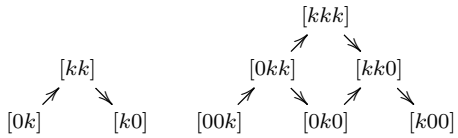


図 1: A_n 型の箙の Auslander-Reiten 箙

は直既約射影 kQ-加群の同型類の全体を与え, 直既約 kQ-加群の同型類の全体は

$$\{X_{i,j} := P_i/P_{j+1} = [\overset{1}{0}\cdots 0\ \overset{i}{k}\cdots\overset{j}{k}\ 0\cdots\overset{n}{0}] \mid 1 \le i \le j \le n\}$$

で与えられる（ただし $P_{n+1} := 0$）. また $\mathsf{mod}\, kQ$ の Auslander-Reiten 箙は図 1 で与えられる. 右上に向かう矢は自然な単射 $X_{i,j} \to X_{i-1,j}$ に対応し, 右下に向かう矢は自然な全射 $X_{i,j} \to X_{i,j-1}$ に対応する. $\mathsf{mod}\, kQ$ の任意の射は, これらの射の合成の線形和で与えられる. 後で使うために $n = 2, 3$ の時の Auslander-Reiten 箙を描いておく.



(3.2)

一般の箙に対しても, 直既約 kQ-加群の次元ベクトルの全体は, 正ルートの全体と一致する**（Kac の定理）**[DW] が, この対応は単射ではない. Dynkin 型の次に基本的な**拡大 Dynkin 型**の箙の道代数は, **tame 表現型**と呼ばれ, 直既約加群は十分に良く理解されている. しかし, これら以外の箙は **wild 表現型**と呼ばれ, 直既約加群の同型類を分類することは, hopeless な問題であると考えられている.

実際には, 箙に限らず, 殆ど全ての環は wild 表現型である. そのような環を扱う際には, 扱う対象を制限するのが常套手段である.[*8] 本稿では, 準傾複体と semibrick という特別なクラスと, それらに付随する部分圏を扱う.

4 Brick と Semibrick

この節では, 本稿で主要な役割を果たす brick と semibrick を導入する. 見通しを良くするために, 以下では環上の加群圏よりも一般に, アーベル圏を扱う.

[*8] 他にも, 部分圏を扱う, 同値関係を弱める, モジュライ空間を扱う, など様々なアプローチがある.

定義 4.1. [As1] $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする.

(1) $\mathcal{A}$ の対象 X が **brick** であるとは, 0 でなく, 任意の射 $X \to X$ が 0 または同型であること. 言い換えると, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ が斜体であること.
(2) $\mathcal{A}$ の brick の集合 $\mathcal{S}$ が **semibrick** であるとは, $\mathcal{S}$ の異なる元の間の射は 0 に限ること.

$\mathcal{A}$ の brick の同型類の全体を $\mathsf{brick}\,\mathcal{A}$ で表し, $\mathcal{A}$ の semibrick の同型類の全体を $\mathsf{sbrick}\,\mathcal{A}$ で表す. また環 A に対し, $\mathsf{brick}\,A := \mathsf{brick}(\mathsf{mod}\,A)$, $\mathsf{sbrick}\,A := \mathsf{sbrick}(\mathsf{mod}\,A)$ とおく.

次の事実より, brick と semibrick はそれぞれ, 単純加群と半単純加群の拡張概念である.

命題 4.2（Schur の補題） アーベル圏 $\mathcal{A}$ の任意の単純対象は, brick である. また $\mathcal{A}$ の単純対象の同型類の集合 $\mathsf{sim}\,\mathcal{A}$ は, semibrick である.

brick が直既約であることは, 容易に分かる. semibrick をより直観的に理解するために, 特別な部分圏を考える.

定義 4.3. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の充満部分圏 $\mathcal{B}$ を考える.

(1) $\mathcal{B}$ の対象の間の射 $f : X \to Y$ に対し, 常に $\mathrm{Ker}\,f \in \mathcal{B}$ が成立するとき, $\mathcal{B}$ は**核で閉じる**という. 同様に $\mathrm{Cok}\,f \in \mathcal{B}$ が成立するとき, $\mathcal{B}$ は**余核で閉じる**という. $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ で $X, Z \in \mathcal{B}$ を満たすものに対し, 常に $Y \in \mathcal{B}$ が成立するとき, $\mathcal{B}$ は**拡大で閉じる**という.
(2) $\mathcal{B}$ が核, 余核, 拡大で閉じるとき, **wide 部分圏**と呼ぶ. $\mathcal{A}$ の wide 部分圏の全体を $\mathsf{wide}\,\mathcal{A}$ と表す. また環 A に対し, $\mathsf{wide}\,A := \mathsf{wide}(\mathsf{mod}\,A)$ とおく.

明らかに wide 部分圏は, それ自身がアーベル圏をなす.

命題 4.4（Ringel の補題 [Rin]） 任意の $\mathcal{S} \in \mathsf{sbrick}\,\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{B} \in \mathsf{wide}\,\mathcal{A}$ が存在し, $\mathcal{S} = \mathsf{sim}\,\mathcal{B}$ が成立する.

命題 4.4 の $\mathcal{B}$ は, $\mathcal{B} := \mathsf{Filt}\,\mathcal{S}$ により与えられる. ここで $\mathsf{Filt}\,\mathcal{S}$ は, 部分対象の列

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_n = 0$$

で $X_i/X_{i+1} \in \mathcal{S}$ $(0 \leq i < n)$ となるものを持つような $X \in \mathcal{A}$ 全体の成す充満部分圏である. 以上の事実は, 次のようにまとめられる. ただしアーベル圏 $\mathcal{A}$ が**長さを持つ**とは, $\mathcal{A}$ の任意の対象の長さが有限であることを意味する.

命題 4.5 長さを持つアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対し, 次の全単射が存在する.

$$\mathsf{sim} : \mathsf{wide}\,\mathcal{A} \simeq \mathsf{sbrick}\,\mathcal{A} : \mathsf{Filt}\,.$$

煉瓦を意味する brick は, 名前の通り, wide 部分圏を構成する基本単位であると言える.

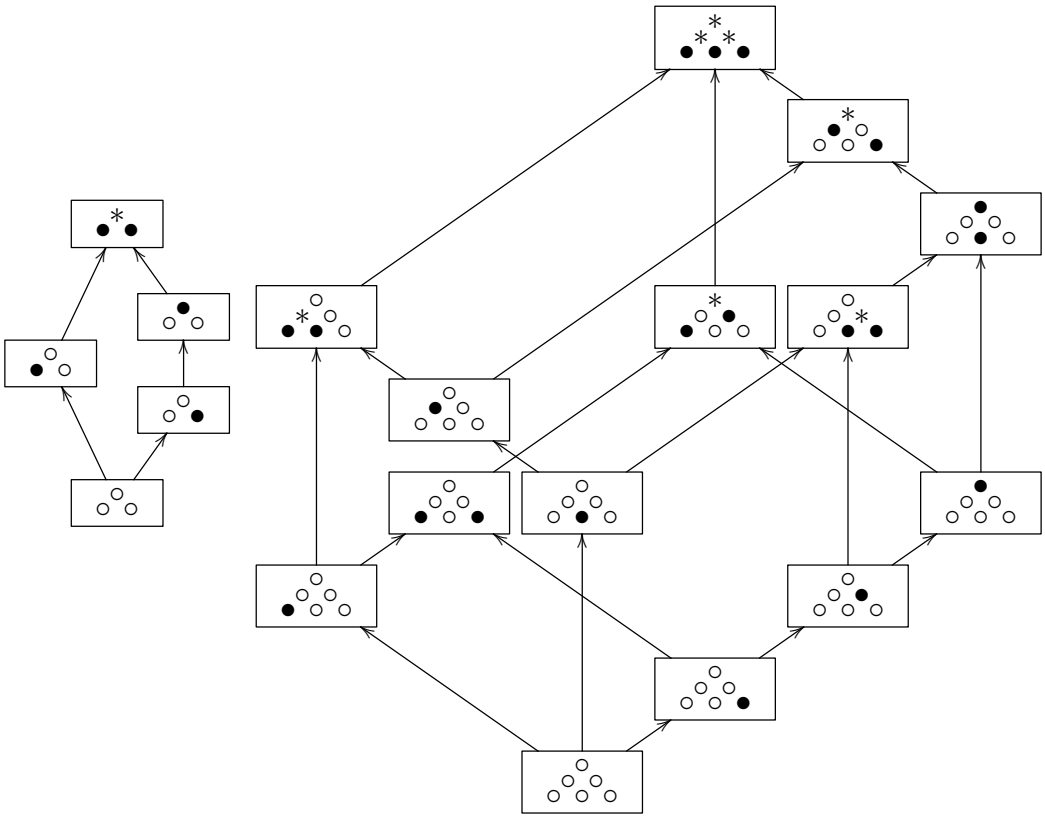


図 2: A_2 型と A_3 型の semibrick と wide 部分圏

例 4.6. k を体, Q を Dynkin 型の箙とする. この場合, kQ-加群が brick であることと, 直既約であることが同値である. また, $\#\,\mathsf{sbrick}\,kQ$ は一般 Catalan 数で与えられる.

Q	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
$\#\,\mathsf{sbrick}\,kQ$	$\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$	$\frac{3n-2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$	833	4160	25080

例 3.6(1) の A_n 型の箙 Q に対し, $n = 2, 3$ の場合の semibrick はそれぞれ 5 個と 14 個あり, 図 2 で与えられる. ここで各四角内の $\circ\!\!\circ\!\!\circ$ と $\circ\!\!\circ\!\!\circ\!\!\circ\!\!\circ$ は (3.2) の Auslander-Reiten 箙を表す. また, $\bullet$ が semibrick の元を表し, $\bullet$ と $*$ が対応する wide 部分圏の直既約対象を表す. 図 2 の矢の意味は, 後の章の例 6.6(3) を参照.

例 4.7. 無限個の brick からなる semibrick の非自明な例を挙げる. **Kronecker 箙** $Q := [\, 1 \underset{b}{\overset{a}{\leftleftarrows}} 2 \,]$ の無限体 k 上の道代数 kQ を考える. $\lambda \in k$ に対し, Q の表現 $X_\lambda := [\, k \underset{1}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} k \,]$ は kQ の brick を与え, $\mathcal{S} := \{X_\lambda \mid \lambda \in k\}$ は kQ の semibrick を与える.

5 傾複体と準傾複体

5.1 導来圏

この章以降では, 考察対象を加群圏から導来圏に拡げる. 導来圏とは, 複体の成す圏であり, ホモロジー代数における基本的対象である. 以下, 概要を思い出そう. 詳しくは

[中岡] を参照されたい.

加法圏 $\mathcal{A}$ に対し, 複体の圏 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ は, 以下のように定まる.

- $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ の対象は, $\mathcal{A}$ 上の複体 $X = \left[\cdots \xrightarrow{d_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} \cdots \right]$.
- $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ の射は, 鎖準同型

$$\begin{array}{ccc} X & \cdots \xrightarrow{d_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} \cdots & \\ \downarrow f & \quad\downarrow f^{-1} \quad\downarrow f^0 \quad\downarrow f^1 & \\ Y & \cdots \xrightarrow{d_Y^{-2}} Y^{-1} \xrightarrow{d_Y^{-1}} Y^0 \xrightarrow{d_Y^0} Y^1 \xrightarrow{d_Y^1} \cdots . \end{array} \tag{5.1}$$

鎖準同型 $f : X \to Y$ が**ヌルホモトピック**であるとは, $s^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^{i-1})$ $(i \in \mathbb{Z})$ が存在して, 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対して $f^i = s^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}s^i$ が成立することである. そのような射の全体を $I(X,Y)$ と表すと, これは圏 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ のイデアルを与える. $\mathcal{A}$ の**ホモトピー圏**は, イデアル I による商圏として定義される:

$$\mathsf{K}(\mathcal{A}) := \mathsf{C}(\mathcal{A})/I.$$

$\mathcal{A}$ がアーベル圏の場合, 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対してコホモロジー群 $H^i(X) \in \mathcal{A}$ が定まり, 鎖準同型 $f : X \to Y$ は, 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{A}$ の射 $H^i(f) : H^i(X) \to H^i(Y)$ を与える. これが全て同型であるときに, f を**擬同型**と呼ぶ. $\mathcal{A}$ の**導来圏** $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ は, ホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ を全ての擬同型の成す積閉系で局所化する事によって定義される.

$\mathcal{A}$ の対象 X を, 0 次が X の複体 $[\cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots]$ と同一視して, $\mathcal{A}$ を $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ および $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ の充満部分圏と見なす. また, 有界な複体 X（つまり有限個の $i \in \mathbb{Z}$ を除いて $X^i = 0$ が成立する）全体からなる $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ の充満部分圏を, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ と表す. 同様に $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ を定める.

$\mathsf{K}(\mathcal{A})$ と $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ は**三角圏**の構造を持つのだが,[*9] ここでは以下の 2 点のみ説明する. 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し, **シフト関手**と呼ばれる自己同型 $[i] : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \simeq \mathsf{C}(\mathcal{A})$ が

$$X[i] = \left[\cdots \xrightarrow{(-1)^i d_X^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{(-1)^i d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{(-1)^i d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{(-1)^i d_X^{i+1}} \cdots \right].$$

で定まる（X^i が 0 次にある）. これは $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ と $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ の自己同型 $[i]$ を導く. また, (5.1) の鎖準同型 $f : X \to Y$ に対し, **写像錐** $\mathrm{cone}\, f \in \mathsf{C}(\mathcal{A})$ を

$$\mathrm{cone}\, f := \left[\cdots \xrightarrow{\begin{bmatrix} d_Y^{-2} & f^{-1} \\ 0 & -d_X^{-1} \end{bmatrix}} Y^{-1} \oplus X^0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} d_Y^{-1} & f^0 \\ 0 & -d_X^0 \end{bmatrix}} Y^0 \oplus X^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} d_Y^0 & f^1 \\ 0 & -d_X^1 \end{bmatrix}} Y^1 \oplus X^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} d_Y^1 & f^2 \\ 0 & -d_X^2 \end{bmatrix}} \cdots \right]$$

で定める（$Y^0 \oplus X^1$ が 0 次にある）. $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ または $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ の射 f に対しても, 同型を除いて一意に $\mathrm{cone}\, f$ が定まる. 以上の準備のもと, 次の定義が述べられる.

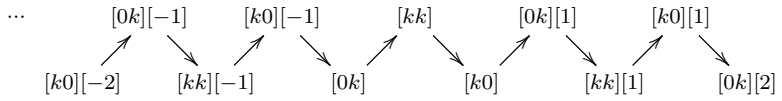
[*9] $\mathsf{C}(A)$ は**フロベニウス圏**の構造を持つ.

定義 5.1. 三角圏 $\mathcal{T}$（例えば $\mathcal{T} = \mathsf{K}(\mathcal{A}), \mathsf{D}(\mathcal{A})$）の充満部分圏 $\mathcal{B}$ を考える.

(1) $\mathcal{B}$ の対象の間の射 $f : X \to Y$ に対し, 常に $\operatorname{cone} f \in \mathcal{B}$ が成立するとき, $\mathcal{B}$ は**写像錐で閉じる**という. また任意の $X \in \mathcal{B}$ に対し, $X[1], X[-1] \in \mathcal{B}$ が成立するとき, $\mathcal{B}$ は**シフトで閉じる**という. 任意の $X \in \mathcal{B}$ の直和因子 Y に対し, $Y \in \mathcal{B}$ が成立するとき, $\mathcal{B}$ は**直和因子で閉じる**という.
(2) $\mathcal{B}$ が写像錐, シフト, 直和因子で閉じるとき, **thick 部分圏**と呼ぶ.
(3) $\mathcal{B}$ を $\mathcal{T}$ の thick 部分圏とする. $X \in \mathcal{B}$ を含む $\mathcal{T}$ の最小の thick 部分圏が $\mathcal{B}$ であるとき, X **は** $\mathcal{B}$ **を生成する**という.

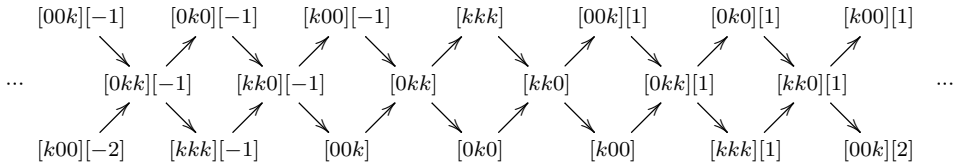
Dynkin 型の箙 Q に対し, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{mod}} kQ)$ の構造は十分に良く理解されている（[H] 参照）. 例えば, $\operatorname{\mathsf{mod}} kQ$ の Auslander-Reiten 箙をシフトしたものを貼り合わせて, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{mod}} kQ)$ の Auslander-Reiten 箙が得られる.

例 5.2. 例 3.6(1) の A_n 型の箙 Q に対し, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{mod}} kQ)$ の Auslander-Reiten 箙を考える. $n = 2$ の場合は, (3.2) を貼り合わせることで, 以下のように得られる.



(5.2)

A_3 型の場合は, 以下である.



5.2 傾複体

以下, 環 A に対し, $\mathsf{D}(A) := \mathsf{D}(\operatorname{\mathsf{Mod}} A)$ とおく. 自然な関手 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{proj}} A) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ は忠実充満なので, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{proj}} A)$ は $\mathsf{D}(A)$ の充満部分圏と見なされる:

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) \supset \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{proj}} A).$$

これらは, 加群の場合の 2 つの圏 (3.1) の導来圏版と見なされる. さて, 導来圏の同値に関して, 最も基本的な概念は次である.

定義 5.3. $T \in \mathsf{D}(A)$ が以下の 2 条件を満たすとき, **傾複体** (tilting complex)[*10] と呼ぶ.

(1) $T \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{proj}} A)$ であり, 任意の $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し, $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(A)}(T, T[i]) = 0$.
(2) T は $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{\mathsf{proj}} A)$ を生成する（定義 5.1(3)）.

傾複体は, 射影生成元の導来圏版と見なされる.

[*10] この名称の由来は, 命題 5.9 とその次の段落を参照.

例 5.4. (1) $A = [\cdots \to 0 \to A \to 0 \to \cdots]$ や, そのシフト $A[i]$ は傾複体.

(2) Brenner-Butler [BB] は, 箙表現の鏡映関手をモデルとして**傾加群**の概念を導入したが, これが傾複体の原型である.

次の定理は, 森田の定理 3.2 の導来圏版である.

定理 5.5（Rickard [Ric]） 環 A, B に対し, 以下の条件は同値.[*11]

(1) 三角圏の同値 $\mathsf{D}(A) \simeq \mathsf{D}(B)$ が存在する.

(2) 三角圏の同値 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A) \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, B)$ が存在する.

(3) A の傾複体 T で, $\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)$ が B と環同型であるものが存在する.

5.3 準傾複体

以下では簡単のため, A **は体** k **上の有限次元代数であること**を仮定する. しかし多くの結果は遥かに一般の状況で成立する（例えば, 完備ネター局所環上のネター代数 A など）ことが, 木村雄太氏らによって知られている [G, IK, Ki].

傾複体に関しては, 前世紀から夥しい数の研究がなされている. 中でも**変異** (mutation) は, 与えられた傾複体の直和因子を別のものに置き換えることにより, 新しい傾複体を構成する圏論的操作である. 典型例としては, 箙の鏡映と, 有限群のモジュラー表現論における奥山の傾複体が挙げられる. 今世紀初頭までに, Riedtmann-Schofield, Happel-Unger, 星野-加藤-宮地らによって先駆的な研究がなされた [RS, HKM]. しかし傾複体では, 直和因子の選び方によっては変異できない場合がある. この問題点は, 傾複体が十分に広いクラスではないことに起因しており, 次のように拡張することによって解決される.

A の仮定から, 任意の $X \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ は, 直既約複体の直和 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ として一意的に表される.[*12] $X_1, \ldots, X_m$ が互いに非同型なときに, X は**基本的**であると言う.

定義 5.6. [KV, AiI] $T \in \mathsf{D}(A)$ が以下の 2 条件を満たすとき, **準傾複体** (silting complex) と呼ぶ.[*13]

(1) $T \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ であり, 任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(A)}(T, T[i]) = 0$.

(2) T は $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ を生成する（定義 5.1(3)）.

$\mathsf{silt}\, A$ で, 基本的な準傾複体の同型類全体のなす集合を表す. また, T が条件 (1) のみ満たすとき, **前準傾複体** (presilting complex) と呼び, $\mathsf{psilt}\, A$ で, 基本的な前準傾複体の同型類全体のなす集合を表す.

以下, 相原琢磨氏との共同研究 [AiI] に基づいて, 準傾複体の基本性質を挙げる.

[*11] 原論文の証明は難解だが, dg 代数 (differential graded algebra) を用いると簡潔に示される.

[*12] これは Krull-Schmidt の定理の特別な場合である.

[*13] dg 代数の観点からは, 準傾複体とは dg 代数 A のうち connective なもの（つまり, 任意の $i > 0$ に対し $H^i(A) = 0$）に他ならない.

命題 5.7 [AiI] $\mathsf{silt}\, A$ は以下で定まる半順序を持つ.

$$T \geq U \iff \text{任意の } i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ に対し, } \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(A)}(T, U[i]) = 0.$$

定義 5.8. $\mathsf{proj}\, A$ の直既約対象の同型類の全体を $P_1, \ldots, P_n$ とする. このとき A の**ランク**は n であるという. また, $\mathsf{proj}\, A$ の **Grothendieck 群** $K_0(\mathsf{proj}\, A)$[*14]を, $[P_1], \ldots, [P_n]$ を基底とする自由アーベル群と定める:

$$K_0(\mathsf{proj}\, A) := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[P_i].$$

三角圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ の Grothendieck 群は, $K_0(\mathsf{proj}\, A)$ と同一視されるので, 各 $X \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ のクラス $[X] \in K_0(\mathsf{proj}\, A)$ が定まる. 複体 X の i 次の項を $X^i \in \mathsf{proj}\, A$ とすると, $[X]$ は $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[X^i]$ に他ならない.

命題 5.9 [AiI] 任意の $T \in \mathsf{silt}\, A$ を, 直既約複体の直和として $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ と表す. このとき, $[T_1], \ldots, [T_m]$ は $K_0(\mathsf{proj}\, A)$ の基底を与える. 特に $m = n$ が成立する.

この事実は, 傾複体（より一般に準傾複体）を選ぶことにより, Grothendieck 群の座標変換が行われることを意味する. それにより, 座標軸が「傾く」ことから, tilting という名称が付けられた.

変異を説明するためには, いくつか準備が必要である. まず, 加法圏 $\mathcal{A}$ の対象 $X \in \mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{A}$ の充満部分圏

$$\mathsf{add}\, X := \{X^{\oplus \ell} \text{ の直和因子 } (\ell \in \mathbb{N})\}$$

が定まる. 例えば $A \in \mathsf{Mod}\, A$ に対し, $\mathsf{add}\, A = \mathsf{proj}\, A$ である.

定義 5.10. 加法圏 $\mathcal{A}$ の充満部分圏 $\mathcal{B}$ を考える.

(1) 射 $f : Y \to X$ が $X \in \mathcal{A}$ の**右 $\mathcal{B}$-近似**であるとは, $Y \in \mathcal{B}$ かつ, 任意の $Z \in \mathcal{B}$ と射 $g : Z \to X$ に対し, ある射 $h : Z \to Y$ が存在して $g = f \circ h$ が成立すること.
(2) 任意の $\mathcal{A}$ の対象が右 $\mathcal{B}$-近似を持つとき, $\mathcal{B}$ は**反変有限**であるという.
(3) 射 $f : Y \to X$ が**右極小**であるとは, $f \circ g = f$ を満たす射 $g : Y \to Y$ は同型射であることを意味する.

双対的に**左 $\mathcal{B}$-近似**, **共変有限**, **左極小**が定義される.

この節の冒頭に述べた**変異**とは, 次で与えられる $\mu_i^+(T)$ と $\mu_i^-(T)$ のことである.

命題 5.11 [AiI] 任意の $T \in \mathsf{silt}\, A$ を, 直既約複体の直和として $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ と表す. 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, 以下が成立する.

[*14] 詳しくは, 完全圏 $\mathsf{proj}\, A$ の Grothendieck 群である.

(1) 右極小な右 $\mathsf{add}(T/T_i)$-近似 $f_i : Y_i \to T_i$ が存在し,

$$\mu_i^+(T) := (T/T_i) \oplus (\operatorname{cone} f_i)[-1] \in \mathsf{silt}\, A.$$

(2) 左極小な左 $\mathsf{add}(T/T_i)$-近似 $g_i : T_i \to Z_i$ が存在し,

$$\mu_i^-(T) := (T/T_i) \oplus (\operatorname{cone} g_i) \in \mathsf{silt}\, A.$$

(3) $\mu_i^- \circ \mu_i^+(T) = T = \mu_i^+ \circ \mu_i^-(T)$.

変異と半順序の関係を説明するために, 準備をする.

定義 5.12. 半順序集合 $(P, \geq)$ の**ハッセ図**を, P の元を点とし, $x, y \in P$ が $x > y$ かつ $x > z > y$ なる $z \in P$ が存在しないときに, 矢 $x \leftarrow y$ を描くことで定める.[*15]

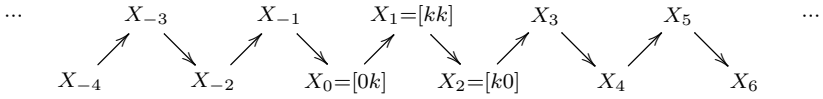
定理 5.13 [AiI] 任意の $T \in \mathsf{silt}\, A$ を, 直既約複体の直和として $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ と表す.

(1) 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\mathsf{silt}\, A$ のハッセ図は矢 $\mu_i^+(T) \leftarrow T \leftarrow \mu_i^-(T)$ を持つ.
(2) $\mathsf{silt}\, A$ のハッセ図が矢 $U \leftarrow T$ を持てば, ある $1 \leq i \leq n$ が存在して $U = \mu_i^+(T)$.
$\mathsf{silt}\, A$ のハッセ図が矢 $T \leftarrow V$ を持てば, ある $1 \leq j \leq n$ が存在して $V = \mu_j^-(T)$.
(3) $\mathsf{silt}\, A$ のハッセ図は, T を始点とする矢を丁度 n 本持ち, T を終点とする矢を丁度 n 本持つ.

例 5.14. (1) A が局所環の場合, $\mathsf{silt}\, A = \{A[i] \mid i \in \mathbb{Z}\}$ であり, そのハッセ図は以下で与えられる.

$$\cdots \longleftarrow A[-1] \longleftarrow A \longleftarrow A[1] \longleftarrow A[2] \longleftarrow \cdots$$

(2) Q を A_2 型の箙とする. (5.2) で与えた $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\, kQ)$ の直既約対象を, 簡単のため以下の記号で表す.



この時, $\mathsf{silt}\, kQ$ のハッセ図は図 3 で与えられる. ここで, 四角で囲んだものは, 次節で扱う 2 項準傾複体である.

6 2 項準傾複体

導来圏は, 加群圏を充満部分圏として含むが, それよりもはるかに大きい. そのため, 加群圏そのものを調べるためには, 導来圏では大きすぎることがある. そのような場合に有効なのが, この章で扱う 2 項準傾複体である. 2 項準傾複体は, 加群圏や導来圏の

[*15] 表現論では $x \to y$ としている文献が多いが, ここでは束論の流儀に合わせる.

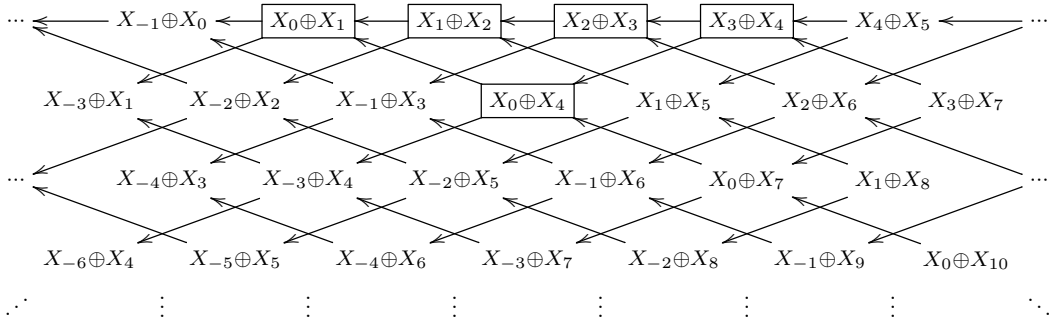


図 3: A_2 型の箙 Q の $\mathsf{silt}\, kQ$ のハッセ図

様々な重要な対象と一対一に対応する. また, 特別な環の 2 項準傾複体は, **団代数** (cluster algebra) の団と一対一に対応する（団代数の**圏化**）[FZ, Ke, Re].

6.1　2 項準傾複体とねじれ類

$X \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ の充満部分圏で,

$$X = \left[\cdots \to 0 \to 0 \to X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \to 0 \to 0 \to \cdots \right]$$

という形の複体全体からなるものを $\mathsf{K}^{[-1,0]}(\mathsf{proj}\, A)$ と表す. 0 次コホモロジー関手により, 圏同値

$$H^0 : \mathsf{K}^{[-1,0]}(\mathsf{proj}\, A)/[A[1]] \simeq \mathsf{mod}\, A$$

が得られる [Au] ため, $\mathsf{K}^{[-1,0]}(\mathsf{proj}\, A)$ は, $\mathsf{mod}\, A$ に非常に近い圏であると言える. ただし $[A[1]]$ は, $\mathsf{add}\, A[1]$ を通過する射全体からなる $\mathsf{K}^{[-1,0]}(\mathsf{proj}\, A)$ のイデアルである. ここで

$$\begin{aligned} \text{2-}\mathsf{silt}\, A &:= \mathsf{silt}\, A \cap \mathsf{K}^{[-1,0]}(\mathsf{proj}\, A), \\ \text{2-}\mathsf{psilt}\, A &:= \mathsf{psilt}\, A \cap \mathsf{K}^{[-1,0]}(\mathsf{proj}\, A) \end{aligned}$$

とおき, それぞれの元を **2 項準傾複体**, **2 項前準傾複体**と呼ぶ. 半順序を用いると, $\text{2-}\mathsf{silt}\, A = \{T \in \mathsf{silt}\, A \mid A \geq T \geq A[1]\}$ と表される. 2 項準傾複体 T から定まる A-加群 $H^0(T)$ を**台 τ 傾加群** (support τ-tilting module) と呼ぶ.[*16]

以下, 基本性質を挙げる. 特に定理 5.13 の変異を, 2 項準傾複体に制限すると, 以下の (1)(2) が成立する.

定理 6.1　[AIR1, DIJ, DF] 任意の $T \in \text{2-}\mathsf{silt}\, A$ を, 直既約複体の直和として $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ と表す.

(1) 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\mu_i^+(T)$ と $\mu_i^-(T)$ のうち, ただ 1 つが $\text{2-}\mathsf{silt}\, A$ に属する.

[*16] 本稿では割愛するが, 本来は Auslander-Reiten 理論を用いて定義される. Idun Reiten 氏, 足立崇英氏との共同研究 [AIR1] で導入した概念であり, 2024 年の Frontiers of Science Award を受賞した.

(2) 2-silt A のハッセ図において, T を端点とする矢は丁度 n 本存在する.
(3) 2-psilt $A \to K_0(\mathsf{proj}\, A)$, $T \mapsto [T]$ は単射.
(4) 任意の 2 項前準傾複体は, ある 2 項準傾複体の直和因子である.

さて, 傾複体の背景には, 導来圏同値があったことを思い出そう. 一般に, 導来圏の同値 $\mathsf{D}(\mathcal{A}) \simeq \mathsf{D}(\mathcal{A}')$ が与えられたとき, 圏同値を介して $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ の共通部分 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ を考えることができる. ここで $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が比較的「近い位置にある」場合 [*17]には, $\mathcal{A}$ の充満部分圏 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ は, 以下のいずれかの性質を満たすものが現れる.

定義 6.2. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の充満部分圏 $\mathcal{B}$ を考える.

(1) $\mathcal{B}$ の任意の対象の商対象が $\mathcal{B}$ に属するとき, $\mathcal{B}$ は**商対象で閉じる**という. 同様に $\mathcal{B}$ の任意の対象の部分対象が $\mathcal{B}$ に属するとき, $\mathcal{B}$ は**部分対象で閉じる**という.
(2) $\mathcal{B}$ が商対象と拡大で閉じるとき, **ねじれ類** (torsion class) と呼ぶ. $\mathcal{B}$ が部分対象と拡大で閉じるとき, **ねじれ自由類** (torsionfree class) と呼ぶ.
(3) $\mathcal{A}$ のねじれ類の全体を $\mathsf{tors}\,\mathcal{A}$, ねじれ自由類の全体を $\mathsf{torf}\,\mathcal{A}$ と表す. また, 環 A に対し, $\mathsf{tors}\, A := \mathsf{tors}(\mathsf{mod}\, A)$, $\mathsf{torf}\, A := \mathsf{torf}(\mathsf{mod}\, A)$ とおく. これらを包含関係に関して, 半順序集合とみなす.

これらの名称は, 次の例に由来する.

例 6.3. $\mathcal{A}$ をアーベル群の圏とする. 元が全てねじれ元であるアーベル群の全体は, ねじれ類を成す. また 0 以外にねじれ元を持たないアーベル群の全体は, ねじれ自由類を成す.

$\mathcal{A}$ が長さを持つとき, 互いに逆写像である全単射

$$(-)^{\perp} : \mathsf{tors}\,\mathcal{A} \simeq \mathsf{torf}\,\mathcal{A},\ \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}^{\perp} \text{ と } {}^{\perp}(-) : \mathsf{torf}\,\mathcal{A} \simeq \mathsf{tors}\,\mathcal{A},\ \mathcal{F} \mapsto {}^{\perp}\mathcal{F}$$

が存在する. ただし, $\mathcal{A}$ の対象の集まり $\mathcal{S}$ に対し, 以下のように定める.

$$\mathcal{S}^{\perp} := \{X \in \mathcal{A} \mid \forall S \in \mathcal{S},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S, X) = 0\},$$
$${}^{\perp}\mathcal{S} := \{X \in \mathcal{A} \mid \forall S \in \mathcal{S},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, S) = 0\}.$$

淺井聡太氏らによる次の重要な定理は, 2 項準傾複体が, ねじれ類, semibrick, wide 部分圏をはじめ, 加群圏や導来圏の様々な重要な対象や部分圏と一対一に対応することを示す. $\mathcal{A}$ の対象の集まり $\mathcal{S}$ に対し, $\mathcal{S}$ を含む最小のねじれ類を $\mathsf{T}(\mathcal{S})$ で表し, $\mathcal{S}$ を含む最小のねじれ自由類を $\mathsf{F}(\mathcal{S})$ で表す. $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathsf{T}(\mathcal{S})$ が共変有限（定義 5.10）な時に, $\mathcal{S}$ は**左有限**であるという. $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathsf{F}(\mathcal{S})$ が反変有限な時に, $\mathcal{S}$ は**右有限**であるという.

定理 6.4 [AIR1, As1, BY, IT, MS] A を体 k 上の有限次元代数とする. 以下の対象の間に標準的な全単射が存在し, (1) との対応は以下で与えられる.

[*17] 一般の場合には, ねじれ類の拡張概念である **t-structure** が必要となる [BBD, HRS].

(1) A の基本的な 2 項準傾複体 T の同型類.

(2) A の基本的な台 τ 傾加群の同型類.

$$T \mapsto H^0(T).$$

(3) $\mathsf{mod}\, A$ の共変有限なねじれ類.

$$T \mapsto \{H^0(T)^{\oplus \ell} \text{ の商加群 } (\ell \in \mathbb{N})\}.$$

(4) $\mathsf{mod}\, A$ の反変有限なねじれ自由類.

$$T \mapsto H^0(T)^{\perp}.$$

(5) A の左有限な semibrick.（$\mathrm{rad}_{\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)}$ は $\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)$-加群としての Jacobson 根基.）

$$T \mapsto \mathcal{S}_T := \{H^0(T)/\operatorname{rad}_{\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)} H^0(T) \text{ の直既約直和因子の同型類 }\}.$$

(6) $\mathsf{mod}\, A$ の左有限な wide 部分圏.

$$T \mapsto \mathsf{Filt}\, \mathcal{S}_T.$$

(7) A の右有限な semibrick.（$\mathrm{soc}_{\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)}$ は $\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)$-加群としての socle.）

$$T \mapsto \mathcal{S}^T := \{\operatorname{soc}_{\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)} H^{-1}(\nu T) \text{ の直既約直和因子の同型類 }\}^{*18}.$$

(8) $\mathsf{mod}\, A$ の右有限な wide 部分圏.

$$T \mapsto \mathsf{Filt}\, \mathcal{S}^T.$$

(9) $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ の中間的かつ有界な **co-t-structure**.[*19]

(10) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\, A)$ の中間的な **simple-minded collection**.

(11) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\, A)$ の中間的かつ代数的な **t-structure**.

定理 6.4 の全単射は, 既に挙げた全単射 $\mathsf{sbrick}\, A \simeq \mathsf{wide}\, A$ や $\mathsf{tors}\, A \simeq \mathsf{torf}\, A$ と可換性を有する. また (1) と (3) の対応が与える単射

$$\mathsf{2\text{-}silt}\, A \hookrightarrow \mathsf{tors}\, A$$

は, 半順序集合の埋め込みを与える. 実は, $\mathsf{wide}\, A$ と $\mathsf{tors}\, A$ の間にも単射 $\mathsf{wide}\, A \to \mathsf{tors}\, A$, $\mathcal{B} \mapsto \mathsf{T}(\mathcal{B})$ があり [MS], 特に次の単射を得る.

$$\mathsf{2\text{-}silt}\, A \xhookrightarrow{\text{定理 6.4(5)}} \mathsf{sbrick}\, A \xrightarrow[\sim]{\mathsf{Filt}} \mathsf{wide}\, A \xhookrightarrow{\mathsf{T}} \mathsf{tors}\, A. \tag{6.1}$$

有限表現型の概念を, 傾理論の観点から緩めたものが次である.

[*18] ν は中山関手 $- \otimes_A \mathrm{Hom}_k(A, k) : \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, A) \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{inj}\, A)$ を表す.

[*19] (9)〜(11) の概念も重要であり, (1) との対応も容易なのだが, 本稿では割愛する. simple-minded collection は, semibrick の複体版である. また, 特定の状況では, **団傾対象** (cluster tilting object)[BMRRT, IY] と呼ばれる傾複体の類似物との間にも全単射が存在する.

定理 6.5 [DIJ] 体 k 上の有限次元代数 A に対し, 以下の条件は同値.

(1) $\mathsf{brick}\, A$ は有限集合.
(2) $\mathsf{2\text{-}silt}\, A$ は有限集合.
(3) 全てのねじれ類は共変有限.
(4) 全てのねじれ自由類は反変有限.

このとき, (6.1) は全て全単射となる.

定理 6.5 の条件が満たされるとき, A は **g 有限**であるといい,[*20] そうでないとき **g 無限**であるという. いくつかの例を挙げる.

例 6.6. (1) A が局所環なら, $\mathsf{2\text{-}silt}\, A = \{A, A[1]\}$ が成立し, 特に A は g 有限である.
(2) A が有限表現型なら, g 有限である.
(3) Dynkin 型の箙 Q の道代数 kQ は有限表現型なので, 特に g 有限である. $\#\,\mathsf{2\text{-}silt}\, kQ = \#\,\mathsf{sbrick}\, kQ$ は例 4.6 参照.
例 3.6(1) の A_n 型の箙 Q に対し, $n = 2, 3$ の場合の $\mathsf{2\text{-}silt}\, kQ$ のハッセ図は図 4 で与えられる. ここで各四角内の $\overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}}\overset{\circ}{}$ と $\overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}}\overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}}$ は (3.2) の Auslander-Reiten 箙を表す. また, $\bullet$ が $H^0(T)$ の直既約直和因子を表し, $\bullet$ と $*$ が対応するねじれ類の直既約対象を表す. 図 2 と比べることで, 定理 6.5 の全単射 $\mathsf{2\text{-}silt}\, kQ \simeq \mathsf{sbrick}\, kQ$ を直接確認できる. ハッセ図の各矢は, brick でラベル付けされているが, その意味は例 6.18 参照.
(4) Dynkin 型の箙 Q の前射影代数 Π は g 有限であり, Q に付随する Weyl 群 W に対し, 全単射 $\mathsf{2\text{-}silt}\, \Pi \simeq W$ が存在する [Mi].
Dynkin 型以外の箙 Q の前射影代数 Π は無限次元代数であり, Coxeter 群からの単射 $W \to \mathsf{2\text{-}silt}\, \Pi$ が存在する [BIRS] ため, g 無限である. この単射は, cDV 特異点の非可換クレパント特異点解消の分類に応用される [IW].

次の結果は, Brauer-Thrall 第 1 定理「無限表現型の有限次元代数は, いくらでも次元が大きな直既約加群を持つ」の brick 版である.

命題 6.7（brick 版 Brauer-Thrall 第 1 定理） [MP, ST] 体 k 上の有限次元代数 A が g 無限なら, いくらでも次元の大きな brick を持つ.

以下の Brauer-Thrall 第 2 定理「代数閉体上の無限表現型の有限次元代数は, ある $d \in \mathbb{N}$ に対し, 無限個の d 次元の直既約加群を持つ」の brick 版は, 未解決である.

予想 6.8（brick 版 Brauer-Thrall 第 2 予想） [Mo, ST] 代数閉体 k 上の有限次元代数 A が g 無限なら, ある $d \in \mathbb{N}$ に対し, 無限個の d 次元の brick を持つ.

[*20] τ **傾有限**, **brick 有限**などとも呼ばれる.

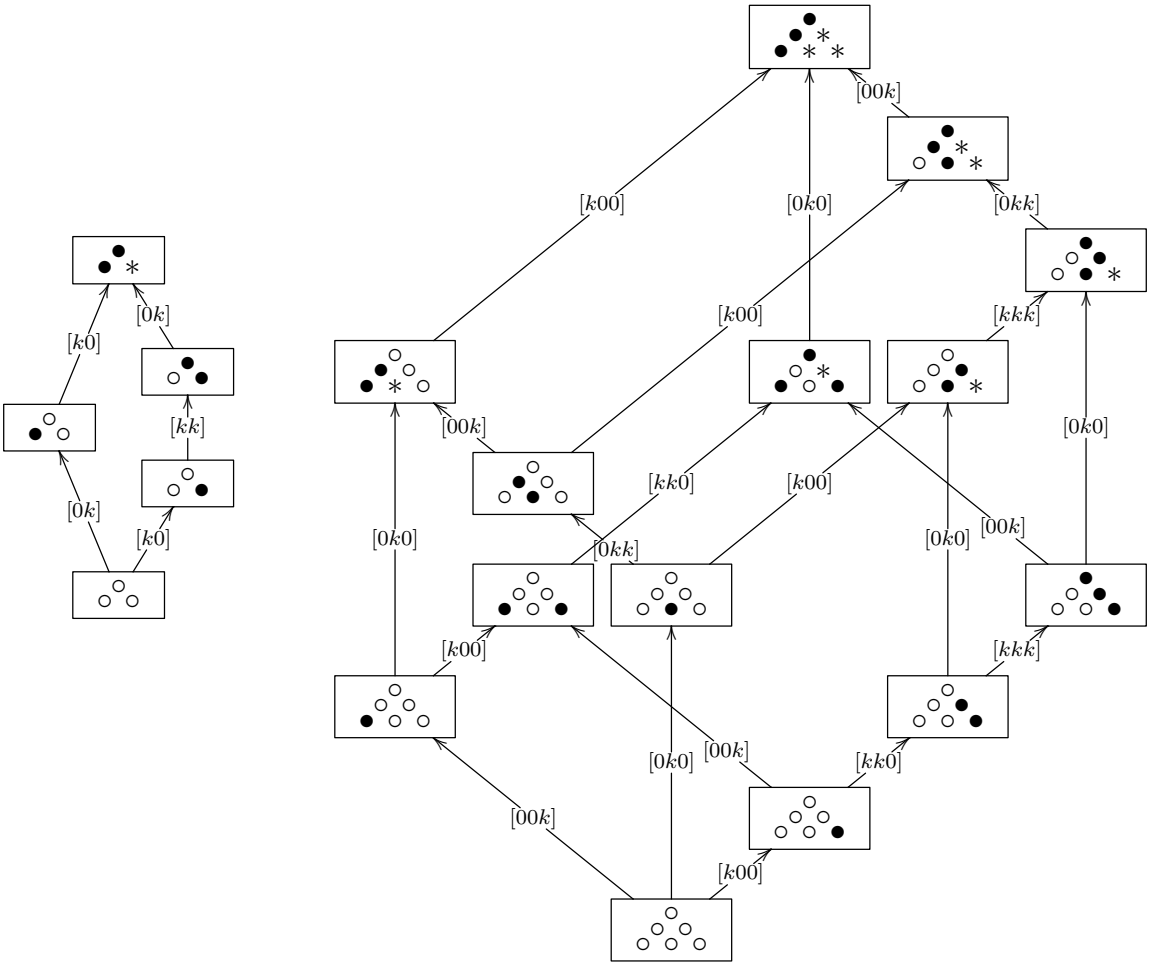


図 4: A_2 型と A_3 型の 2 項準傾複体のハッセ図

他にも g 有限な代数に関しては, 次の自然な問いをはじめ, 様々な研究がなされている（例えば [AAC, AHMW, ALS, HaW, HK, HiW, W]）.

問題 6.9　体上の有限次元代数のうち, g 有限なものを分類せよ.

6.2　ねじれ類の束構造

この節では, 2-silt A と $\mathsf{tors}\, A$ の半順序構造に着目する. 次の概念を思い出そう.

定義 6.10. 半順序集合 $(P, \geq)$ が**完備束** (complete lattice) であるとは, 任意の部分集合 $S \subset P$ に対し, $\{p \in P \mid \forall s \in S,\ s \geq p\}$ が最大元を持ち（$\bigwedge S$ と表し, **結び**と呼ぶ）$\{p \in P \mid \forall s \in S,\ s \leq p\}$ が最小元を持つ（$\bigvee S$ と表し, **交わり**と呼ぶ）ことである.

定義より弱く, 定義の条件が 2 元からなる部分集合 S に対して成立するとき, P を**束** (lattice) と呼ぶ. 明らかに有限な束は完備束である.

一般にアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathsf{tors}\,\mathcal{A}$ と $\mathsf{torf}\,\mathcal{A}$ は完備束であることが容易に分かる. 一

方, 2-silt A が完備束となるのは, かなり例外的な状況であることが, 次より分かる.

命題 6.11 [IRTT] 体 k 上の有限次元代数 A に対し, 2-silt A が完備束である必要十分条件は, A が g 有限であること.

実際, A が g 有限なら, 定理 6.5 より 2-silt $A \simeq \mathsf{tors}\, A$ となり, これは完備束である.
束構造の例を挙げる.

例 6.12. Q を Dynkin 型の箙とする.

(1) Q の Weyl 群は, 弱順序 $\geq$ に関して有限束を成す. Q の前射影代数 Π に対し, 例 6.6(4) の全単射 2-silt $kQ \simeq W$ は, 束の反同型を与える [Mi].
(2) 道代数 kQ に対し, 2-silt kQ は Cambrian 束と呼ばれる有限束と同型である [IT].

完備束 $\mathsf{tors}\,\mathcal{A}$ では, 一般には分配律が成り立たないが, 次の少し弱い条件が成立する.

定義 6.13. [AN, T] 完備束 P が, **完備半分配束** (completely semidistributive lattice) であるとは, 任意の $x \in P$ と部分集合 $S \subset P$ に対し, 以下が成立することである.

(1) 任意の $y, z \in S$ に対し $x \wedge y = x \wedge z$ ならば, 任意の $y \in S$ に対し $x \wedge y = x \wedge (\bigvee S)$.
(2) 任意の $y, z \in S$ に対し $x \vee y = x \vee z$ ならば, 任意の $y \in S$ に対し $x \vee y = x \vee (\bigwedge S)$.

$\mathsf{tors}\,\mathcal{A}$ の束構造で, 最初に言及すべきものは次である.

命題 6.14 [DIRRT] アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathsf{tors}\,\mathcal{A}$ は完備半分配束である.

Birkoff による**有限分配束の構造定理**は, 任意の有限分配束 L が, ある有限半順序集合 P の下に閉じた部分集合全体のなす束と同型であることを主張する. この P は, 以下で定められる L の特別な元の全体として与えられる.

定義 6.15. L を完備束とする.

(1) $x \in L$ が**完備結び既約元**であるとは, $x \neq \bigvee\{y \in L \mid y < x\}$ が成立すること.
(2) $x \in L$ が**完備交わり既約元**であるとは, $x \neq \bigwedge\{y \in L \mid y > x\}$ が成立すること.

L の完備結び既約元の全体を $\mathrm{JI}^{\mathrm{c}}(L)$, 完備交わり既約元の全体を $\mathrm{MI}^{\mathrm{c}}(L)$ で表す.

これらの概念は, 完備半分配束の構造を調べる上で重要である.

命題 6.16 [T] L を完備半分配束とする. このとき, 全単射 $\kappa : \mathrm{JI}^{\mathrm{c}}(L) \simeq \mathrm{MI}^{\mathrm{c}}(L)$ が存在し, L のハッセ図の任意の矢 $x \leftarrow y$ に対し, 以下が成立する.

(1) $\{z \in L \mid x \geq z,\ y \not\geq z\}$ には最小元 j が存在し, $j \in \mathrm{JI}^{\mathrm{c}}(L)$ が成立する.
(2) $\{z \in L \mid x \not\leq z,\ y \leq z\}$ には最大元 m が存在し, $m \in \mathrm{MI}^{\mathrm{c}}(L)$ が成立する.

(3) $m = \kappa(j)$ が成立する.

L のハッセ図の各矢に, 命題 6.16 で与えられる $j \in \mathrm{JI}^{\mathrm{c}}(L)$ で $x \overset{j}{\leftarrow} y$ とラベル付けしたものを**完備結び既約ラベル**, $m \in \mathrm{MI}^{\mathrm{c}}(L)$ で $x \overset{m}{\leftarrow} y$ とラベル付けしたものを**完備交わり既約ラベル**と呼ぶ. 興味深いことに, $\mathsf{tors}\, A$ の完備結び既約元と完備交わり既約元は, いずれも brick によって与えられ, さらに 2 つのラベル付けを統合する.

定理 6.17 [BCZ, DIRRT, T] A を体 k 上の有限次元代数とする.

(1) 全単射 $\mathsf{brick}\, A \simeq \mathrm{JI}^{\mathrm{c}}(\mathsf{tors}\, A)$ が, $S \mapsto \mathsf{T}(S)$ により与えられる.
(2) 全単射 $\mathsf{brick}\, A \simeq \mathrm{MI}^{\mathrm{c}}(\mathsf{tors}\, A)$ が, $S \mapsto {}^{\perp}S$ により与えられる.
(3) $\mathsf{tors}\, \mathcal{A}$ のハッセ図の任意の矢 $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{U}$ に対し, ただ一つの $S \in \mathsf{brick}\, A$ が存在し, $\mathcal{T} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \mathsf{Filt}\, S$ が成立する.
(4) (3) のとき, $\mathcal{T} \overset{\mathsf{T}(S)}{\longleftarrow} \mathcal{U}$ は完備結び既約ラベルを与え, $\mathcal{T} \overset{{}^{\perp}S}{\longleftarrow} \mathcal{U}$ は完備交わり既約ラベルを与える.

定理 6.17(4) は, brick S によって $\mathcal{T} \overset{S}{\leftarrow} \mathcal{U}$ とラベル付けする**（brick ラベル）**のが本質的であることを示す. brick ラベルは様々な情報を持っている. 例えば, brick ラベルを用いることで, 定理 6.4 の (1) と (5),(7) の間の全単射を回復することができる [As1].

例 6.18. 例 3.6(1) の A_n 型の箙 Q に対し, $n = 2, 3$ の場合の $\mathsf{2\text{-}silt}\, kQ$ のハッセ図の brick ラベルは, 図 4 で与えられる. 一つの点に入る矢の brick ラベルを集めることにより, 図 2 で対応する点の semibrick が回復する.

榎本悠久氏は, 完備束 $\mathsf{tors}\, A$ から, 包含関係に関する半順序集合 $\mathsf{wide}\, A$ が再構成されるという, 著しい事実を示した [E]. 完備束 $\mathsf{tors}\, A$ については, 他にも様々な結果が知られているが, ここでは割愛し, 次の問でこの節を終える.

問題 6.19 体上の有限次元代数 A の $\mathsf{tors}\, A$ として実現される有限束（より一般に完備束）を特徴付けよ.

6.3 実 Grothendieck 群と g 扇

この節では, 青木利隆氏, 東谷章弘氏, 加瀬遼一氏, 水野有哉氏との一連の共同研究 [AHIKM1, AHIKM2, AHIKM3] に関して説明する. 引き続き, 体 k 上の有限次元代数 A を考える. A のランクを n とし, 直既約射影 A-加群の同型類を $P_1, \ldots, P_n$ とするとき,

$$K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}} := K_0(\mathsf{proj}\, A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}[P_i]$$

を**実 Grothendieck 群**と呼ぶ. 以下では, $K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ と $K_0(\mathsf{proj}\, A)$ を, それぞれ $\mathbb{R}^n$ とその内部の格子 $\mathbb{Z}^n$ と同一視する. 命題 5.9 より, 2 項準傾複体の直既約直和因子は, $K_0(\mathsf{proj}\, A)$ の基底を与えるので, $K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ 内の扇を考えるのが自然である.

扇について復習する. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 σ が**有理多面錐**（以下, **錐**）であるとは, 有限個のベクトル $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{Q}^d$ によって以下のように表される（生成される）ことである:

$$\sigma = \mathrm{cone}\{v_1, \ldots, v_m\} := \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i v_i \mid r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

さらに $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ が成立するときに, **強凸**であるという. また, $f(\sigma) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ を満たす線形形式 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ から定まる錐 σ の部分集合 $\sigma \cap \mathrm{Ker}\, f$ を, σ の**面**と呼ぶ.

定義 6.20. [F] $\mathbb{R}^n$ 内の強凸な錐の集合 Σ が**扇** (fan) であるとは, 以下が成立すること.

(1) 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し, σ の面も Σ に属する.
(2) 任意の $\sigma, \tau \in \Sigma$ に対し, $\sigma \cap \tau$ は σ の面である.

さらに, 任意の $\sigma \in \Sigma$ が, $\mathbb{Z}^n$ の基底の部分集合によって生成されるとき, Σ は**非特異**であるという. また, Σ が有限個の錐からなるとき, **有限**であるといい, $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \mathbb{R}^n$ が成立するとき, **完備**であるという.

基本的な 2 項前準傾複体の同型類の集合を 2-psilt A と表していた.

定義 6.21. [AHIKM1] 任意の $T \in$ 2-psilt A を, 直既約複体の直和 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ として表す. $K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}$ 内の錐 $C(T)$ を以下で定める:

$$C(T) := \mathrm{cone}\{[T_1], \ldots, [T_m]\} \subset K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}}.$$

また A の **g 扇** $\Sigma(A)$ を以下で定める:

$$\Sigma(A) := \{C(T) \mid T \in \text{2-psilt } A\}.$$

g 扇の基本性質を以下に挙げるが, いずれも 2 項準傾複体の性質の言い換えである.

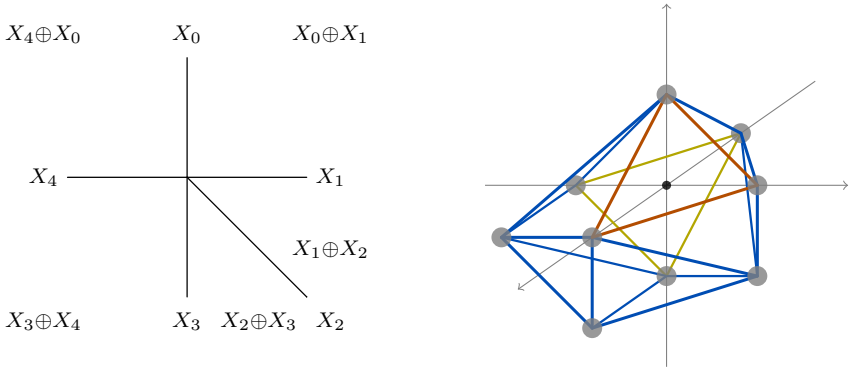
命題 6.22 [AHIKM1] A を体 k 上の有限次元代数とし, ランクを n とする.

(1) $\Sigma(A)$ は, 非特異な扇である.
(2) $\Sigma(A)$ の任意の錐は, ある n 次元の錐の面である.
(3) $\Sigma(A)$ の任意の $(n-1)$ 次元の錐は, 丁度 2 つの n 次元の錐の面である.
(4) 正錐 $C(A) = \mathrm{cone}\{[P_1], \ldots, [P_n]\}$ と負錐 $C(A[1]) = -C(A)$ は, $\Sigma(A)$ に属する.
(5) $\Sigma(A)$ の任意の錐は, 基底 $[P_1], \ldots, [P_n]$ に関する 2^n 個の象限のいずれかに含まれる.

命題 6.22 に挙げた性質を全て満たす扇を, **符号同一** (sign-coherent) であるという.

例 6.23. 例 3.6(1) の A_n 型の箙 Q に対し, $n = 2, 3$ の場合の $\Sigma(kQ)$ は以下である. 左が

A_2 型であり, 各 X_i は図 3 の記号である. 右が A_3 型であり, 赤が正錐, 黄が負錐である.



g 扇からは A の様々な情報を読み取ることが出来るが, ここでは以下のみ挙げておく. ここで $\mathbb{R}^n$ 内の**格子多面体**とは, 有限個の格子点の凸包を意味する.

命題 6.24 (1) [DIJ] $\Sigma(A)$ は, 2-silt A のハッセ図を決定する.
(2) [As2] A が g 有限であること, $\Sigma(A)$ が有限であること, $\Sigma(A)$ が完備であることは, いずれも同値.
(3) [AHIKM1] A が g 有限ならば, $\Sigma(A)$ はある格子多面体の法扇 (normal fan) となる.

A が g 有限であると仮定する. $\mathbb{R}^n$ 内の有限扇 Σ に対し, i 次元の錐の個数を f_{i-1} で表し, その母関数 $f(x) := \sum_{i=0}^{n} f_{i-1}x^{n-i}$ を考える. Σ の **h ベクトル** $(h_0, \dots, h_n)$ を, $f(x-1) = \sum_{i=0}^{n} h_i x^{n-i}$ により定める. 興味深いことに, h ベクトルは semibrick の個数の数え上げを与える.

定理 6.25 [AHIKM1] $0 \leq i \leq n$ に対し, 以下が成立する.

(1) $h_i = \{\mathcal{S} \in \mathsf{sbrick}\, A \mid \#\mathcal{S} = i\}$ が成立し, それは 2-silt A のハッセ図の点で, 丁度 i 本の矢の終点となるものの個数に等しい.
(2) $h_i = h_{n-i}$ が成立する**（Dehn-Sommerville 等式）**.
(3) $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ と $h_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \cdots \geq h_{n-1} \geq h_n$ が成立する**（単峰性）**.

定理 6.25(1) の後半は, 定理 6.17 で説明した brick ラベルの性質の帰結である. また定理 6.25(2) は, 定理 6.4 の (5) と (7) の間の全単射の帰結である.

例 6.26. 例 6.23 で挙げた 2 つの $\Sigma(kQ)$ の h ベクトルは, それぞれ $(1,3,1)$ と $(1,6,6,1)$ である. なお一般の Dynkin 型の箙 Q に対し, $\Sigma(kQ)$ の h ベクトルは **W-Narayana 数**によって与えられる.

本稿の残りの部分で, 次の問に関して分かっている事を説明する.

問題 6.27 g 扇として実現される有限扇を特徴付けよ.

ランク 2 の場合には, 符号同一性が必要十分条件を与える.

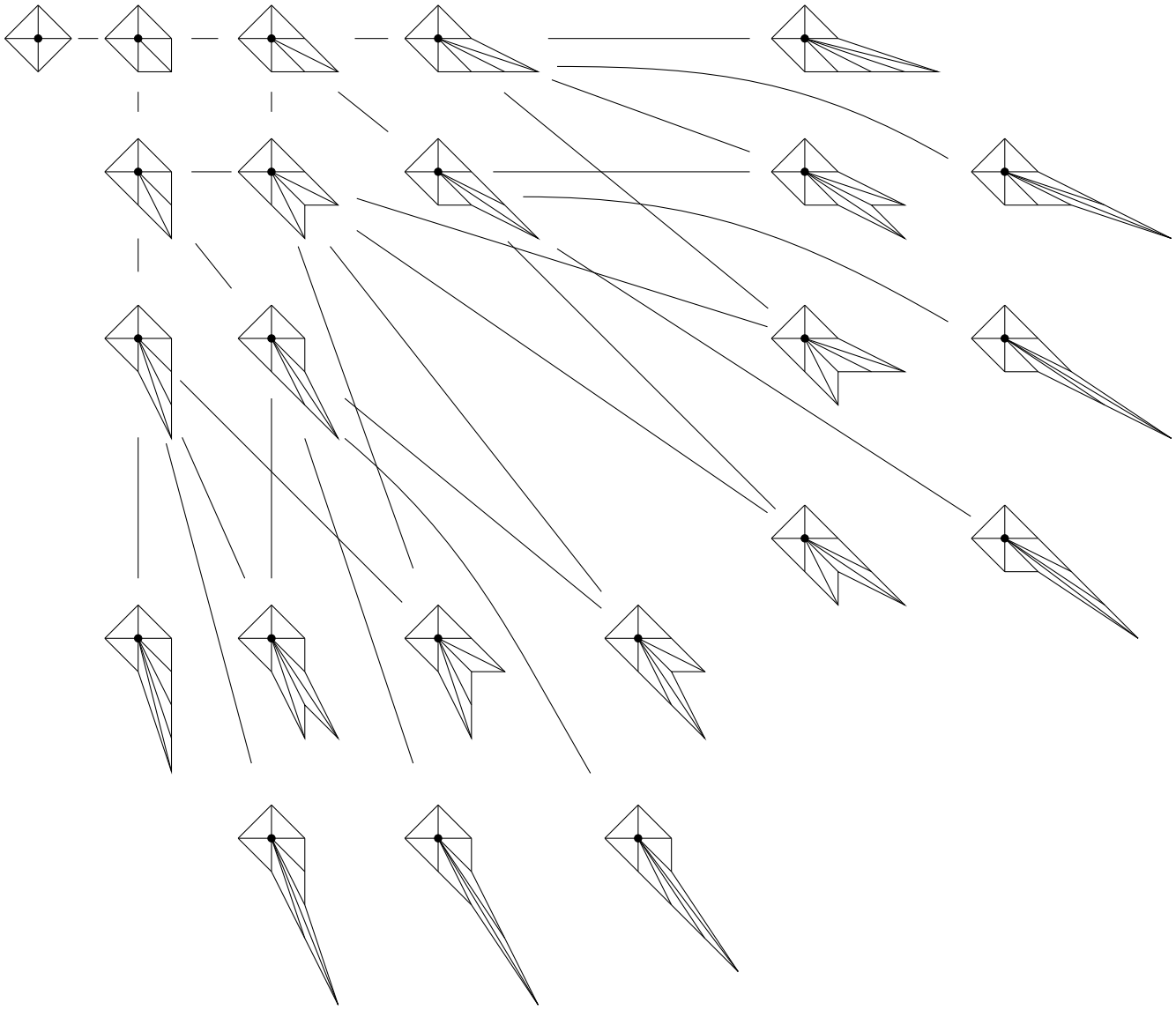


図 5: ランク 2 の符号同一な扇の例

定理 6.28 [AHIKM2] k を任意の体とする. $\mathbb{R}^2$ 内の任意の符号同一な有限扇 Σ に対し, k 上の有限次元代数 A が存在して, $\Sigma(A) = \Sigma$ が成立する.

例 6.29. 図 5 に, $\mathbb{R}^2$ 内の符号同一な扇の例を挙げた（いずれも定義 6.30 の $\mathrm{P}(A)$ を表示しており, 第一象限を正錐とする）. これらを g 扇に持つ有限次元代数の例を, 図 6 で与えた（図表の都合で, 右端の 3 つの扇に対応する代数は割愛）.

ランク 3 以上では, 問題 6.27 は非常に難しいため, 次の特別なクラスに着目する.

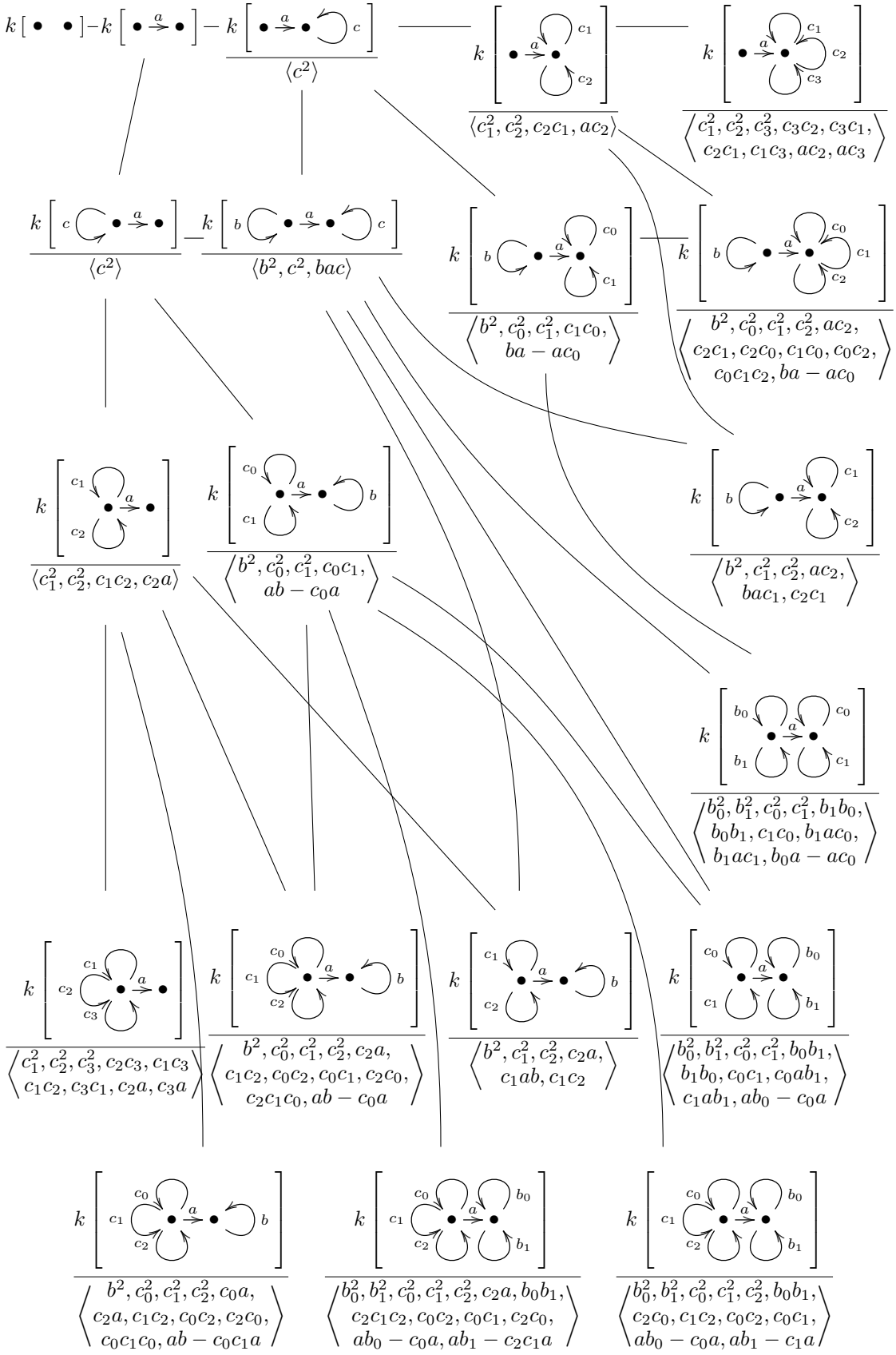


図 6: 図 5 の扇を g 扇に持つ代数の例

定義 6.30. 2 項準傾複体 $T \in \mathsf{2\text{-}silt}\, A$ を直既約複体の直和 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ として表し,

$$C_{\leq 1}(T) := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} a_i [T_i] \mid a_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\ell} a_i \leq 1 \right\} \subset K_0(\mathsf{proj}\, A)_{\mathbb{R}},$$
$$\mathrm{P}(A) := \bigcup_{T \in \mathsf{2\text{-}silt}\, A} C_{\leq 1}(T)$$

とおく. $\mathrm{P}(A)$ が凸である時に, $\mathrm{P}(A)$ を **g 多面体**と呼び, A と $\Sigma(A)$ は **g 凸**であるという.

A が g 凸ならば, $\Sigma(A)$ は完備なので, 命題 6.24(2) より, A は g 有限である.

$V := \mathbb{R}^n$ 内の格子多面体 P に対し, V の双対空間を V^* と表し,

$$P^* := \{x \in V^* \mid \forall y \in P,\ (x, y) \leq 1\}$$

が V^* 内の格子多面体となるときに, P を**反射多面体**と呼ぶ. 固定した n に対し, $\mathbb{R}^n$ 内の反射多面体は有限個しか存在しない [B].

命題 6.31 [AHIKM1]

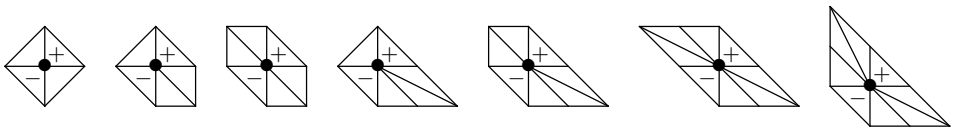
(1) A が g 凸ならば, $\mathrm{P}(A)$ は反射多面体である.[*21]
(2) ランク n の g 凸な g 扇は, 有限個しか存在しない.

この命題より, 次の問いは自然に浮かび上がる.

問題 6.32 g 多面体として実現される反射多面体を特徴付けよ.

ランクが 2 と 3 の場合は, 以下の解答が与えられている.

定理 6.33 (1) [AHIKM1] ランク 2 の g 多面体は, 同型を除いて以下の 7 種類である. ただし, + が正錐, − が負錐を表す.



(2) [AHIKM3] ランク 3 の g 多面体は, 同型を除いて図 7 と 8 の 61 種類である. ただし, 赤が正錐, 黄が負錐を表す.

6.4 終わりに

一般の g 扇は完備では無いが, 安定性条件から定まるねじれ類を考える事により, 実 Grothendieck 群内の部屋壁構造が定まり, g 扇を補完することができる. 詳細は [As2, AsI, BST, Y] 等を参照していただきたい. 他にも関連する様々な研究があるのだが, 本稿では触れることが出来なかった. 例えば [AIR2] の文献を参照していただきたい. 紙数と時間が尽きたので, ここで筆を置く.

[*21] このとき $\mathrm{P}(A)^*$ は, 定理 6.4(10) で言及した simple-minded collection の凸包として与えられる.

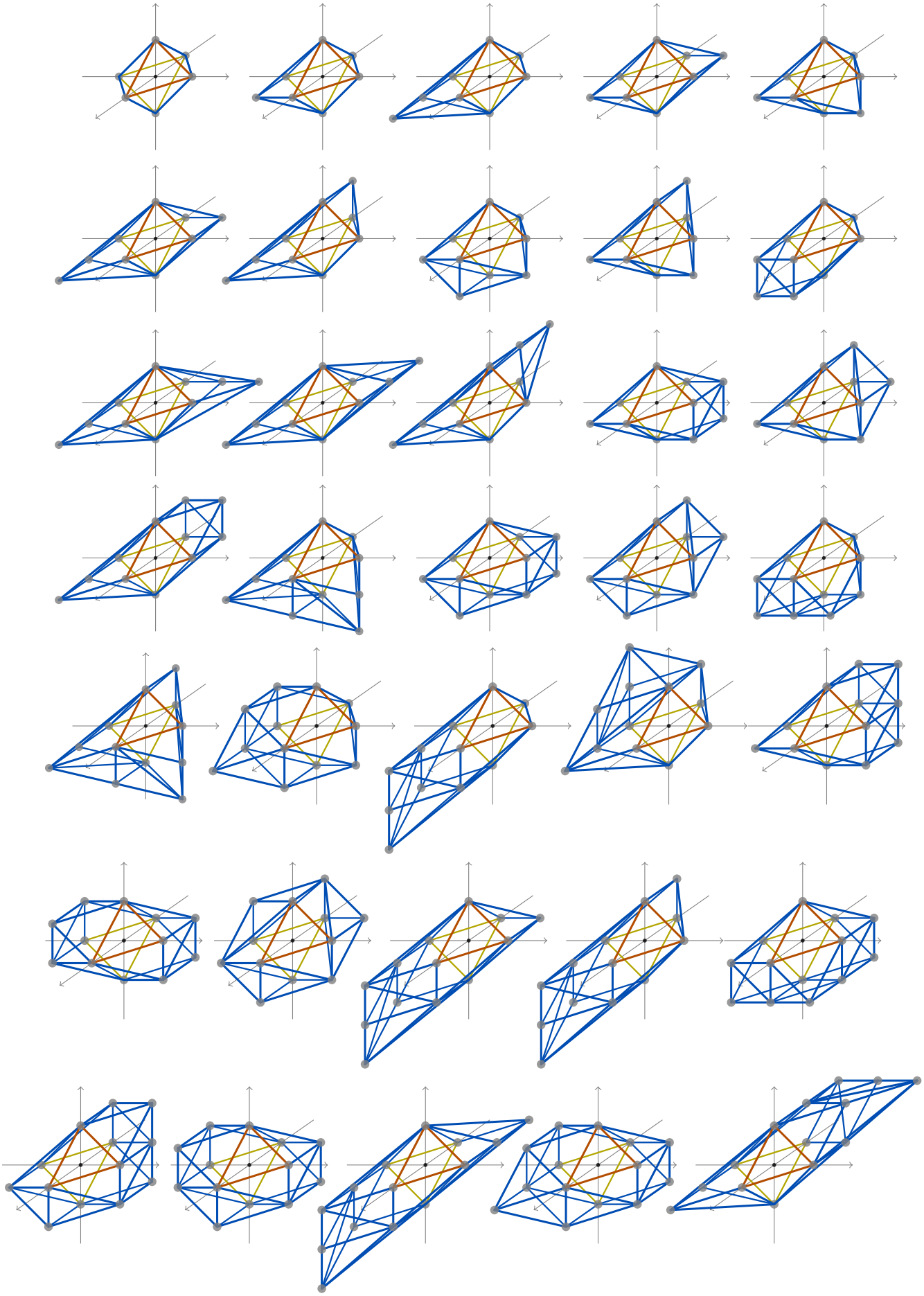


図 7: ランク 3 の g 多面体

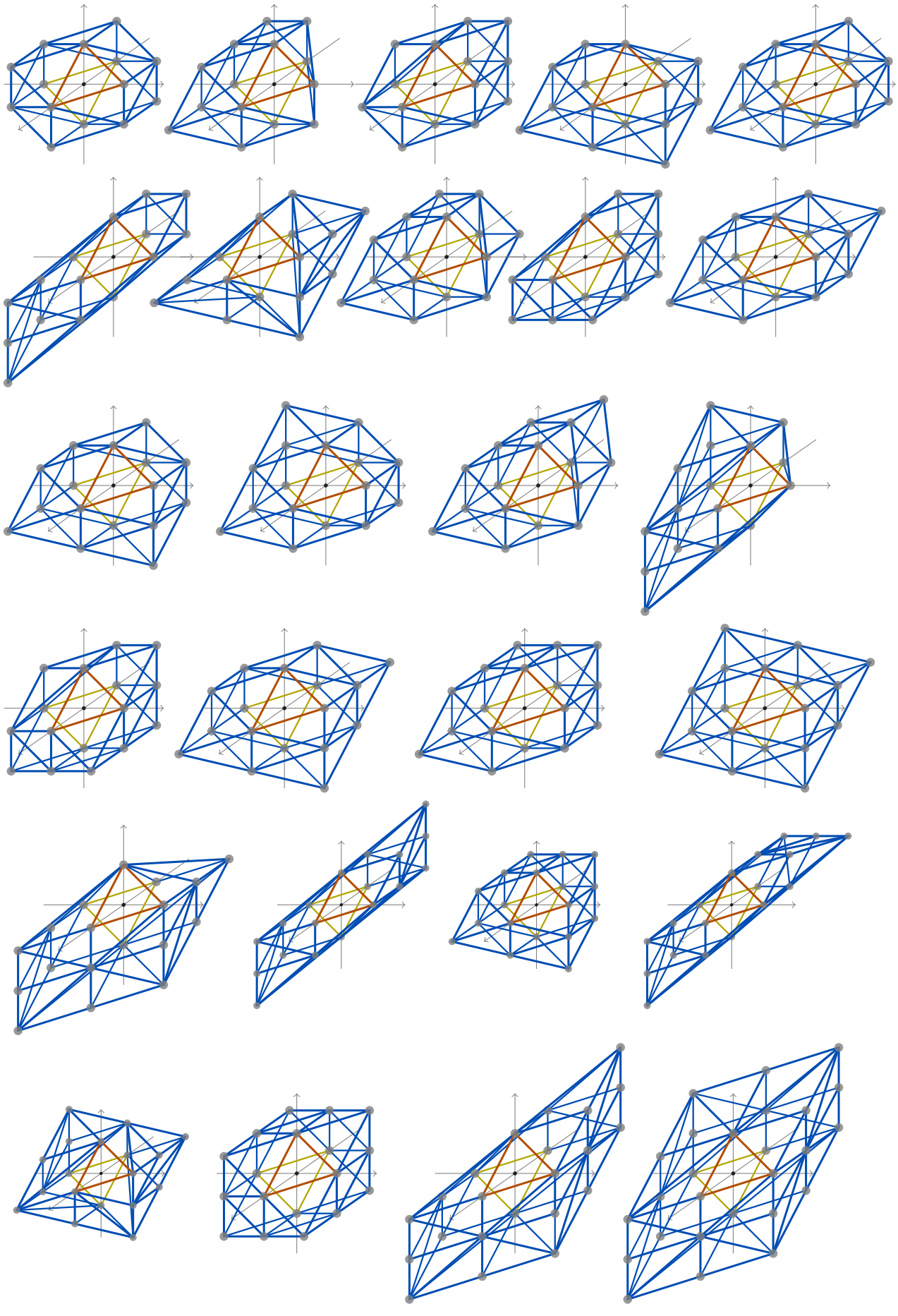


図 8: ランク 3 の g 多面体（続き）

参考文献

[岩佐] 岩永恭雄, 佐藤眞久, 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002

[中岡] 中岡宏行, 圏論の技法, 日本評論社, 2015

[AAC] T. Adachi, T. Aihara, A. Chan, *Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras*, Math. Z. 290 (2018), no. 1-2, 1–36.

[AIR1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory*, Compos. Math. 150 (2014), no. 3, 415–452.

[AIR2] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *On τ-tilting theory*, arXiv:2410.15842

[AN] K. Adaricheva, J. Nation, *Classes of semidistributive lattices*, Lattice theory: special topics and applications. Vol. 2, 59–101, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.

[AHMW] T. Aihara, T. Honma, K. Miyamoto, Q. Wang, *Report on the finiteness of silting objects*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 64 (2021), no. 2, 217–233.

[AiI] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. 85 (2012), no. 3, 633–668.

[AF] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics, 13. Springer-Verlag, New York, 1992.

[AHIKM1] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory I: Foundations*, arXiv:2203.15213.

[AHIKM2] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory II: g-fans of rank 2*, arXiv:2301.01498.

[AHIKM3] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory III: Classification of convex g-fans of rank 3*, in preparation.

[ALS] S. Ariki, S. Lyle, L. Speyer, *Schurian-finiteness of blocks of type A Hecke algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) 108 (2023), no. 6, 2333–2376.

[As1] S. Asai, *Semibricks*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, Issue 16, 4993–5054.

[As2] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, Adv. Math. 381 (2021), 107615.

[AsI] S. Asai, O. Iyama, *Semistable torsion classes and canonical decompositions in Grothendieck groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 129 (2024), no. 5, Paper No. e12639.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Au] M. Auslander, *Representation Dimension of Artin Algebras*, Queen Mary College Mathematics Notes, 1971.

[BCZ] E. Barnard, A. Carroll, S. Zhu, *Minimal inclusions of torsion classes*, Algebr. Comb. 2 (2019), no. 5, 879–901.

[B] V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493–535.

[BBD] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Asterisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1982

[BB] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Lecture Notes in Math. 839, Springer-Verlag (1980), 103–169.

[BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and chamber structure for finite-dimensional algebras*, Adv. Math. 354 (2019), 106746.

[BY] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs*, Advances in representation theory of algebras, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

[BIRS] A. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035–1079.

[BMRRT] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. 204 (2006), no. 2, 572–618.

[DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, *τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2019, no. 3, 852–892.

[DIRRT] L. Demonet, O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas, *Lattice theory of torsion classes: Beyond τ-tilting theory*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 10 (2023), 542–612.

[DF] H. Derksen, J. Fei, *General presentations of algebras*, Adv. Math. **278** (2015), 210–237.

[DW] H. Derksen, J. Weyman, *An introduction to quiver representations*, Graduate Studies in Mathematics, 184. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[E] H. Enomoto, *From the lattice of torsion classes to the posets of wide subcategories and ICE-closed subcategories*, Algebr. Represent. Theory 26 (2023), no. 6, 3223–3253.

[FZ] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497–529.

[F] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[G] Gnedin, *Silting theory under change of rings*, arXiv:2204.00608.

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[HRS] D. Happel, I. Reiten, S. O. Smalo, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996), no. 575

[HaW] W. Hara, M. Wemyss, *Spherical objects in dimensions two and three*, arXiv:2205.11552.

[HK] N. Hiramae, Y. Kozakai, *τ-Tilting finiteness of group algebras of semidirect products of abelian p-groups and abelian p' -groups*, arXiv:2405.10021.

[HiW] Y. Hirano, M. Wemyss, *Faithful actions from hyperplane arrangements*, Geom. Topol. 22 (2018), no. 6, 3395–3433.

[HKM] M. Hoshino, Y. Kato, J. Miyachi, *On t-structures and torsion theories induced by compact objects*, J. Pure Appl. Algebra 167 (2002), no. 1, 15–35.

[IT] C. Ingalls, H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.

[IK] O. Iyama, Y. Kimura, *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, Adv. Math. 446 (2024), Paper No. 109631.

[IRTT] O. Iyama, I. Reiten, H. Thomas, G. Todorov, *Lattice structure of torsion classes for path algebras*, Bull. Lond. Math. Soc. 47 (2015), no. 4, 639–650.

[IW] O. Iyama, M. Wemyss, *Tits cone intersections and applications*, in preparation.

[IY] O. Iyama, Y. Yoshino, *Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules*, Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 117–168.

[Ke] B. Keller, *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories*, Triangulated categories, 76–160, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 375, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[Ki] Y. Kimura, *Tilting and silting theory of Noetherian algebras*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2024, no. 2, 1685–1732.

[KV] B. Keller, D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, Deuxiéme Contact Franco-Belge en Algébre (Faulx-les-Tombes, 1987). Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A 40 (1988), no. 2, 239–253.

[MS] F. Marks, J. Stovicek, *Torsion classes, wide subcategories and localisations*, Bull. Lond. Math. Soc. 49 (2017), no. 3, 405–416.

[Mi] Y. Mizuno, *Classifying τ-tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, Math. Z. 277 (2014), no. 3-4, 665–690.

[Mo] K. Mousavand, *τ-tilting finiteness of non-distributive algebras and their module varieties*, J. Algebra 608 (2022), 673–690.

[MP] K. Mousavand, C. Paquette, *Minimal (τ-)tilting infinite algebras*, Nagoya Math. J. 249 (2023), 221–238.

[Re] I. Reiten, *Cluster categories*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I, 558–594. Hindustan Book Agency, New Delhi; distributed by, 2010.

[Ric] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.

[RS] C. Riedtmann, A. Schofield, *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 1, 70–78.

[Rin] C. M. Ringel, *Representations of K-species and bimodules*, J. Algebra 41 (1976), no. 2, 269–302.

[ST] S. Schroll, H. Treffinger, *A τ-tilting approach to the first Brauer-Thrall conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), no. 11, 4567–4574.

[T] H. Thomas, *An introduction to the lattice of torsion classes*, Bull. Iranian Math. Soc. 47 (2021), S35–S55.

[W] Q. Wang, *On τ-tilting finiteness of the Schur algebra*, J. Pure Appl. Algebra 226 (2022), no. 1, Paper No. 106818.

[Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, Doc. Math. 23 (2018), 35–47.