自由性と単純性：傾理論再訪

伊山 修

東京大学大学院数理科学研究科

日本数学会秋季総合分科会, 2025 年 9 月 19 日

アブストラクト https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~iyama/MSJ2025.pdf

はじめに

環と加群

- 環：少数の公理系を満たす加法と乗法が与えられた集合
  古典的数体系の一般化
- A-加群：同様の公理系を満たす加法と環 A の作用が与えられた集合
  ベクトル空間, アーベル群, 環のイデアルの一般化

問題

与えられた環上の加群を分類せよ

- どのような環を考えるか？
- どのような加群を考えるか？
- 何を分類と呼ぶか？

最も基本的な 2 つの加群のクラス：

- 自由加群
- 単純加群

本講演の主対象

1. 自由加群の自然な拡張である準傾複体
2. 単純加群の自然な拡張である semibrick

自由加群

以下, 加群と言えば右加群を意味する

A 自身は自然に A-加群

定義

A-加群 A の集合 I 上の直和 $A^{\oplus I}$ を, 自由加群と呼ぶ

自由加群は, あらゆる加群の中で最も大きい：

命題

任意の A-加群 X に対し, 自由 A-加群 P と全射準同型 $f : P \to P$ が存在する

圏の観点からは, 次がより自然

定義

自由加群の直和因子を, 射影加群と呼ぶ

単純加群

零加群 0：零元のみからなる A-加群

あらゆる加群の中で, 零加群の次に小さいものを考える：

定義

1. A-加群 $X \neq 0$ が単純加群であるとは, 部分加群が 0 と X のみであること
2. 単純加群の直和を, 半単純加群と呼ぶ

線型代数学より：

命題

体 k 上の任意の加群は, 自由加群であり, また半単純加群でもある

証明 任意のベクトル空間は基底を持つことより, 主張が従う. □

問

体以外の環に対し, 加群を分類することは可能か？

Artin-Wedderburn の定理

環 A に対し, 以下は同値

1. 任意の A-加群は, 半単純加群
2. 任意の A-加群は, 射影加群
3. A は, Jacobson 根基が 0 の Artin 環
4. A は, 有限個の斜体上の行列環の直積と環同型

このとき A を半単純環と呼ぶ

2 つ目の条件を, A の大域次元が 0 であるという

- Mod A : A-加群の圏
- proj A : 有限生成射影 A-加群の圏

定義

A-加群 P が射影生成元 (progenerator) であるとは,

1. $P \in \mathrm{proj}\, A$
2. 集合 I と全射 A-準同型 $f : P^{\oplus I} \to A$ が存在する

$\mathrm{End}_A(X)$：A-加群 X の自己準同型環

森田の定理（森田紀一）

環 A と B に対し，以下は同値

1. 圏同値 $\mathrm{Mod}\, A \simeq \mathrm{Mod}\, B$ が存在
2. A の射影生成元 P で，$\mathrm{End}_A(P)$ が B と環同型であるものが存在

このとき A と B は森田同値であるという

圏同値は以下で与えられる

$$\mathrm{Hom}_A(P, -) : \mathrm{Mod}\, A \simeq \mathrm{Mod}\, \mathrm{End}_A(P) : - \otimes_{\mathrm{End}_A(P)} P$$

例

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，環 A と行列環 $M_n(A)$ は森田同値

証明 自由 A-加群 $P := A^{\oplus n}$ は射影生成元であり，$\mathrm{End}_A(P) = M_n(A)$ □

箙と道代数

２つの基本操作 Hom とテンソル積は, 環の２つの普遍的な構成法を与える

- 自己準同型環 $\mathsf{End}_A(X)$
- 両側 A-加群 M のテンソル代数 $T_A(M)$：最も基本的な場合が箙の道代数

定義

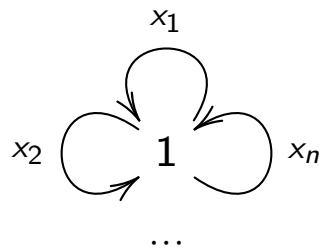
箙（えびら, quiver）とは, 4つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ で,

1. Q_0 と Q_1 は集合
2. s と t は写像 $Q_1 \to Q_0$（s=source=始点, t=target=終点）

- 箙＝有向グラフ

  Q_0 の元を点として, また Q_1 の元 a を矢 $s(a) \xrightarrow{a} t(a)$ として描く

例 (1) $1 \xleftarrow{a_2} 2 \xleftarrow{a_3} \cdots \xleftarrow{a_{n-1}} n-1 \xleftarrow{a_n} n$　(2)



定義

Q を箙とする

1. 長さ 0 の道とは, 記号 e_i のこと（ただし $i \in Q_0$）
2. 長さ $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ の道とは, 矢の列 $p = a_\ell \cdots a_2 a_1$ で $t(a_i) = s(a_{i+1})$ $(1 \leq i < \ell)$ を満たすもの

道 p に対し, 始点 $s(p)$ と終点 $t(p)$ が自然に定まる

道代数

環 A と箙 Q に対し, 道を基底とする自由 A-加群を AQ と表す

定義

以下で定まる積を A-線型に拡張して, 道代数 AQ を定める

1. 道 p, q が $t(p) = s(q)$ を満たすときは, これらを繋げた道を qp とする
   （$p = e_i$ なら $qp := q$ とし, $q = e_i$ なら $qp := p$）
2. 道 p, q が $t(p) \neq s(q)$ を満たすときは, $qp := 0$ とする

- 例 (1) の Q に対し, $AQ \simeq T_n(A) := \begin{bmatrix} A & A & \cdots & A & A \\ 0 & A & \cdots & A & A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A & A \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix}$
- 例 (2) の Q に対し, $AQ \simeq A\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$（$n$ 変数非可換多項式環）
- 道代数 AQ をイデアルで割ることが, 環の標準的な構成法
  例えば $A[x_1, \ldots, x_n] = A\langle x_1, \ldots, x_n \rangle / (x_i x_j - x_j x_i \mid 1 \leq i, j \leq n)$

命題

体 k と箙 Q に対し, 道代数 kQ の大域次元は 1 以下（遺伝的）

証明 kQ は, テンソル代数 $T_{kQ_0}(kQ_1)$ と同型であることを使う □

箙の表現

- 環 A 上の A-加群 $X \neq 0$ に対し,

X：直既約 $\Longleftrightarrow$ X が A-加群の直和 $Y \oplus Z$ と同型なら, Y と Z のどちらかが 0

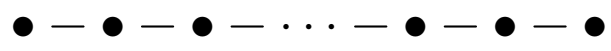
Gabriel の定理

k を体とする. 箙 Q に対し, 以下は同値

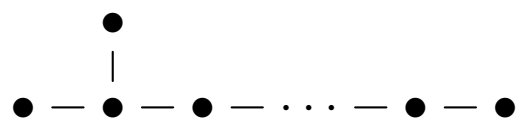
1. kQ は有限表現型, つまり直既約加群の同型類は有限個
2. Q は Dynkin 型の箙の非交和

Dynkin 型の箙＝以下のグラフの辺を矢に置き換えて得られる箙

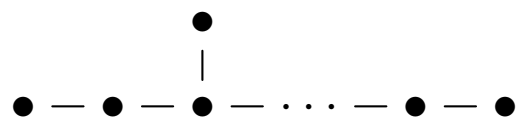
A_n $(n \geq 1)$



D_n $(n \geq 4)$



E_n $(n = 6, 7, 8)$



Dynkin 型の箙 Q に対し

$$\{ \text{直既約 } kQ\text{-加群の同型類} \} \simeq \Phi^+ : Q \text{ のルート系の正ルート}$$

三角行列環の表現

A_n 型の箙 $Q = [\ 1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots \leftarrow n-1 \leftarrow n\ ]$

道代数 $kQ = T_n(k) = \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k & k \\ 0 & k & \cdots & k & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{bmatrix}$

- 直既約射影 kQ-加群の同型類の全体は，$T_n(k)$ の n 個の行ベクトル

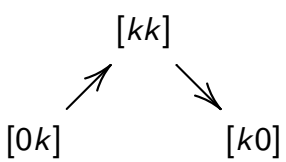
$$P_1 := [kk\cdots kk] \supset P_2 := [0k\cdots kk] \supset \cdots \supset P_n := [00\cdots 0k]$$

- 直既約 kQ-加群の同型類の全体は以下 $(P_{n+1} := 0)$

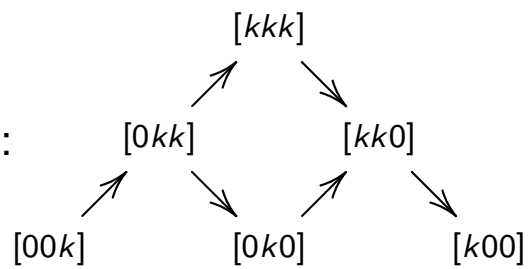
$$\{X_{i,j} := P_i/P_{j+1} = [\overset{1}{0}\cdots 0\ \overset{i}{k}\cdots\overset{j}{k}\ 0\cdots\overset{n}{0}] \mid 1 \le i \le j \le n\} \simeq \Phi_+$$

- 環 A に対し，mod A で長さが有限な A-加群の圏を表す
- mod kQ の構造は Auslander-Reiten 箙で完全に記述される
  点：直既約 kQ-加群の同型類
  矢：既約写像 $f : X \to Y$

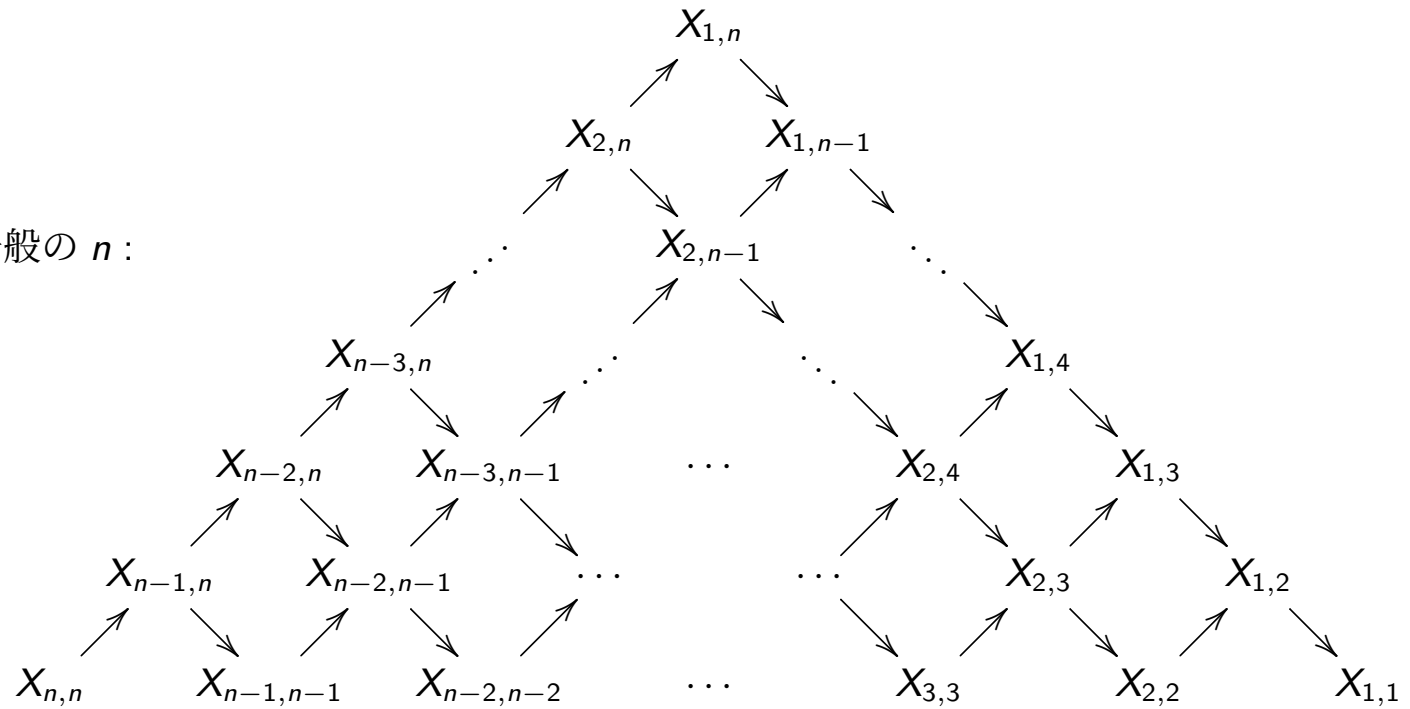
$n = 2$:



$n = 3$:



一般の n：



- 拡大 Dynkin 型の箙の場合も，mod kQ は十分に良く分かる
- 一般の箙でも，直既約加群の次元ベクトルは正ルートと一致（Kac の定理）
  しかし対応は一対一ではなく，同型類の分類は hopeless（wild 表現型）
- 対応策：特定の加群に着目して分類を行う

brick と semibrick

以下, $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする

定義

1. $\mathcal{A}$ の対象 $X \neq 0$ が brick であるとは, 任意の射 $X \to X$ が 0 または同型であること（$\Leftrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ が斜体）
2. $\mathcal{A}$ の brick の集合 $\mathcal{S}$ が semibrick であるとは, $\mathcal{S}$ の異なる元の間の射は 0 に限ること

Schur の補題

1. $\mathcal{A}$ の単純対象は, brick である
2. $\mathcal{A}$ の非同型な単純対象からなる集合は, semibrick である

単純 $\Longrightarrow$brick$\Longrightarrow$ 直既約だが, 逆は不成立

定義

$\mathcal{A}$ の充満部分圏 $\mathcal{B}$ が核, 余核, 拡大で閉じるとき, wide 部分圏と呼ぶ

- アーベル圏 $\mathcal{A}$ の wide 部分圏 $\mathcal{B}$ もまた, アーベル圏
- $\operatorname{sim}\mathcal{B}$：$\mathcal{B}$ の単純対象の同型類の全体

Ringel の補題

$\mathcal{A}$ の任意の semibrick $\mathcal{S}$ に対し, $\mathcal{A}$ の wide 部分圏 $\mathcal{B}$ が存在し, $\mathcal{S} = \operatorname{sim}\mathcal{B}$ が成立する. この $\mathcal{B}$ は, 以下で与えられる

$$\mathcal{B} = \operatorname{Filt}\mathcal{S} := \{X \in \mathcal{A} \mid \exists X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_n = 0 \text{ s.t. } X_i/X_{i+1} \in \mathcal{S}\}$$

- $\operatorname{sbrick}\mathcal{A}$：$\mathcal{A}$ の semibrick の同型類の全体
- $\operatorname{wide}\mathcal{A}$：$\mathcal{A}$ の wide 部分圏の全体
- 環 A に対し $\operatorname{sbrick} A := \operatorname{sbrick}(\operatorname{mod} A)$, $\operatorname{wide} A := \operatorname{wide}(\operatorname{mod} A)$

以上をまとめて次を得る

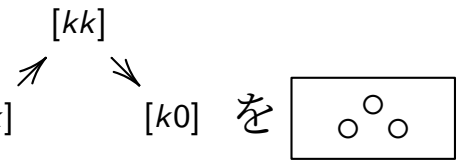
命題

アーベル圏 $\mathcal{A}$ の任意の対象の長さが有限なら, 以下は全単射：

$$\operatorname{sim} : \operatorname{wide}\mathcal{A} \simeq \operatorname{sbrick}\mathcal{A} : \operatorname{Filt}$$

- Dynkin 型の箙 Q の道代数 kQ 上の加群に対し, brick$\Longleftrightarrow$ 直既約

Q	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
$\#$ sbrick kQ	$\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$	$\frac{3n-2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$	833	4160	25080

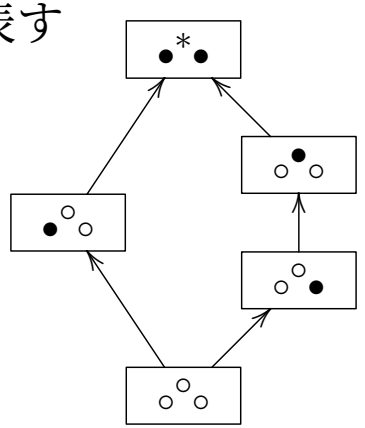
- A_2 型の Auslander-Reiten 箙 

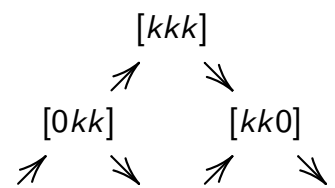
を と表す

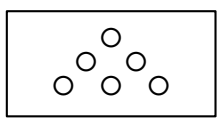
  sbrick $A \simeq$ wide A は右の 5 個

  semibrick の元を $\bullet$ で表し,

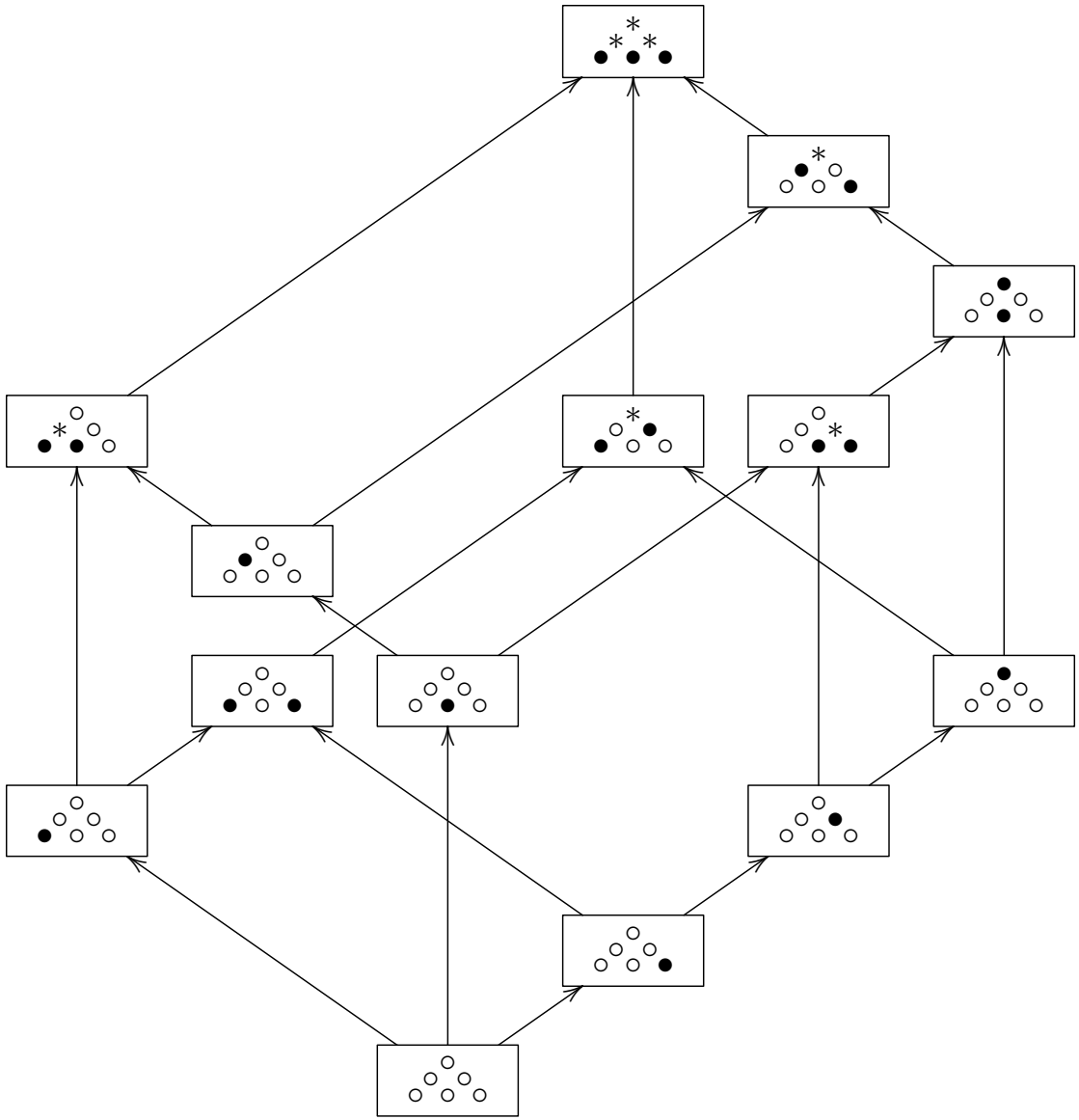
  それ以外の wide 部分圏の直既約対象を $*$ で表す



- A_3 型の Auslander-Reiten 箙 

を  と表す

  sbrick $A \simeq$ wide A は下の 14 個



• Kronecker 箙 [1 $\leftleftarrows$ 2] の無限体上の道代数は, 無限個位数の semibrick を持つ. 導来圏同値を介して, $\mathbb{P}^1$ の摩天楼層に対応する

導来圏と傾理論

以下, $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする

- $\mathcal{A}$ 上の複体 : $X = \left[\cdots \xrightarrow{d_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} \cdots \right]$

  s.t. $\forall i \in \mathbb{Z},\ X^i \in \mathcal{A},\ d_X^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, X^{i+1}),\ d_X^{i+1} \circ d_X^i = 0$

定義 (Grothendieck, Verdier)

導来圏 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ を以下で定める

1. 対象 : $\mathcal{A}$ 上の複体

- 鎖準同型 :
$$\begin{array}{ccccccccccc} X : & \cdots & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \xrightarrow{d_X^1} & \cdots \\ & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} & & \downarrow{\scriptstyle f^1} & \\ Y : & \cdots & \xrightarrow{d_Y^{-2}} & Y^{-1} & \xrightarrow{d_Y^{-1}} & Y^0 & \xrightarrow{d_Y^0} & Y^1 & \xrightarrow{d_Y^1} & \cdots . \end{array}$$

  s.t. $\forall i \in \mathbb{Z},\ f^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^i),\ f^{i+1} \circ d_X^i = d_Y^i \circ f^i$

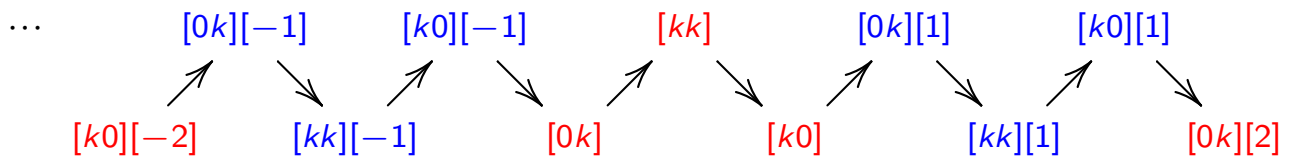
- $f : X \to Y$ が擬同型 $\iff \forall i \in \mathbb{Z}, H^i(f) : H^i(X) \to H^i(Y)$ が同型

2. 射 : 鎖準同型に, 擬同型の逆射を加えたもの

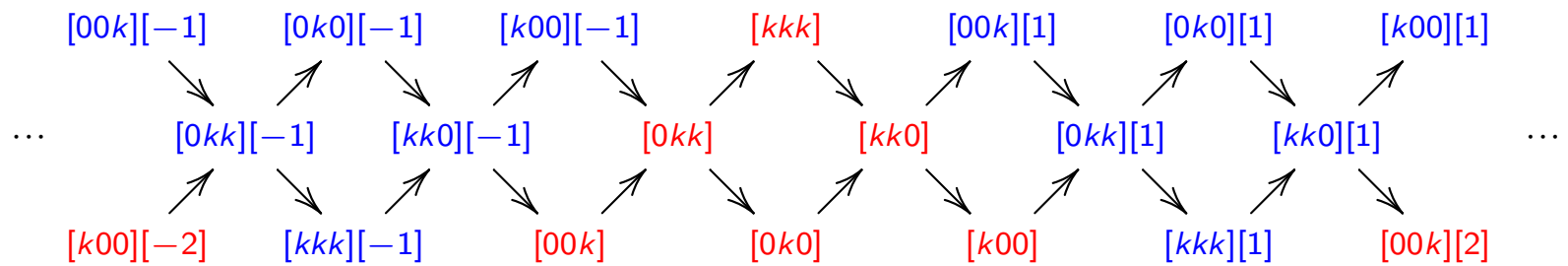
- 複体 $X = (X^i, d_X^i)$ が有界 $\Longleftrightarrow$ 有限個の $i \in \mathbb{Z}$ を除いて $X^i = 0$
- $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) := \{X \in \mathrm{D}(\mathcal{A}) \mid X \text{ は有界複体 }\}$

Dynkin 型の箙 Q に対し, $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, kQ)$ の構造は十分に良く分かる (Happel)

- $\mathrm{mod}\, kQ$ の Auslander-Reiten 箙をシフトしたものを貼り合わせて, $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, kQ)$ の Auslander-Reiten 箙が得られる
- A_2 型の箙 Q に対し, $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, kQ)$ の Auslander-Reiten 箙は



- A_3 型の箙 Q に対し, $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, kQ)$ の Auslander-Reiten 箙は



傾複体

- $i \in \mathbb{Z}$ に対し, 複体を i 個左にずらすシフト関手 $[i] : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \simeq \mathsf{D}(\mathcal{A})$
- $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$：$\operatorname{proj} A$ 上の有界複体のホモトピー圏

これは $\mathsf{D}(A) := \mathsf{D}(\operatorname{Mod} A)$ の充満部分圏と見なされる

定義（Brenner-Butler, 宮下, Rickard）

$T \in \mathsf{D}(A)$ が以下を満たすとき, 傾複体 (tilting complex) と呼ぶ

1. $T \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ かつ, $\forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(A)}(T, T[i]) = 0$
2. T は $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ を生成する

- $A = [\cdots \to 0 \to A \to 0 \to \cdots]$ や, そのシフト $A[i]$ は傾複体
- 箙の道代数に対する鏡映関手は, 特定の傾加群で与えられる

次は, 森田の定理の導来圏版

Rickard の定理

環 A, B に対し, 以下は同値

1. 三角圏の同値 $\mathsf{D}(A) \simeq \mathsf{D}(B)$ が存在
2. A の傾複体 T で, $\operatorname{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)$ が B と環同型であるものが存在

準傾複体

定義 (Keller-Vossieck, 相原-I)

$T \in \mathrm{D}(A)$ が以下を満たすとき, 前準傾複体 (presilting complex)

1. $T \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ であり, $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\operatorname{Hom}_{\mathrm{D}(A)}(T, T[i]) = 0$

さらに以下を満たすとき, 準傾複体 (silting complex) と呼ぶ

2. T は $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ を生成する

注意

準傾複体は, dg 代数 A の導来圏 $\mathrm{D}(A)$ でも同様に定義される

A が準傾複体 $\Longleftrightarrow$ A は connective（つまり $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $H^i(A) = 0$）

- 以下, A は体 k 上の有限次元代数とする

命題（Krull-Schmidt の定理の特別な場合）

任意の $X \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ は, 直既約複体の直和 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ として一意的に表される

- このとき, X が基本的 $\Longleftrightarrow$ $X_1, \ldots, X_m$ は互いに非同型
- $\operatorname{silt} A$：基本的な準傾複体の同型類全体

準傾複体の基本性質１：基底変換

定義

$\operatorname{proj} A$ の直既約対象の同型類の全体を $P_1, \ldots, P_n$ とする

1. A のランクを n と定める
2. $\operatorname{proj} A$ の Grothendieck 群 とは

$$K_0(\operatorname{proj} A) := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[P_i] \text{（自由アーベル群）}$$

三角圏 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ の Grothendieck 群を，$K_0(\operatorname{proj} A)$ と同一視する

命題（相原-I）

任意の $T \in \operatorname{silt} A$ を $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$（各 T_i は直既約）と表すとき，
$[T_1], \ldots, [T_m]$ は $K_0(\operatorname{proj} A)$ の基底．特に $m = n$

傾理論 (tilting theory) の名称の由来

傾複体／準傾複体を選ぶ $\Longrightarrow$Grothendieck 群の基底変換 $\Longrightarrow$ 座標軸が傾く

命題（相原-I）

silt A は以下で定まる半順序を持つ

$$T \geq U \iff \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(A)}(T, U[i]) = 0$$

定義

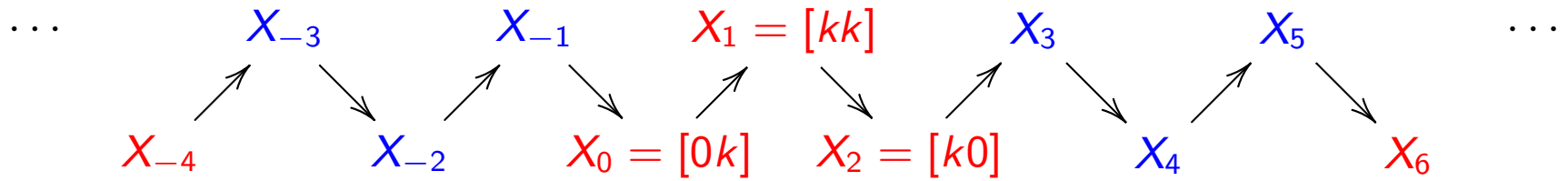
半順序集合 $(P, \geq)$ のハッセ図を, 以下で定める

1. 点は, P の元
2. 矢 $x \leftarrow y$ を描く $\iff x > y$ かつ, $\nexists z \in P$ s.t. $x > z > y$

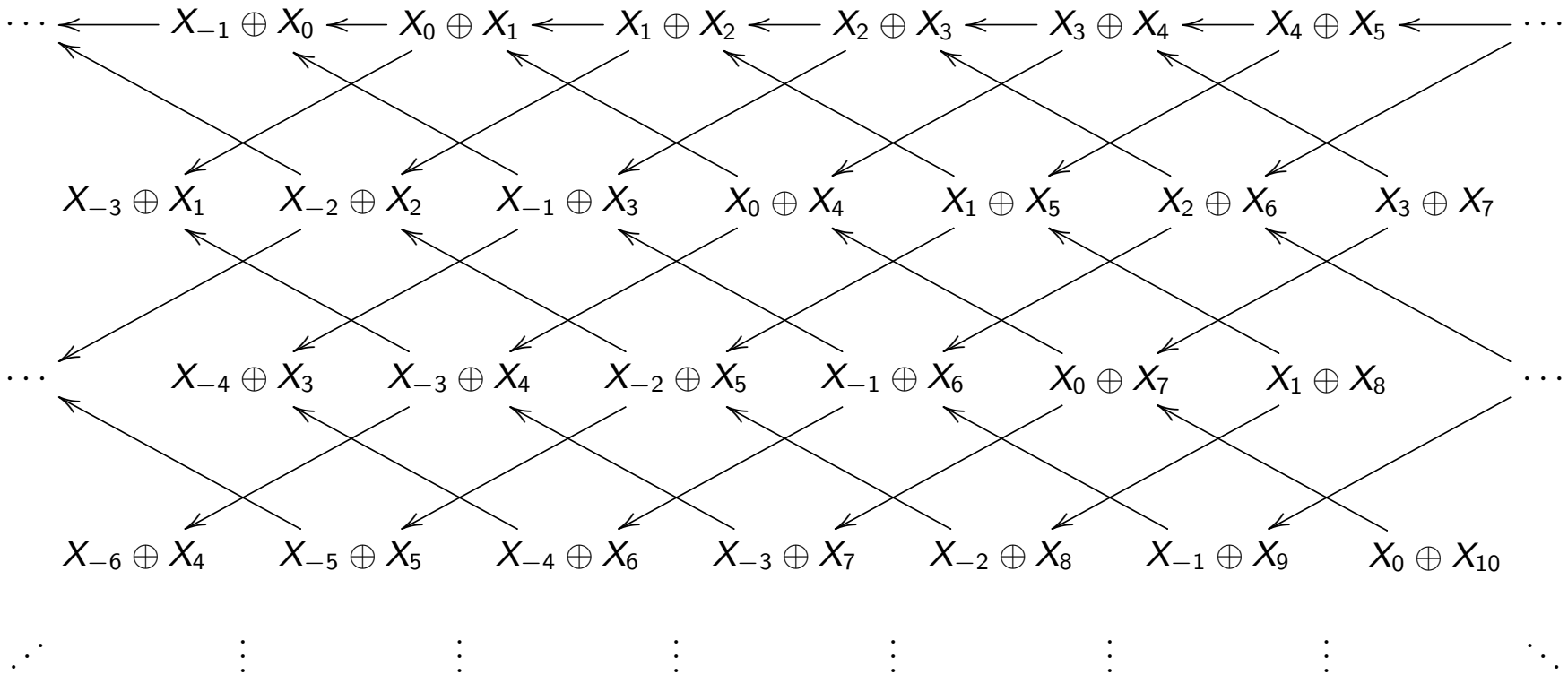
- A のランクが 1 なら, $\mathrm{silt}\, A = \{A[i] \mid i \in \mathbb{Z}\}$

  ハッセ図は $\cdots \longleftarrow A[-1] \longleftarrow A \longleftarrow A[1] \longleftarrow A[2] \longleftarrow \cdots$

- A_2 型の箙 Q に対し, $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, kQ)$ の直既約複体を以下で表す



silt kQ のハッセ図は

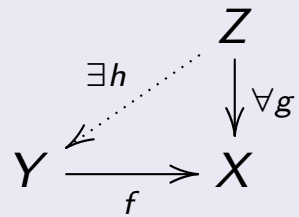


変異：与えられた準傾対象の直和因子を取り替えて, 新しい準傾対象を得る操作

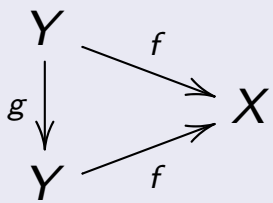
定義

$\mathcal{A}$ を加法圏, $\mathcal{B}$ をその充満部分圏とする

1. 射 $f : Y \to X$ が $X \in \mathcal{A}$ の右 $\mathcal{B}$-近似であるとは, $Y \in \mathcal{B}$ かつ, $\forall Z \in \mathcal{B}, \forall g : Z \to X, \exists h : Z \to Y$ s.t. $g = f \circ h$



2. 射 $f : Y \to X$ が右極小であるとは, $f \circ g = f$ を満たす射 $g : Y \to Y$ は同型射に限ること



3. 双対的に左 $\mathcal{B}$-近似と左極小を定義する

- $X \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ から充満部分圏を定める

$$\operatorname{add} X := \{X^{\oplus \ell} \text{ の直和因子 } (\ell \in \mathbb{N})\} \subset \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$$

- 鎖準同型 $f : Y \to X$ の写像錐を $\operatorname{cone} f \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ と表す

定理（相原-I）

任意の $T \in \operatorname{silt} A$ を $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$（各 T_i は直既約）と表す
各 $1 \leq i \leq n$ に対し, 以下が成立

1. 右極小な右 $\operatorname{add}(T/T_i)$-近似 $f_i : Y_i \to T_i$ が存在し,

$$\mu_i^+(T) := (T/T_i) \oplus (\operatorname{cone} f_i)[-1] \in \operatorname{silt} A$$

2. 左極小な左 $\operatorname{add}(T/T_i)$-近似 $g_i : T_i \to Z_i$ が存在し,

$$\mu_i^-(T) := (T/T_i) \oplus (\operatorname{cone} g_i) \in \operatorname{silt} A$$

$\mu_i^+(T)$, $\mu_i^-(T)$ を T の変異と呼ぶ

3. $\mu_i^- \circ \mu_i^+(T) = T = \mu_i^+ \circ \mu_i^-(T)$
4. $\operatorname{silt} A$ のハッセ図は, 以下の矢を持つ

$$\mu_i^+(T) \leftarrow T \leftarrow \mu_i^-(T) \quad (1 \leq i \leq n)$$

5. $\operatorname{silt} A$ のハッセ図で, T を端点とする矢は, これら $2n$ 本に限る

２項準傾複体

2 項準傾複体

以下, A を体 k 上の有限次元代数とする.

- 2 項複体の成す $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ の充満部分圏を考える：

$$\mathsf{K}^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A) := \left\{ X = [\cdots \to 0 \to X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \to 0 \to \cdots] \right\}$$

- 0 次コホモロジーをとることで, 忠実充満関手を得る

$$H^0 : \mathsf{K}^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A) \simeq \operatorname{mod} A$$

- $\mathsf{K}^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A)$ に属する（前）準傾複体を 2 項（前）準傾複体と呼ぶ

$$\text{2-silt } A := \operatorname{silt} A \cap \mathsf{K}^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A) = \{ T \in \operatorname{silt} A \mid A \geq T \geq A[1] \}$$

定理（足立-I-Reiten, Demonet-I-Jasso, Derksen-Fei）

1. 2 項前準傾複体 T の同型類は, $[T] \in K_0(\operatorname{proj} A)$ によって決定される
2. 任意の 2 項前準傾複体は, ある 2 項準傾複体の直和因子である

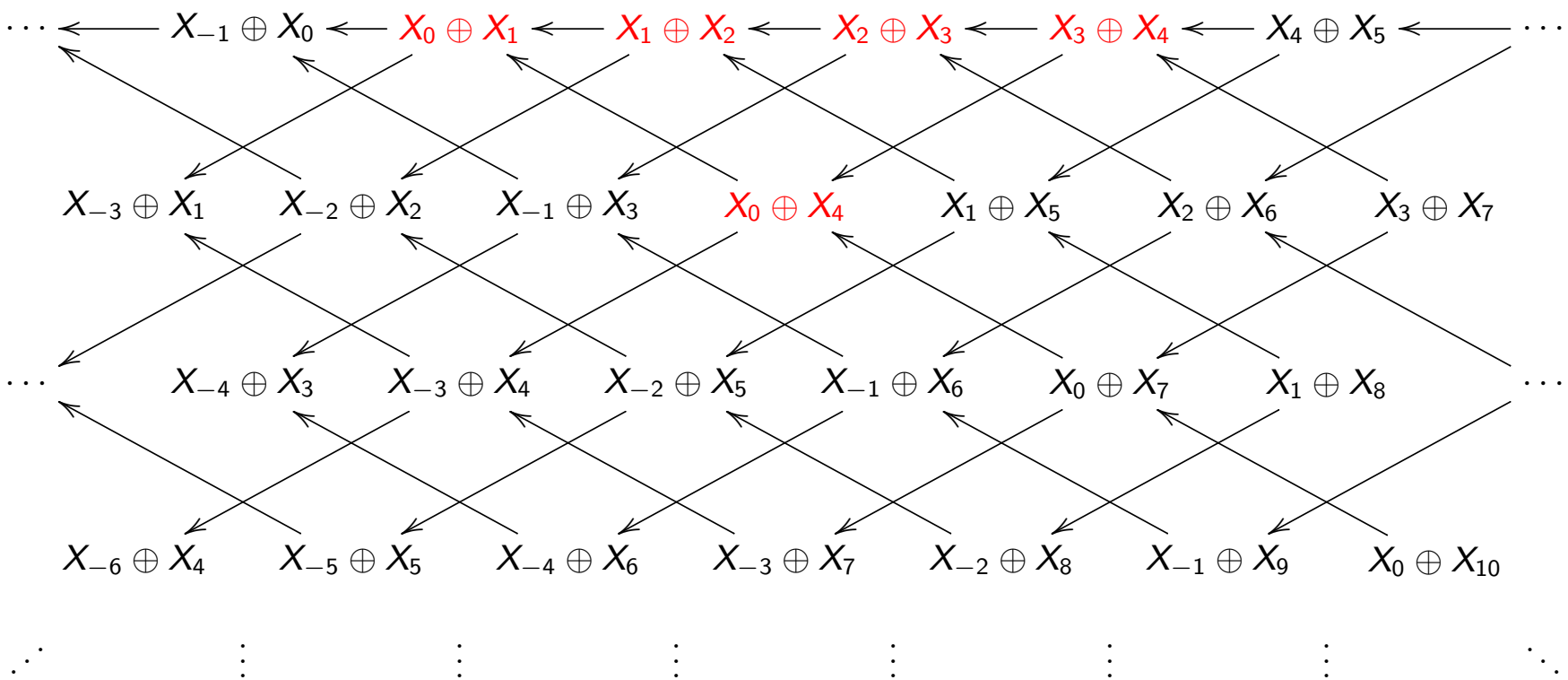
任意の $T \in \text{2-silt } A$ を $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$（各 T_i は直既約）と表す

3. 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\mu_i^+(T)$ と $\mu_i^-(T)$ のうち, ただ 1 つが 2-silt A に属する
4. 2-silt A のハッセ図は, T を端点とする矢を丁度 n 本持つ

- A のランクが 1 なら, 2-silt A は赤

$$\cdots \longleftarrow A[-1] \longleftarrow A \longleftarrow A[1] \longleftarrow A[2] \longleftarrow \cdots$$

- A_2 型の箙 Q に対し, 2-silt kQ は赤



準傾対応

定義

$\mathcal{A}$ をアーベル圏, $\mathcal{B}$ をその充満部分圏とする

1. $\mathcal{B}$ が商対象と拡大で閉じるとき, ねじれ類 (torsion class) と呼ぶ
2. $\mathcal{B}$ が部分対象と拡大で閉じるとき, ねじれ自由類 (torsionfree clsss) と呼ぶ
3. $\mathcal{A}$ の任意の対象が右 $\mathcal{B}$-近似を持つとき, $\mathcal{B}$ を反変有限と呼ぶ
4. $\mathcal{A}$ の任意の対象が左 $\mathcal{B}$-近似を持つとき, $\mathcal{B}$ を共変有限と呼ぶ

mod A のねじれ類は常に反変有限, ねじれ自由類は常に共変有限

定理（足立-I-Reiten）

以下の対象の間に標準的な全単射が存在する

1. 2-silt A
2. mod A の共変有限なねじれ類

$$T \mapsto \{H^0(T)^{\oplus \ell} \text{ の商加群 } (\ell \in \mathbb{N})\}.$$

3. mod A の反変有限なねじれ自由類

$$T \mapsto H^0(T)^{\perp}.$$

- $\operatorname{mod} A$ の対象の集合 $\mathcal{S}$ に対し, $\mathcal{S}$ を含む最小のねじれ類を $\mathsf{T}(\mathcal{S})$ と表す
  $\mathsf{T}(\mathcal{S})$ が共変有限なときに, $\mathcal{S}$ を左有限と呼ぶ
- $X \in \operatorname{mod} A$ に対し, $\operatorname{ind} X := \{X$ の直既約直和因子の同型類 $\}$

定理の続き（淺井, Ingalls-Thomas, Marks-Stovicek）

4. A の左有限な semibrick

$$T \mapsto \mathcal{S}_T := \operatorname{ind}(H^0(T)/\operatorname{rad}_{\operatorname{End}_{\mathsf{D}(A)}(T)} H^0(T))$$

5. $\operatorname{mod} A$ の左有限な wide 部分圏 $\mathcal{B}$

$$T \mapsto \operatorname{Filt} \mathcal{S}_T$$

S. Asai, *Semibricks*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, Issue 16, 4993–5054.

他の対応物（. . ., Brüstle-Yang, König-Yang）

6. 台 τ 傾加群 (support τ-tilting module)（$\Longleftrightarrow$ $T \in 2\text{-silt}\, A$ の $H^0(T)$）
7. 右有限な semibrick, 右有限な wide 部分圏
8. 中間的な co-t-structure, t-structure, simple-minded collection
9. （特定の状況で）団傾対象 (cluster tilting object)

g 有限性＝有限表現型の傾理論類似

- tors A：mod A のねじれ類の全体
- 以下の単射を得る

$$\text{2-silt } A \hookrightarrow \text{sbrick } A \xrightarrow[\sim]{\text{Filt}} \text{wide } A \overset{\text{T}}{\hookrightarrow} \text{tors } A \tag{1}$$

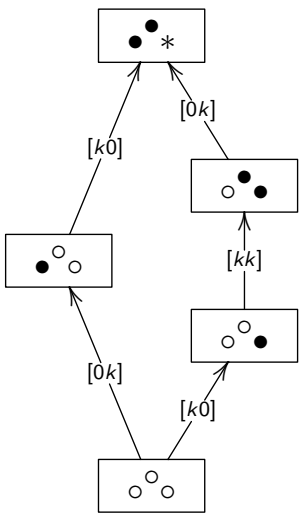
定理 (Demonet-I-Jasso)

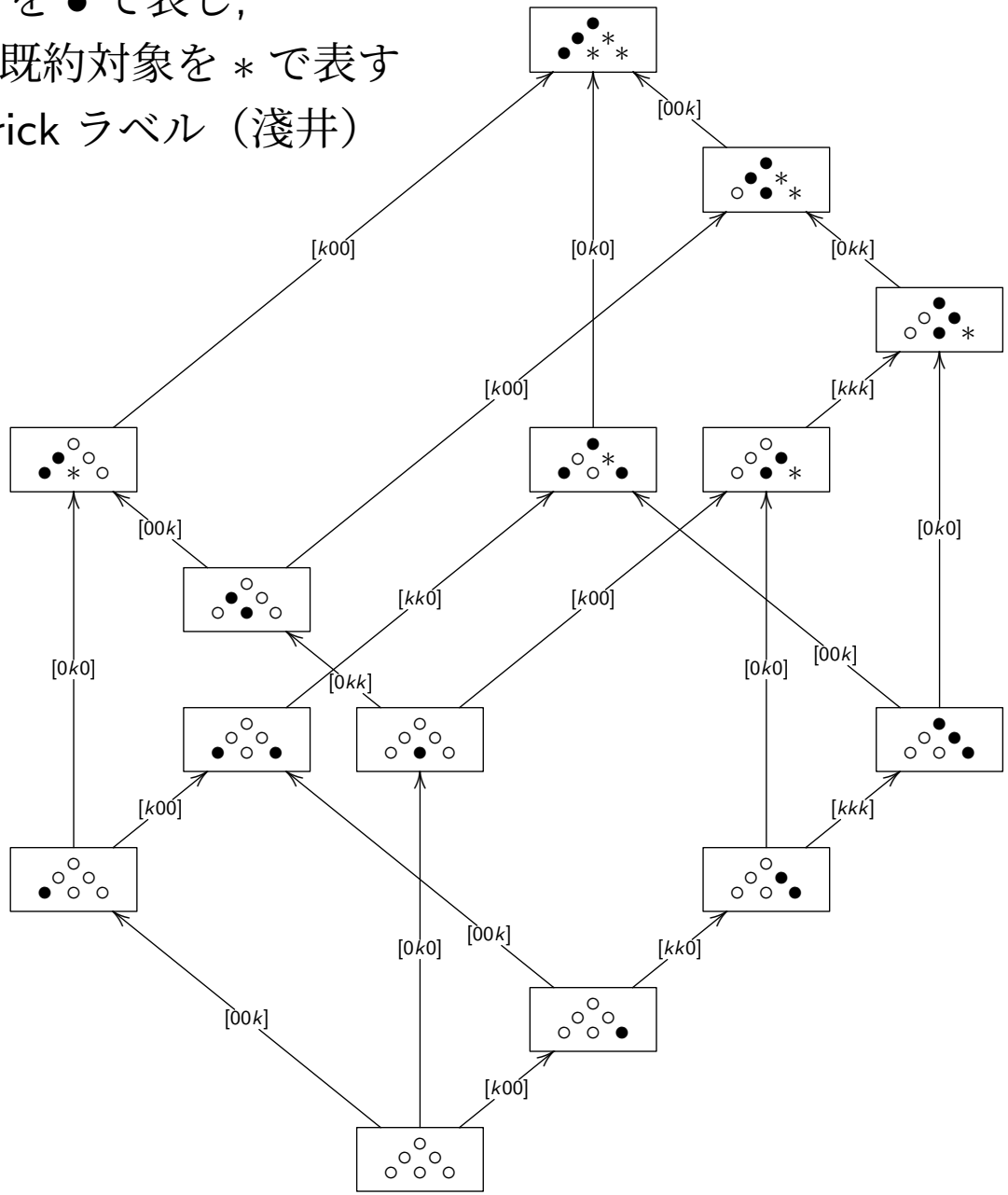
(1) のいずれか 1 つの集合が有限集合ならば, (1) は全て全単射となる
特に (1) は全て, 有限集合となる

このとき A を g 有限と呼ぶ

- 有限表現型 $\Longrightarrow$g 有限, またランク 1 $\Longrightarrow$g 有限
- Dynkin 型の箙 Q の前射影代数 Π は g 有限（水野, Buan-I-Reiten-Scott）
  Q の Weyl 群 W に対し, 以下の半順序集合の同型が存在
  $$(W, \text{弱順序}) \simeq \text{2-silt } \Pi$$
- Dynkin 型の箙 Q の道代数 kQ も g 有限
  2-silt kQ と Q の団代数の団が一対一に対応する（団代数の圏化）
  2-silt kQ は, W から定まる Cambrian 束と同型

$H^0(T)$ の直既約直和因子を $\bullet$ で表し，
それ以外のねじれ類の直既約対象を $*$ で表す
各矢は準傾対応による brick ラベル（淺井）





g 扇

g 扇 (g-fan)

A：体 k 上の有限次元代数

- $P_1, \dots, P_n$：$\operatorname{proj} A$ の直既約対象の同型類の全体
- $K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}} := K_0(\operatorname{proj} A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}[P_i]$：実 Grothendieck 群

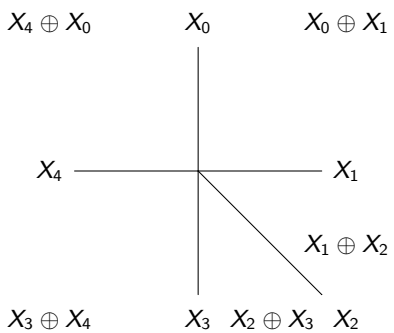
定義（青木-東谷-I-加瀬-水野）

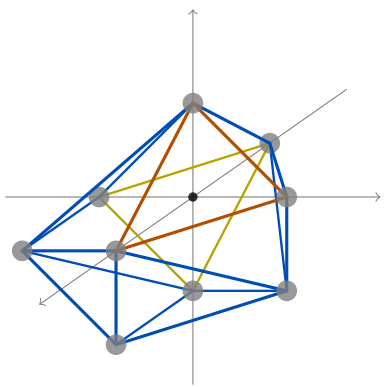
A の 2 項前準傾複体 T を直既約複体の直和 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ として表す

$$C(T) := \operatorname{cone}\{[T_1], \dots, [T_m]\} \subset K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$$

$$\Sigma(A) := \{C(T) \mid T \text{ は } A \text{ の 2 項前準傾複体 }\}: A \text{ の g 扇 (g-fan)}$$

- A_2 型と A_3 型の箙 Q に対し，$\Sigma(kQ)$ は以下





- サイクルを持たない箙 Q に対し，$\Sigma(kQ)$ は団代数の g ベクトルから定まる扇
- Dynkin 型の箙 Q の前射影代数 Π に対し，$\Sigma(\Pi)$ は Coxeter 扇
- 一般の箙でも $\Sigma(\Pi)$ は Coxeter 扇を含む
  cDV 特異点の非可換クレパント特異点解消に応用 (I-Wemyss)

系（青木-東谷-I-加瀬-水野）

A のランクを n とすると, $\Sigma(A)$ は以下を満たす

1. 非特異な扇である
2. 任意の錐は, ある n 次元の錐の面である
3. 任意の $(n-1)$ 次元の錐は, 丁度 2 つの n 次元の錐の面である
4. 正錐 $C(A) = \mathrm{cone}\{[P_1], \ldots, [P_n]\}$ と負錐 $-C(A)$ は, $\Sigma(A)$ に属する
5. 任意の錐は, 基底 $[P_1], \ldots, [P_n]$ に関する 2^n 個の象限のいずれかに含まれる

以上の性質を満たす扇を符号同一と呼ぶ

定理（Demonet-I-Jasso, 淺井, 青木-東谷-I-加瀬-水野, Fei）

1. $\Sigma(A)$ は, 2-silt A のハッセ図を決定する
2. A が g 有限 $\iff$ $\Sigma(A)$ が有限 $\iff$ $\Sigma(A)$ が完備

A が g 有限であると仮定し, その h ベクトルを $(h_0, \ldots, h_n)$ とする

3. $\Sigma(A)$ はある格子多面体の normal fan となる
4. $h_i = \#\{\mathcal{S} \in \mathrm{sbrick}\, A \mid \#\mathcal{S} = i\}$
   $= \#\{T \in \text{2-silt}\, A \mid T$ はハッセ図の丁度 i 本の矢の終点となる $\}$
5. $h_i = h_{n-i}$（Dehn-Sommerville 等式）
6. $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, $h_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \cdots \geq h_{n-1} \geq h_n$（単峰性）

問題

g 扇として実現される有限扇を特徴付けよ.

ランク 2 では, 符号同一性が必要十分条件を与える

定理（青木-東谷-I-加瀬-水野）

$\mathbb{R}^2$ 内の任意の符号同一な有限扇 Σ に対し, k 上の有限次元代数 A が存在して, $\Sigma(A) = \Sigma$ が成立

ランク 3 以上では, 上の問題は難しいため, 次の特別なクラスに着目する

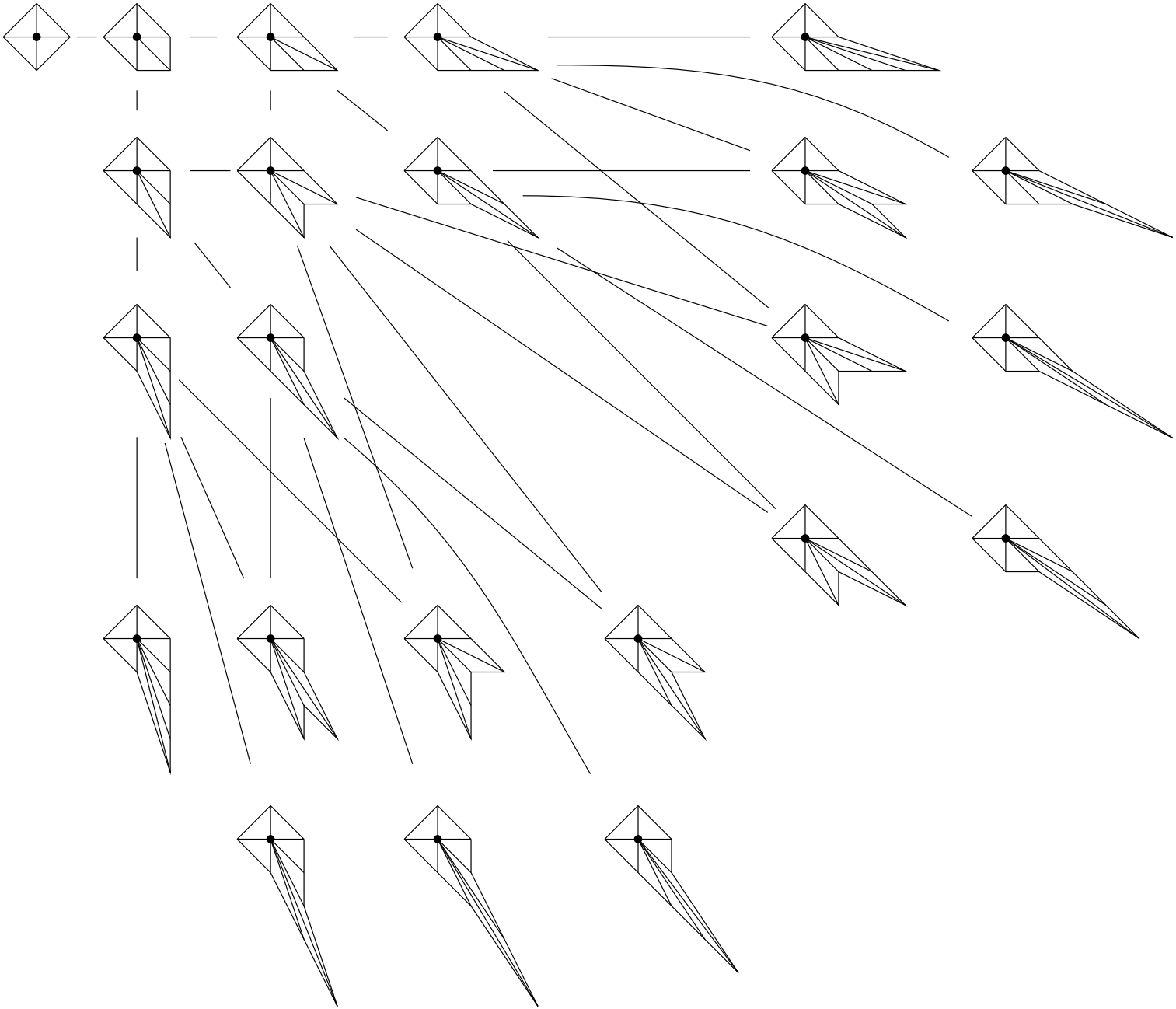
定義

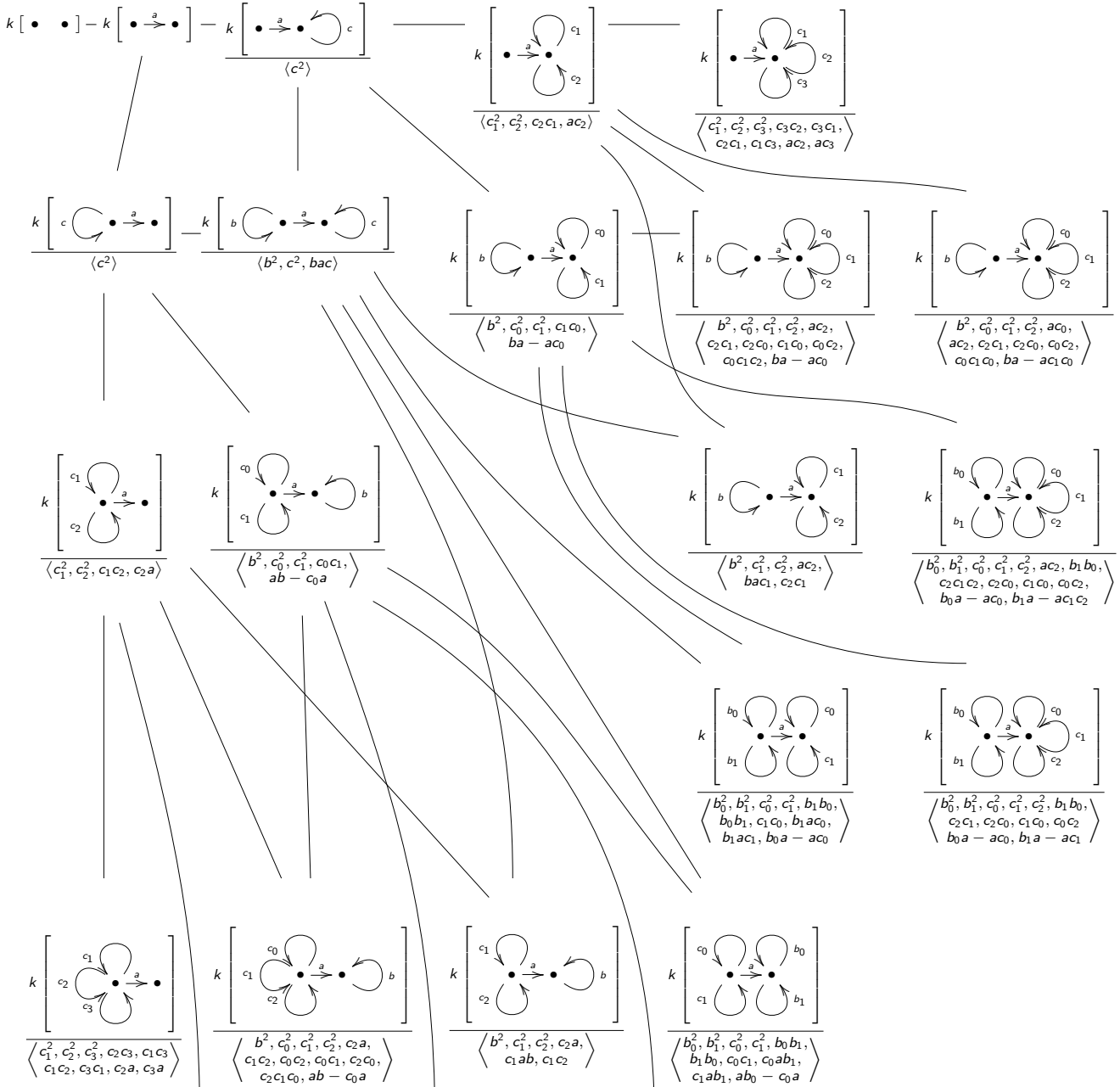
$T \in 2\text{-silt}\, A$ を直既約複体の直和 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ として表し,

$$C_{\leq 1}(T) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i [T_i] \mid a_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1 \right\} \subset K_0(\mathrm{proj}\, A)_{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{P}(A) := \bigcup_{T \in 2\text{-silt}\, A} C_{\leq 1}(T)$$

$\mathrm{P}(A)$ が凸ならば, $\mathrm{P}(A)$ を g 多面体と呼び, A と $\Sigma(A)$ を g 凸と呼ぶ




$k[\bullet \quad \bullet] - k\left[\bullet \xrightarrow{a} \bullet\right]$
$k\left[\bullet \xrightarrow{a} \bullet \circlearrowright c\right]$ / $\langle c^2\rangle$
$k\left[\bullet \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right]$ / $\langle c_1^2, c_2^2, c_2c_1, ac_2\rangle$
$k\left[\bullet \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_3c_2, c_3c_1, c_2c_1, c_1c_3, ac_2, ac_3\right\rangle$
$k\left[c \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{a} \bullet\right]$ / $\langle c^2\rangle$
$k\left[b \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{a} \bullet \circlearrowright c\right]$ / $\langle b^2, c^2, bac\rangle$
$k\left[b \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b^2, c_0^2, c_1^2, c_1c_0, ba - ac_0\right\rangle$
$k\left[b \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b^2, c_0^2, c_1^2, c_2^2, ac_2, c_2c_1, c_2c_0, c_1c_0, c_0c_2, c_0c_1c_2, ba - ac_0\right\rangle$
$k\left[b \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b^2, c_0^2, c_1^2, c_2^2, ac_0, ac_2, c_2c_1, c_2c_0, c_0c_2, c_0c_1c_0, ba - ac_1c_0\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet\right]$ / $\langle c_1^2, c_2^2, c_1c_2, c_2a\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \circlearrowright b\right]$ / $\left\langle b^2, c_0^2, c_1^2, c_0c_1, ab - c_0a\right\rangle$
$k\left[b \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b^2, c_1^2, c_2^2, ac_2, bac_1, c_2c_1\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} b_0 \\ b_1 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b_0^2, b_1^2, c_0^2, c_1^2, c_2^2, ac_2, b_1b_0, c_2c_1c_2, c_2c_0, c_1c_0, c_0c_2, b_0a - ac_0, b_1a - ac_1c_2\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} b_0 \\ b_1 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b_0^2, b_1^2, c_0^2, c_1^2, b_1b_0, b_0b_1, c_1c_0, b_1ac_0, b_1ac_1, b_0a - ac_0\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} b_0 \\ b_1 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b_0^2, b_1^2, c_0^2, c_1^2, c_2^2, b_1b_0, c_2c_1, c_2c_0, c_1c_0, c_0c_2, b_0a - ac_0, b_1a - ac_1\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet\right]$ / $\left\langle c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_2c_3, c_1c_3, c_1c_2, c_3c_1, c_2a, c_3a\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \circlearrowright b\right]$ / $\left\langle b^2, c_0^2, c_1^2, c_2^2, c_2a, c_1c_2, c_0c_2, c_0c_1, c_2c_0, c_2c_1c_0, ab - c_0a\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \circlearrowright b\right]$ / $\left\langle b^2, c_1^2, c_2^2, c_2a, c_1ab, c_1c_2\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} b_0 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right]$ / $\left\langle b_0^2, b_1^2, c_0^2, c_1^2, b_0b_1, b_1b_0, c_0c_1, c_0ab_1, c_1ab_1, ab_0 - c_0a\right\rangle$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \circlearrowright b\right]$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} b_0 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right]$
$k\left[\begin{smallmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \bullet \begin{smallmatrix} b_0 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right]$

命題（青木-東谷-I-加瀬-水野）

A が g 凸ならば, $\mathrm{P}(A)$ は反射多面体である. 特に, ランク n の g 凸な g 扇は, 有限個しか存在しない

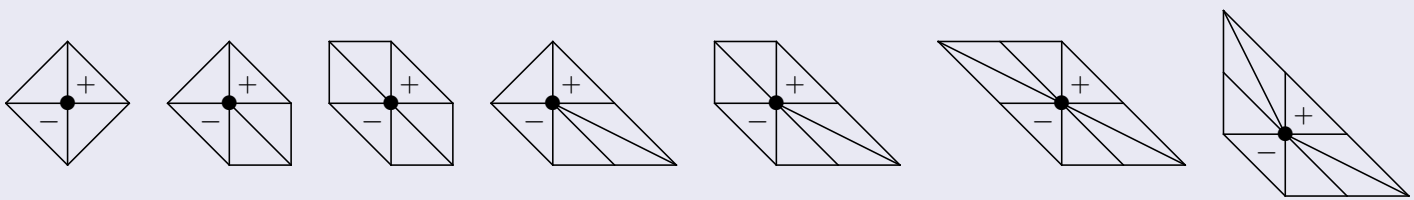
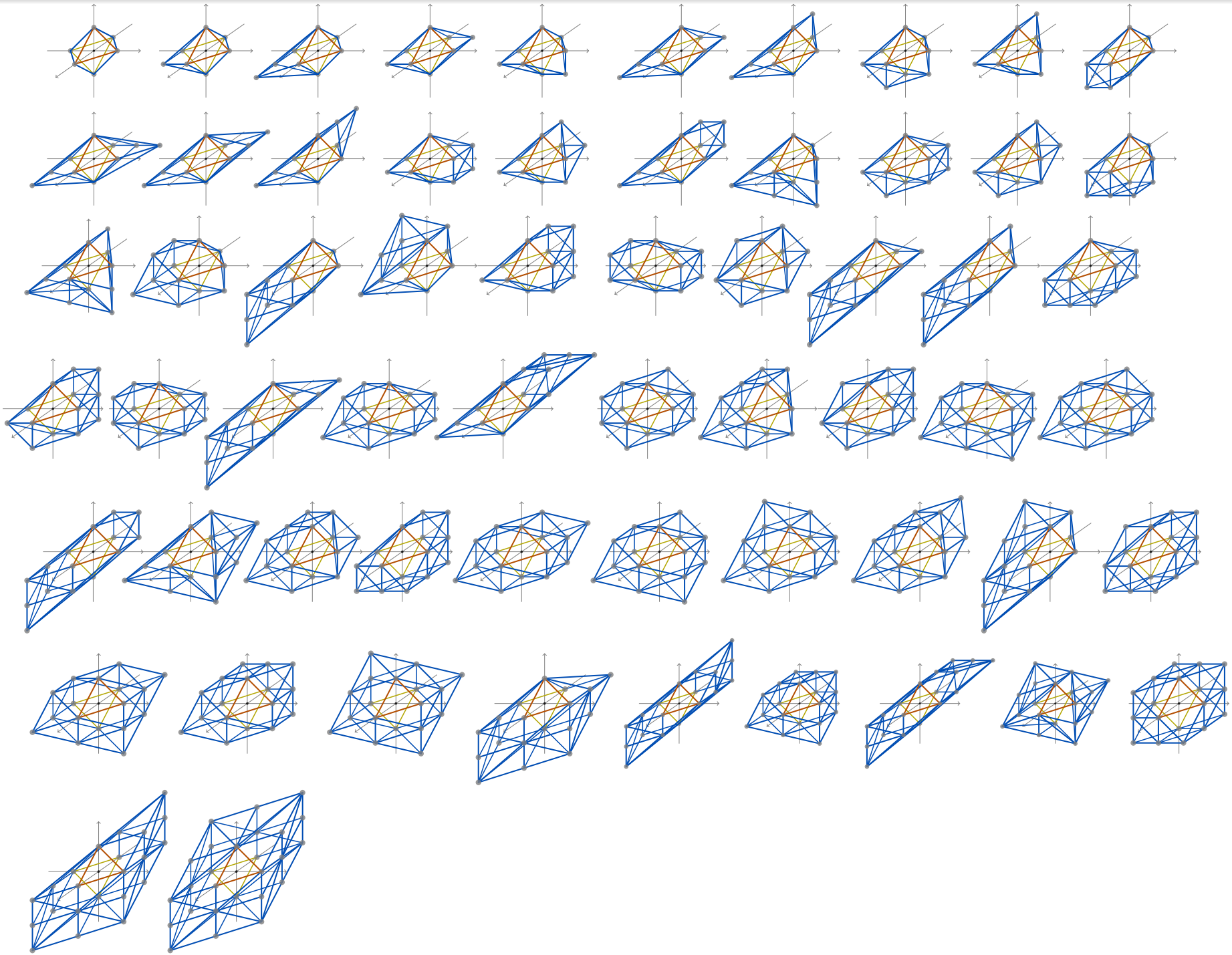
問題

g 多面体として実現される反射多面体を特徴付けよ

ランクが 2 と 3 の場合は, 以下の解答が与えられている

定理（青木-東谷-I-加瀬-水野）

1. ランク 2 の g 多面体は, 同型を除いて以下の 7 種類である



2. ランク 3 の g 多面体は, 同型を除いて以下の 61 種類である