関数解析学 講義スライド

担当教員：伊藤健一

2024年2月2日版

この講義ノートについて

内容： 関数解析学の入門的話題

参考書： 増田久弥「関数解析」（裳華房）
黒田成俊「関数解析」（共立出版）
藤田宏，黒田成俊，伊藤清三「関数解析」（岩波書店）
Kosaku Yosida，“Functional Analysis”（Springer）

謝辞： 数多くの誤りを指摘してくださった石田敦英先生（東京理科大学），田川智也氏（東京大学）に深く感謝申し上げます．

第1章 Banach空間

§ 1.1 ノルム空間

本講義では以下，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

定義. X を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．写像 $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ が X 上の**ノルム**であるとは，以下を満たすことである．

1. 任意の $x \in X$ に対し $\|x\| \geq 0$ が成り立つ；
2. $\|x\| = 0$ と $x = 0$ は同値である；
3. 任意の $c \in \mathbb{K}$，$x \in X$ に対し $\|cx\| = |c|\|x\|$ が成り立つ；
4. 任意の $x, y \in X$ に対し $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$（**三角不等式**）が成り立つ．

このとき，組 $(X, \|\cdot\|)$，あるいは単に X，をノルム空間と呼ぶ．

問. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．任意の $x, y \in X$ に対し

$$\bigl|\|x\| - \|y\|\bigr| \leq \|x - y\|$$

が成り立つことを示せ.

例（数ベクトル空間）. $n \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{K}^n$ は**（複素）Euclid ノルム**

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

に関してノルム空間となる．証明は省略する．ノルムとは，このようなベクトルの "長さ" が持つ性質を抽出して，一般化したものに他ならない.

例. $\mathbb{K}^n$ は

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

あるいは

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|,$$

に関してもノルム空間となる．証明は省略する．なお，$\|\cdot\|_2$ は（複素）Euclid ノルムに他ならない.

問. 任意の $x \in \mathbb{K}^n$ に対し，

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

が成り立つことを示せ.

例. $K \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とし，$C(K)$ を K 上の $\mathbb{K}$ 値連続関数全体の集合とする．$C(K)$ 上の**自然な和とスカラー倍**を，任意の $u, v \in C(K)$ および $c \in \mathbb{K}$ に対し

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x), \quad (cu)(x) = cu(x); \quad x \in \mathbb{K},$$

で定めると，$C(K)$ は $\mathbb{K}$ 線形空間となる．また，任意の $u \in C(K)$ に対しその**一様ノルム**を

$$\|u\| = \sup_{x\in K} |u(x)| = \max_{x\in K} |u(x)|$$

で定めると，$C(K)$ はノルム空間となる.

問. $C(K)$ が一様ノルムに関してノルム空間となることを確かめよ.（自然な和とノルムに関して $\mathbb{K}$ 線形空間となることは既知としてもよい.）

○ **自然な距離**

命題 1.1. X をノルム空間とする．任意の $x, y \in X$ に対し

$$\mathrm{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

と定めると，dist は X 上の**距離**である（**自然な距離**と呼ぶ）．すなわち，

1. 任意の $x, y \in X$ に対し $\mathrm{dist}(x, y) \geq 0$ が成り立つ；
2. $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ となるための必要十分条件は $x = y$ である；
3. 任意の $x, y \in X$ に対し $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$ が成り立つ；
4. 任意の $x, y, z \in X$ に対し $\mathrm{dist}(x, z) \leq \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z)$ が成り立つ.

証明. ほぼ明らかなので，証明は省略する. □

○ **自然な位相**

定義. X をノルム空間とする．X 上の**自然な位相**とは，自然な距離から定まる位相のことである．

注意. 以降，ノルム空間は，常にその自然な位相に関して位相空間とみなす．よって，定義によれば，X 上の点列 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するとは

$$\lim_{j\to\infty} \|x - x_j\| = 0$$

が成り立つことである．このとき，これを

$$x = \lim_{j\to\infty} x_j \quad \text{あるいは} \quad x_j \to x \ (j \to \infty)$$

などで表す．

問. $K \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とする．$C(K)$ の任意の関数列に対し，一様ノルムに関する収束と一様収束は同等であることを示せ．

○ **構造の連続性**

命題 1.2. X をノルム空間とする．このとき，以下が成り立つ．

1. 加法 $X \times X \to X$ は連続である．すなわち，$x_j \to x$ かつ $y_j \to y$ ならば，$x_j + y_j \to x + y$ が成り立つ．
2. スカラー倍 $\mathbb{K} \times X \to X$ は連続である．すなわち，$c_j \to c$ かつ $x_j \to x$ ならば，$c_j x_j \to cx$ が成り立つ．
3. ノルム $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ は連続である．すなわち，$x_j \to x$ ならば，$\|x_j\| \to \|x\|$ が成り立つ．

証明. 1. $x_j \to x$ かつ $y_j \to y$ とすると，

$$\left\|(x + y) - (x_j + y_j)\right\| \le \|x - x_j\| + \|y - y_j\| \to 0$$

が成り立つ．よって X 上の加法は連続である．

2. $c_j \to c$ かつ $x_j \to x$ とすると，

$$\left\|cx - c_j x_j\right\| \le |c - c_j|\|x\| + |c_j|\|x - x_j\| \to 0.$$

が成り立つ．よって X 上のスカラー倍は連続である．

3. $x_j \to x$ とすると，

$$\left|\|x\| - \|x_j\|\right| \le \|x - x_j\| \to 0$$

が成り立つ．よって X 上のノルムは連続である． □

問. 命題 1.2 に対し，ϵ-δ 論法を用いた厳密な証明を与えよ．

○ **同値なノルム**

定義. X を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．X 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ が互いに**同値**であるとは，ある $c, C > 0$ が存在して任意の $x \in X$ に対し

$$c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$$

が成り立つことである．

定理 1.3. X を $\mathbb{K}$ 線形空間とし，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ を X 上の互いに同値なノルムとする．このとき，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ から誘導される X 上の位相構造は同一である．

証明. X 上の点列 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ の $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ に関する収束が同値であることを示せばよい．まず，$\|\cdot\|_1$ に関して $x_j \to x$ とすると，

$$\|x - x_j\|_2 \le C\|x - x_j\|_1 \to 0$$

なので，$\|\cdot\|_2$ に関して $x_j \to x$ となる．逆に $\|\cdot\|_2$ に関して $x_j \to x$ とすると，

$$\|x - x_j\|_1 \le c^{-1}\|x - x_j\|_2 \to 0$$

なので，$\|\cdot\|_1$ に関して $x_j \to x$ となる．したがって主張が示された． □

注意. $\mathbb{K}$ 線形空間 X が有限次元ならば，X 上の任意の２つのノルムは互いに同値であることが知られており，ノルム空間としての位相構造は一意的である．一方，X が無限次元の場合には，X 上には無限個の互いに同値ではないノルムが存在し，無限個の位相構造が存在する．証明は省略する．

§ 1.2 Banach空間

定義. ノルム空間 X 上の点列 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が **Cauchy列**であるとは，

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \ge 0 \ \text{ s.t. }\ \forall j,k \ge N\ \|x_j - x_k\| < \epsilon$$

が成り立つことである．

注意. X 上の任意の収束列はCauchy列である．実際，もし $x_j \to x$ ならば，

$$\|x_j - x_k\| \le \|x_j - x\| + \|x - x_k\| \to 0 \quad (j,k \to \infty)$$

が成り立つ．(**問.** ϵ-δ 論法を用いた厳密な証明を与えよ.)

定義. ノルム空間 X が**完備**であるとは，X 上の任意のCauchy列が X のある点に収束することである．完備なノルム空間を**Banach空間**と呼ぶ．

例. $\mathbb{K}^n$ は（複素）Euclidノルムに関してBanach空間である．さらに任意の $p \in [1,\infty]$ に対し $\|\cdot\|_p$ に関してもBanach空間である．証明は省略する．

例. $K \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とする．$C(K)$ は一様ノルムに関してBanach空間となる．

証明. ここでは完備性のみを確かめる．

Step 1. $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を $C(K)$ 上のCauchy列とする．まず極限の候補となる関数 u を構成する．各 $x \in K$ に対し，$j,k \to \infty$ のとき

$$|u_j(x) - u_k(x)| \le \|u_j - u_k\| \to 0$$

であることに注意すると，$(u_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{K}$ 上のCauchy列である．よって，各点極限

$$u(x) := \lim_{j\to\infty} u_j(x)$$

が存在し，これにより関数 $u\colon K \to \mathbb{K}$ を定めることができる．

Step 2. 次に $u \in C(K)$ を示す．まずCauchy列の定義によれば

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists N \ge 0\ \ \text{s.t.}\ \ \forall j,k \ge N\ \ \|u_j - u_k\| < \epsilon$$

が成り立つ．するとノルムの定義により

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists N \ge 0\ \ \text{s.t.}\ \ \forall j,k \ge N\ \ \forall x \in K\ \ |u_j(x) - u_k(x)| < \epsilon.$$

であり，ここで $k \to \infty$ すると

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists N \ge 0\ \ \text{s.t.}\ \ \forall j \ge N\ \ \forall x \in K\ \ |u_j(x) - u(x)| \le \epsilon \qquad (\spadesuit)$$

を得る．これは連続関数列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が u に一様収束することを意味し，よって確かに $u \in C(K)$ である．

Step 3. 最後に $C(K)$ の位相において $u_j \to u$ であることを示す．($\spadesuit$) と一様ノルムの定義より

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists N \ge 0\ \ \text{s.t.}\ \ \forall j \ge N\ \ \|u_j - u\| \le \epsilon$$

である．よって主張は示された． □

例（直積空間）. $(X, \|\cdot\|_X)$ および $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をBanach空間とする．任意の $(x,y), (x',y') \in X \times Y$ と $c \in \mathbb{K}$ に対し

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'), \quad c(x,y) = (cx, cy)$$

と定義すると，$X \times Y$ は $\mathbb{K}$ 線形空間となる．さらに任意の $(x,y) \in X \times Y$ に対し

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

と定義すると，$(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ はBanach空間となる．

問. 上の主張を確かめよ．

§ 1.3 Lebesgue空間

本節では以下，$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．

定義. $p \in [1, \infty)$ とする．Ω 上の L^p **空間**を

$$L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = \Big\{ u \colon \Omega \to \mathbb{K};\ u \text{は可測かつ} \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty \Big\}$$

で定める．また，任意の $u \in L^p(\Omega)$ に対し，その L^p **ノルム**を

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

で定める．ただし $L^p(\Omega)$ において，Ω 上ほとんど至るところ一致する関数はすべて同一視するものとする．

定義. 1. 可測関数 $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ が Ω 上で**本質的に上に有界**であるとは，

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad u \le M \quad \text{a.e. on } \Omega$$

が成り立つことである．

2. 可測関数 $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対し，その**本質的上限**を

$$\operatorname{ess\,sup} u = \inf\Big\{ M \in \mathbb{R};\ u \le M \ \text{a.e. } x \in \Omega \Big\}$$

で定義する．ただし，u が Ω 上で本質的に上に有界でないときには，

$$\operatorname{ess\,sup} u = \infty$$

と定める．

問. 任意の可測関数 $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対し，

$$u(x) \le \operatorname{ess\,sup} u \quad \text{for a.e. } x \in \Omega$$

が成り立つことを示せ．

定義. Ω 上の L^∞ **空間**を

$$L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = \Big\{ u \colon \Omega \to \mathbb{K};\ u \text{は可測かつ} \operatorname{ess\,sup} |u| < \infty \Big\}$$

で定める．また，任意の $u \in L^\infty(\Omega)$ に対し，その L^∞ **ノルム**を

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} |u|$$

で定める．ただし $L^\infty(\Omega)$ において，Ω 上ほとんど至るところ一致する関数はすべて同一視するものとする．

注意. 通常，Lebesgue可測集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対しては，特に断りが無ければ，$L^p(U)$ は常にLebesgue測度に関する U 上の L^p 空間を表すものとする．

定理 1.4（**Hölderの不等式**）**.** $p,q\in[1,\infty]$ は

$$1\le p\le q\le\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

を満たすとする．ただし，$p=1$ のときは，$q=\infty$ と解釈する．このとき，任意の $u\in L^p(\Omega)$ と $v\in L^q(\Omega)$ に対し，積 uv は μ 可積分であり，

$$\int_\Omega |uv|\,\mathrm{d}\mu\le\|u\|_p\|v\|_q$$

が成り立つ．

証明. $p=1$，$q=\infty$ なら

$$\int_\Omega |uv|\,\mathrm{d}\mu\le\|v\|_\infty\int_\Omega |u|\,\mathrm{d}\mu=\|u\|_1\|v\|_\infty$$

なので，主張が成り立つ．

次に $1<p\le q<\infty$ とする．このとき，まず任意の $a,b\ge 0$ に対し

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\qquad(\clubsuit)$$

が成り立つことに注意する．実際，$f(a)=a^p/p+b^q/q-ab$ とおくと，$f'(a)=a^{p-1}-b$ より，$f(a)\ge f(b^{1/(p-1)})=0$ となって確かに $(\clubsuit)$ が従う．さて，$\|u\|_p\|v\|_q=0$ なら主張は明らかなので，$\|u\|_p\|v\|_q\ne 0$ としてよい．このとき，$(\clubsuit)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_q}\int_\Omega |uv|\,\mathrm{d}\mu&=\int_\Omega\frac{|u|}{\|u\|_p}\frac{|v|}{\|v\|_q}\,\mathrm{d}\mu\\&\le\frac{1}{p}\|u\|_p^{-p}\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}\mu+\frac{1}{q}\|v\|_q^{-q}\int_\Omega|v|^q\,\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

である．したがって主張が示された． □

定理 1.5（**Minkowskiの不等式**）**.** $p\in[1,\infty]$ とする．このとき，任意の $u,v\in L^p(\Omega)$ に対して，$u+v\in L^p(\Omega)$ であり，さらに

$$\|u+v\|_p\le\|u\|_p+\|v\|_p$$

が成り立つ．特に，$L^p(\Omega)$ は $\|\cdot\|_p$ に関してノルム空間となる．

証明. $p=1,\infty$ なら主張は易しいので，$1<p<\infty$ とする．このとき，任意の $u,v\in L^p(\Omega)$ とほとんどすべての $x\in\Omega$ に対し

$$\begin{aligned}|u(x)+v(x)|^p&\le\Big(|u(x)|+|v(x)|\Big)^p\\&\le\Big(2\max\Big\{|u(x)|,|v(x)|\Big\}\Big)^p\\&\le 2^p\max\Big\{|u(x)|^p,|v(x)|^p\Big\}\\&\le 2^p\Big(|u(x)|^p+|v(x)|^p\Big)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$u+v\in L^p(\Omega)$ である．

さらに，Hölderの不等式より，$q=p/(p-1)$ に対し

$$\begin{aligned}\|u+v\|_p^p&=\int_\Omega|u(x)+v(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\\&\le\int_\Omega|u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)|\,\mathrm{d}\mu\\&\quad+\int_\Omega|u(x)+v(x)|^{p-1}|v(x)|\,\mathrm{d}\mu\\&\le\Big(\int_\Omega|u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/q}\Big(\|u\|_p+\|v\|_p\Big)\\&=\|u+v\|_p^{p/q}\Big(\|u\|_p+\|v\|_p\Big)\end{aligned}$$

である．もし $\|u+v\|_p\ne 0$ なら，上式の両辺を $\|u+v\|_p^{p/q}$ で割ることで主張の不等式が従う．一方，$\|u+v\|_p=0$ の場合には，主張の不等式は明らかである．$L^p(\Omega)$ が $\|\cdot\|_p$ に関してノルム空間となることは，上に示したことからすぐに分かる．よって主張が示された． □

定理 1.6. 任意の$p \in [1,\infty]$に対し，$L^p(\Omega)$はBanach空間である．

証明. 完備性を確かめればよい．ここでは$p < \infty$の場合のみ示し，$p = \infty$の場合は問として省略する．$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$を$L^p(\Omega)$上の任意のCauchy列とする．

Step 1. ある部分列$(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$が存在して，

$$\|u_{j_{k+1}} - u_{j_k}\|_p < 2^{-k}$$

が成り立つ．実際，仮定よりある$j_1 \geq 1$が存在して，任意の$j \geq j_1$に対し

$$\|u_j - u_{j_1}\|_p < 2^{-1}$$

が成り立つ．次に，$j_2 > j_1$を十分大きく選べば，任意の$j \geq j_2$に対し

$$\|u_j - u_{j_2}\|_p < 2^{-2}$$

が成り立つ．これを繰り返せばよい．

Step 2. $v_k = u_{j_k}$とおく．$w_2, w_3, \ldots \in L^p(\Omega)$を，各$x \in \Omega$に対し

$$w_l(x) = |v_1(x)| + \sum_{k=1}^{l-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$$

で定める．任意の$x \in \Omega$に対し，実数列$(w_l(x))_{l\geq 2}$は単調非減少なので，

$$w(x) = \lim_{l\to\infty} w_l(x) \leq \infty$$

が存在するが，このとき，さらに$w \in L^p(\Omega)$である．実際，単調収束定理とMinkowskiの不等式により

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w|^p \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{l\to\infty} \int_\Omega |w_l|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \lim_{l\to\infty} \left(\|v_1\|_p + \sum_{k=1}^{l-1} \|v_{k+1} - v_k\|_p \right)^p \\ &\leq \left(\|v_1\|_p + 1 \right)^p < \infty\end{aligned}$$

である．特に，wはΩ上ほとんど至るところ有限であることに注意する．

Step 3. ほとんどすべての$x \in \Omega$に対し

$$v(x) := \lim_{k\to\infty} v_k(x) \tag{$\clubsuit$}$$

が存在し，さらに$v \in L^p(\Omega)$である．実際，任意の$x \in \Omega$と$m > l$に対し

$$|v_m(x) - v_l(x)| \leq \sum_{k=l}^{m-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \leq w_m(x) - w_l(x) \tag{$\spadesuit$}$$

であり，ほとんどすべての$x \in \Omega$に対し$(w_l(x))_{l\geq 2}$がCauchy列であったことから，同じ$x \in \Omega$に対して($\clubsuit$)は収束する．さらに，三角不等式より

$$|v(x)| = \lim_{k\to\infty} |v_k(x)| \leq \lim_{k\to\infty} w_k(x) = w(x)$$

なので，$w \in L^p(\Omega)$から$v \in L^p(\Omega)$が従う．

Step 4. $L^p(\Omega)$の位相において，$(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$がvに収束することを示す．まず，($\clubsuit$)が成立することに注意する．また，($\spadesuit$)において$m \to \infty$とすると

$$\Big| v(x) - v_l(x) \Big| \leq w(x) - w_l(x) \leq w(x)$$

である．$w \in L^p(\Omega)$より，Lebesgue収束定理を適用して，

$$\lim_{l\to\infty} \|v - v_l\|_p = 0$$

を得る．

Step 5. 最後に$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$がvに収束することを示す．任意の$\epsilon>0$に対しある$N\in\mathbb{N}$が存在して，任意の$j,l>N$に対し

$$\|u_j-u_l\|_p<\epsilon$$

が成り立つ．ここで$l=j_k$ととって$k\to\infty$とすると，任意の$j>N$に対し

$$\|u_j-v\|_p\le\epsilon$$

が成り立つ．これより主張が従う． □

問. $p=\infty$の場合に対し，定理 1.6の証明を与えよ．

例. 可測空間$(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$上の**数え上げ測度**$\#$を，任意の$E\subset\mathbb{N}$に対して

$$\#(E)=\sum_{j\in E}1=(E\text{の元の個数})$$

で定義する．各$p\in[1,\infty]$に対し，ℓ^p**空間**を

$$\ell^p(\mathbb{N})=L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\#)$$

で定めると，定理 1.6によりこれはBanach空間である．なお，任意の$p\in[1,\infty)$に対し

$$\ell^p(\mathbb{N})=\Big\{u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{K};\ \sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|^p<\infty\Big\},\quad \|u\|_p=\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|^p\Big)^{1/p},$$

$$\ell^\infty(\mathbb{N})=\Big\{u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{K};\ \sup_{j\in\mathbb{N}}|u_j|<\infty\Big\},\quad \|u\|_\infty=\sup_{j\in\mathbb{N}}|u_j|$$

と表せることに注意せよ．ここで，$u_j=u(j)$と書いた．

注意. 1. $p\in[1,\infty)$に対し上の主張を示すには，以下の事実に注意すればよい．まず，任意の関数$u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{K}$は$\mathcal{P}(\mathbb{N})$可測である．さらに，これが$\#$可積分となるための必要十分条件は

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|<\infty$$

であり，このとき，

$$\int_{\mathbb{N}}u\,\mathrm{d}\#=\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j$$

が成り立つ．(**問.** これを確かめよ.)

2. 同様に，$\ell^p(\mathbb{Z})$なども定義される．すべてまとめて単にℓ^pと書くこともある．

§ 1.4 完備化

定理 1.7. Xをノルム空間とする．このとき，あるBanach空間$\widetilde{X}$と写像$J\colon X\to\widetilde{X}$で以下を満たすものが存在する：

1. Jは線形である．すなわち任意の$x,y\in X$，$c\in\mathbb{K}$ に対し

$$J(x+y)=Jx+Jy,\quad J(cx)=c(Jx)$$

が成り立つ．

2. Jは等長である．すなわち任意の$x\in X$に対し$\|Jx\|=\|x\|$が成り立つ．特にJは単射である．

3. Jの像は$\widetilde{X}$で稠密である．すなわち任意の$\tilde{x}\in\widetilde{X}$と任意の$\epsilon>0$に対し，ある$x\in X$が存在して$\|\tilde{x}-Jx\|<\epsilon$が成り立つ．

注意. Xと$\widetilde{X}$のどちらのノルムも単に$\|\cdot\|$とした．中身の変数で区別せよ．

証明. *Step 1*. まずはXの完備化の候補となる線形空間$\widetilde{X}$を構成する．XのCauchy列全体の集合を

$$\mathfrak{X} = \left\{ (x_j) = (x_j)_{j\in\mathbb{N}};\ (x_j)\text{ は }X\text{ 上の Cauchy 列} \right\}$$

とおき，$(x_j), (y_j) \in \mathfrak{X}$に対して関係 $\sim$ を

$$(x_j) \sim (y_j) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{j\to\infty} \|x_j - y_j\| = 0$$

で定義する．これは同値関係である．商集合を

$$\widetilde{X} = \mathfrak{X}/\sim$$

とおく．任意の$\tilde{x} = [(x_j)], \tilde{y} = [(y_j)] \in \widetilde{X}$と$c \in \mathbb{K}$に対して

$$\tilde{x} + \tilde{y} = [(x_j + y_j)], \quad c\tilde{x} = [(cx_j)]$$

と定義すると，これらはwell-definedであり，$\widetilde{X}$は線形空間となる．ここで零元$\tilde{0}$は$x_j \to 0$となる列を代表元に持つ同値類$[(x_j)]$である．

Step 2. 次に$\widetilde{X}$上のノルムを構成する．任意の$\tilde{x} = [(x_j)] \in \widetilde{X}$に対し

$$\|\tilde{x}\| := \lim_{j\to\infty} \|x_j\| \qquad (\clubsuit)$$

が存在して，代表元によらずwell-definedである．実際，$j, k \to \infty$のとき

$$\big| \|x_j\| - \|x_k\| \big| \le \|x_j - x_k\| \to 0$$

なので$(\clubsuit)$の収束が分かり，また，$(x_j) \sim (y_j)$とすると

$$\big| \|x_j\| - \|y_j\| \big| \le \|x_j - y_j\| \to 0$$

なので$(\clubsuit)$はwell-definedである．この$\|\cdot\|$は$\widetilde{X}$上のノルムである．実際，正値性および$\|\tilde{x}\| = 0$と$\tilde{x} = \tilde{0}$の同値性は明らかであり，さらに

$$\|c\tilde{x}\| = \lim_{j\to\infty} \|cx_j\| = |c| \lim_{j\to\infty} \|x_j\| = |c|\|\tilde{x}\|,$$

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\| = \lim_{j\to\infty} \|x_j + y_j\| \le \lim_{j\to\infty} \big(\|x_j\| + \|y_j\| \big) = \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$$

が成り立つ．

Step 3. $\widetilde{X}$は完備であることを示す．$(\tilde{x}_j) = (\tilde{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$を$\widetilde{X}$上のCauchy列とする．各$j \in \mathbb{N}$に対し代表元をとって$\tilde{x}_j = [(x_k^{(j)})_k]$と表す．各$j \in \mathbb{N}$に対し$k_j \in \mathbb{N}$を適当に選んで

$$\forall l, m \ge k_j \quad \|x_l^{(j)} - x_m^{(j)}\| < j^{-1}$$

とすると，$(x_{k_j}^{(j)}) = (x_{k_j}^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$は$X$のCauchy列である．実際，

$$\|x_{k_j}^{(j)} - x_{k_m}^{(m)}\| \le \|x_{k_j}^{(j)} - x_l^{(j)}\| + \|x_l^{(j)} - x_l^{(m)}\| + \|x_l^{(m)} - x_{k_m}^{(m)}\|$$

において$l \to \infty$とすると

$$\|x_{k_j}^{(j)} - x_{k_m}^{(m)}\| \le j^{-1} + \|\tilde{x}_j - \tilde{x}_m\| + m^{-1} \to 0 \quad (j, m \to \infty).$$

であり，これは$(x_{k_j}^{(j)}) \in \mathfrak{X}$を意味する．

次に$\tilde{x} = [(x_{k_j}^{(j)})]$が$(\tilde{x}_j)$の収束先であることを示す．定義より

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_j\| = \lim_{l\to\infty} \|x_{k_l}^{(l)} - x_l^{(j)}\|$$

である．ここで

$$\|x_{k_l}^{(l)} - x_l^{(j)}\| \le \|x_{k_l}^{(l)} - x_{k_j}^{(j)}\| + \|x_{k_j}^{(j)} - x_l^{(j)}\|$$

であるが，一方で任意の$\epsilon > 0$に対しあるNが存在して

$$j \ge N,\ l \ge \max\{N, k_j\} \quad \Rightarrow \quad \|x_{k_l}^{(l)} - x_{k_j}^{(j)}\| < \epsilon,\ \|x_{k_j}^{(j)} - x_l^{(j)}\| < j^{-1}$$

なので，結局$j \ge N$のとき

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_j\| \le \epsilon + j^{-1}$$

となる．ゆえに$(\tilde{x}_j)$は$\tilde{x}$に収束し，$\widetilde{X}$はBanach空間である．

Step 4. 最後に埋め込みJを構成する．Jを次の写像の合成$J = \pi \circ \iota$として定義する：

$$X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathfrak{X} \overset{\pi}{\to} \widetilde{X} = \mathfrak{X}/\sim, \quad x \mapsto (x) \mapsto [(x)].$$

ここで(x)は恒等点列とする．Jは明らかに線形かつ等長であるので，あとは像JXが$\widetilde{X}$で稠密なことを示せばよい．任意の$\tilde{x} = [(x_j)] \in \widetilde{X}$に対して

$$\|\tilde{x} - Jx_j\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_j\|$$

であるが，(x_j)はCauchy列であるゆえ，jを大きくすれば右辺はいくらでも小さくできる．したがってJXは$\widetilde{X}$で稠密である． □

定義. ノルム空間Xの**完備化**とは，定理 1.7の条件を満たすBanach空間$\widetilde{X}$（と**埋め込み写像**$J\colon X \to \widetilde{X}$の組）のことである．

定理 1.8. Xをノルム空間とする．Xの完備化は同型の違いを除いて一意的である．すなわち，$(\widetilde{X}_1, J_1)$と$(\widetilde{X}_2, J_2)$がともにXの完備化であれば，ある線形等長全単射$J_{21}\colon \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$が存在して

$$J_{21} \circ J_1 = J_2$$

が成り立つ．

証明. 任意の$\tilde{x} \in \widetilde{X}_1$に対し，$J_1X \subset \widetilde{X}_1$の稠密性より，ある$X$上の点列$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$が存在して，$J_1x_j \to \tilde{x}$となる．$J_1, J_2$は等長なので，$(J_2x_j)_{j\in\mathbb{N}}$は$\widetilde{X}_2$上のCauchy列であり，収束する．そこで

$$J_{21}\tilde{x} = \lim_{j\to\infty} J_2x_j \in \widetilde{X}_2$$

と定めると，これは主張の性質を満たしている（詳細は**問**とする）． □

例（Sobolev空間）. $U \subset \mathbb{R}^n$を空でない開集合する．このとき，任意の$k \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$と$p \in [1,\infty]$に対し

$$C^{k,p}(U) = \left\{u \in C^k(U);\ \|u\|_{k,p} < \infty\right\};\ \ \|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p},$$

とおくと，$C^{k,p}(U)$は$\|\cdot\|_{k,p}$に関してノルム空間となる．このノルム空間の完備化をU上の**Sobolev空間**と呼び，$W^{k,p}(U)$で表す．

例. $U \subset \mathbb{R}^n$を空でない開集合とし，$p \in [1,\infty]$とする．Lebesgue積分に関する一般論から，部分空間$C^{0,p}(U) \subset L^p(U)$はノルム$\|\cdot\|_{0,p} = \|\cdot\|_p$に関して稠密である．よって完備化の一意性から，

$$W^{0,p}(U) = L^p(U)$$

と同一視される．

§ 1.5 可分性

定義. 位相空間Xが**可分**であるとは，ある可算かつ稠密な部分集合$D \subset X$が存在することである．

定理 1.9. 1. 任意の$p \in [1,\infty)$に対し，$\ell^p(\mathbb{N})$は可分である．

2. 任意の$p \in [1,\infty)$と空でないLebesgue可測集合$U \subset \mathbb{R}^n$に対し，$L^p(U)$は可分である．

注意. なお，$\ell^\infty(\mathbb{N})$や$L^\infty(U)$は可分ではない．実用上現れる多くの関数空間は可分であることが知られているが，ここでは上の２つの例のみを取り上げる．

証明. *1*. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ に応じて，

$$D = \Big\{ v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \text{ or } \mathbb{Q}(\mathrm{i});\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall j \geq N\ v_j = 0 \Big\}$$

とおく．これは明らかに $\ell^p(\mathbb{N})$ の可算部分集合である．稠密性を確かめよう．任意の $u \in \ell^p(\mathbb{N})$ と $\epsilon > 0$ をとる．このとき，$N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとって

$$\sum_{j=N}^{\infty} |u_j|^p < \frac{1}{2}\epsilon^p$$

とできる．この N に対して $v_1, \ldots, v_{N-1} \in \mathbb{Q}$ or $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ を適当に選べば

$$\sum_{j=1}^{N-1} |u_j - v_j|^p < \frac{1}{2}\epsilon^p$$

が成り立つ．さて，$j \geq N$ に対しては $v_j = 0$ とおけば，$v \in D$ かつ

$$\|u - v\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N-1} |u_j - v_j|^p + \sum_{j=N}^{\infty} |u_j|^p \right)^{1/p} < \epsilon$$

が成り立つ．よって $\ell^p(\mathbb{N})$ は可分である．

2. ここでは可算かつ稠密な部分集合 $D \subset L^p(U)$ の構成を与えるのみで，それ以上の詳細は省略する．まず，$\mathbb{R}^n$ 上の有理半開区間全体の集合を

$$\mathcal{I} = \Big\{ (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n;\ a_j, b_j \in \mathbb{Q} \Big\}$$

とおくと，これは可算集合である．すると，単関数からなる集合

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{I_j \cap U};\ N \in \mathbb{N},\ I_j \in \mathcal{I},\ \alpha_j \in \mathbb{Q} \text{ or } \mathbb{Q}(\mathrm{i}) \right\}$$

は $L^p(U)$ の可算な部分集合である．さらにLebesgue積分の一般論より $D \subset L^p(U)$ は稠密である（任意の $u \in L^p(U)$ に対し，u を単関数近似し，さらにその単関数を D の元で近似する）．よって $L^p(U)$ は可分である． □

第2章 Hilbert空間

§ 2.1 Hilbert空間

定義. X を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．写像 $(\cdot,\cdot)\colon X \times X \to \mathbb{K}$ が X 上の**内積**であるとは，以下を満たすことである．

1. 任意の $x \in X$ に対し $(x, x) \geq 0$ が成り立つ；
2. $(x, x) = 0$ と $x = 0$ は同値である；
3. 任意の $x, y \in X$ に対し $(x, y) = \overline{(y, x)}$ が成り立つ，
4. 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ と $x, y, z \in X$ に対し $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$ が成り立つ．

このとき，$(X, (\cdot,\cdot))$ または単に X を**内積空間**と呼ぶ．

例（数ベクトル空間）． $\mathbb{K}^n$ は（複素）Euclid内積

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathbb{K}^n,$$

により内積空間となる．

例（L^2 空間）． $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$L^2(\Omega)$ は L^2 **内積**

$$(u, v) = \int_\Omega u\overline{v}\, \mathrm{d}\mu, \quad u, v \in L^2(\Omega),$$

により内積空間となる．なお任意の $u, v \in L^2(\Omega)$ に対し $u\overline{v}$ が可積分であることは，例えばHölderの不等式から従う．また特に，$\ell^2(\mathbb{N})$ の内積は

$$(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j \bar{v}_j, \quad u, v \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

で与えられる．

○ **自然なノルム**

定理 2.1. X を内積空間とし，任意の $x \in X$ に対し

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

と定める．このとき，以下が成り立つ．

1. （**Cauchy–Schwarzの不等式**）任意の $x, y \in X$ に対して

$$|(x, y)| \le \|x\|\|y\|$$

　　が成り立つ．

2. $\|\cdot\|$ は X 上のノルムである．

注意. 上の $\|\cdot\|$ を X 上の**自然なノルム**と呼ぶ．以降，内積空間は自然なノルムに関してノルム空間とみなし，特に位相空間とみなす．

証明. *1.* $y \neq 0$ としてよい．このとき，$\alpha = -(x, y)/\|y\|^2$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &\le (x + \alpha y, x + \alpha y) \\ &= \|x\|^2 + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) + |\alpha|^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - |(x, y)|^2/\|y\|^2 \end{aligned}$$

なので，求める結論が従う．

2. 三角不等式のみを示す．Cauchy–Schwarzの不等式より

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \overline{(x, y)} + (x, y) + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

なので，求める結論が従う．□

○ **内積の連続性**

命題 2.2. X を内積空間とする．このとき，内積 $(\cdot, \cdot)\colon X \times X \to \mathbb{K}$ は連続である．すなわち，$x_j \to x$ かつ $y_j \to y$ ならば，$(x_j, y_j) \to (x, y)$ である．

証明. $x_j \to x$，$y_j \to y$ とすると

$$\begin{aligned} \big|(x, y) - (x_j, y_j)\big| &\le |(x - x_j, y)| + |(x_j, y - y_j)| \\ &\le \|x - x_j\|\|y\| + \|x_j\|\|y - y_j\| \to 0 \end{aligned}$$

を得る．□

○ **内積空間の特徴付け**

定理 2.3. 1．(**中線定理**) X を内積空間とする．任意の $x, y \in X$ に対し

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ．

2．X をノルム空間とする．もし任意の $x, y \in X$ に対し $(\heartsuit)$ が成り立つなら，$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ のそれぞれに応じて

$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\Big),$$
$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)$$

は X に内積を定める．さらにこれらの内積は X 上の元々のノルムと**両立する**．すなわち，$(\cdot,\cdot)$ が定める自然なノルムは $\|\cdot\|$ に一致する．

注意. 主張２に現れる内積のノルムによる表示公式を，**極化恒等式**と呼ぶ．

証明. *1.* 任意の $x, y \in X$ に対し

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \overline{(x,y)} + (x,y) + \|y\|^2 \\ &\quad + \|x\|^2 - \overline{(x,y)} - (x,y) + \|y\|^2 \\ &= 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big)\end{aligned}$$

である．

2. $(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことの証明は省略する．また $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき，任意の $x \in X$ に対して

$$(x,x) = \frac{1}{4}\Big(\|2x\|^2 + \mathrm{i}\|(1+\mathrm{i})x\|^2 - \mathrm{i}\|(1-\mathrm{i})x\|^2\Big) = \|x\|^2$$

なので，$(\cdot,\cdot)$ が定める自然なノルムは X 上の元々のノルムに一致する．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合も同様である． □

問. 上の $(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことを示せ（やや長い議論が必要である）．

系 2.4. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$p \in [1,\infty] \setminus \{2\}$ とする．もしある $E, F \in \mathcal{B}$ が存在して

$$E \cap F = \emptyset, \quad \mu(E) > 0, \quad \mu(F) > 0$$

が成り立てば，$L^p(\Omega)$ 上の内積で L^p ノルムと両立するものは存在しない．

証明. $p = \infty$ の場合は省略し，$p < \infty$ の場合のみ考える．このとき

$$u = \mu(E)^{-1/p}\chi_E, \quad v = \mu(F)^{-1/p}\chi_F$$

とおくと，$E \cap F = \emptyset$ に注意して，

$$\|u+v\|_p^2 + \|u-v\|_p^2 = 2^{1+2/p}, \quad 2\Big(\|u\|_p^2 + \|v\|_p^2\Big) = 4$$

を得る．定理 2.3 より，L^p ノルムと両立する内積が存在するには $2^{1+2/p} = 4$ が必要であるが，これは $p \neq 2$ に矛盾する．よって主張は示された． □

問. $p = \infty$ の場合に対し，定理 2.4 の２の証明を与えよ．

○ **Hilbert 空間**

定義. 自然なノルムに関して完備な内積空間を **Hilbert 空間**と呼ぶ．

例 (L^2 空間). $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$L^2(\Omega)$ において，L^2 内積は L^2 ノルムと両立する．また $L^2(\Omega)$ は L^2 ノルムに関して完備であった．ゆえに $L^2(\Omega)$ は L^2 内積に関して Hilbert 空間である．

定理 2.5. Xを内積空間とする．あるHilbert空間$\widetilde{X}$と写像$J\colon X \to \widetilde{X}$で以下を満たすものが存在する：

1. Jは線形である．すなわち任意の$x, y \in X$，$c \in \mathbb{K}$ に対し
$$J(x+y) = Jx + Jy, \quad J(cx) = c(Jx)$$
が成り立つ．

2. Jは内積を保つ．すなわち任意の$x, y \in X$に対し$(Jx, Jy) = (x, y)$が成り立つ．特にJは単射である．

3. Jの像は$\widetilde{X}$で稠密である．すなわち任意の$\tilde{x} \in \widetilde{X}$と任意の$\epsilon > 0$に対し，ある$x \in X$が存在して$\|\tilde{x} - Jx\| < \epsilon$が成り立つ．

さらにこのような$\widetilde{X}$は同型の違いを除いて一意的である．

証明. $\widetilde{X}$をXのノルム空間としての完備化とし，$J\colon X \to \widetilde{X}$を対応する埋め込みとする．任意の$x, y \in X$に対し，中線定理と$J$の等長性から
$$\|Jx + Jy\|^2 + \|Jx - Jy\|^2 = 2(\|Jx\|^2 + \|Jy\|^2)$$
が成り立つ．すると$JX \subset \widetilde{X}$の稠密性とノルムの連続性から，任意の$\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{X}$に対して
$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|^2 + \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2 = 2(\|\tilde{x}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2)$$
が成り立ち，$\widetilde{X}$に内積が入る．よって$\widetilde{X}$はHilbert空間となる．

主張1と3は定理 1.7から従う．また主張2は定理 1.7と極化恒等式から従う．最後に$\widetilde{X}$の同型を除いた一意性は定理 1.8から従う．□

例（Sobolev空間）. 空でない開集合$U \subset \mathbb{R}^n$と$k \in \mathbb{N}_0$に対して
$$C^{k,2}(U) = \left\{ u \in C^k(U);\ \sum_{|\alpha| \le k} \int_U |\partial^\alpha u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$
$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \le k} \int_U \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} \, \mathrm{d}x,$$
とおくと，$(C^{k,2}(U), (\cdot,\cdot)_k)$は内積空間となる．これを完備化して得られるHilbert空間をk階の**Sobolev空間**と呼び$H^k(U)$で表す．これは，集合としては以前に定義した$W^{k,2}(U)$と一致し，同値なノルムを持つ．

例（Sobolev空間）. 空でない開集合$U \subset \mathbb{R}^n$と$k \in \mathbb{N}_0$に対して
$$C_0^k(U) = \left\{ u \in C^k(U);\ \operatorname{supp} u \Subset U \right\},$$
$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \le k} \int_U \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} \, \mathrm{d}x, \quad u, v \in C_0^k(U),$$
とおくと，$(C_0^k(U), (\cdot,\cdot)_k)$は内積空間となる．これを完備化して得られるHilbert空間を$H_0^k(U)$で表す．これも**Sobolev空間**と呼ばれる．

注意. 1. 記号 “$\Subset$” は相対コンパクト部分集合であることを表す．

2. 明らかに$H_0^k(U) \subset H^k(U)$であり，さらにもし$U = \mathbb{R}^n$なら両者は一致する．しかし，一般の開集合$U \subset \mathbb{R}^n$に対しては両者は一致しない．

§ 2.2 直交性と正射影

○ **直交性**

定義. X をHilbert空間とする．部分集合 $L, M \subset X$ が**直交**するとは

$$\forall x \in L \quad \forall y \in M \quad (x, y) = 0$$

が成り立つことであり，このとき $L \perp M$ と書く．特に1点集合 $L = \{x\}$ に対しては，$x \perp M$ とも書く．また，$L \subset X$ の**直交補空間**とは，部分集合

$$L^{\perp} = \{x \in X;\ x \perp L\}$$

のことである．

問. X をHilbert空間とし，$L \subset X$ とする．$L^{\perp}$ は X の閉部分空間であることを示せ．

○ **正射影**

定理 2.6 (正射影定理). X をHilbert空間とし，$L \subset X$ を閉部分空間とする．このとき，

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in L \quad \exists! z \in L^{\perp} \quad \text{s.t.} \quad x = y + z$$

が成り立つ．

定義. y を x の L への**正射影**と呼ぶ．x から y への対応 P_L を**正射影作用素**と呼び，$y = P_L x$ で表す．

証明. *Step 1.* まずは分解の一意性を示す．ある $x \in X$ に対し，

$$x = y + z = y' + z', \quad y, y' \in L, \quad z, z' \in L^{\perp}$$

と書けたとする．このとき $y - y' = z' - z \in L \cap L^{\perp}$ であるから，

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = 0, \quad \|z - z'\|^2 = (z - z', z - z') = 0$$

である．よって $y = y', z = z'$ となり，分解の一意性が分かる．

Step 2. 次に分解の存在を示す．$x \in X$ とする．このとき，

$$\delta = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

とおき，$y_j \in L$ で $\|x - y_j\| \to \delta$ となるものをとると，$(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ はCauchy列である．実際，中線定理より

$$\begin{aligned} &\|(x - y_j) + (x - y_k)\|^2 + \|(x - y_j) - (x - y_k)\|^2 \\ &= 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 \end{aligned}$$

であり，$\frac{1}{2}(y_j + y_k) \in L$ に注意すると，$j, k \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \|y_j - y_k\|^2 &= 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_j + y_k)\right\|^2 \\ &\le 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\delta^2 \to 0 \end{aligned}$$

となる．よって，確かに $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ はCauchy列であり，極限 $y \in X$ を持つ．

今，L は閉なので，$y \in L$ である．あとは $z = x - y$ とおいて，$z \perp L$ を示せばよい．任意の $\eta \in L$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \delta^2 &\le \|z - t(z, \eta)\eta\|^2 \\ &= \|z\|^2 - t\overline{(z, \eta)}(z, \eta) - t(z, \eta)(\eta, z) + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2t|(z, \eta)|^2 + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2 \\ &= \delta^2 - 2t|(z, \eta)|^2 + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2 \end{aligned}$$

なので，

$$0 \le -2t|(z, \eta)|^2 + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2$$

であるが，もし $(z, \eta) \neq 0$ とすると，上の不等式は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対しては成立しないので矛盾である．よって $(z, \eta) = 0$ であり，$z \perp L$ を得る． □

○ **直和**

定義. X をHilbert空間とする．部分空間 $L, M \subset X$ で $L \perp M$ となるものに対して，

$$L \oplus M := \{y + z \in X;\ y \in L,\ z \in M\}$$

を L と M の**直和**と呼ぶ．

注意． 1．上の記号の下で，任意の $x \in L \oplus M$ に対し，直和分解表示

$$x = y + z, \quad y \in L,\ z \in M$$

は一意的である．

2．正射影定理とは，任意の閉部分空間 $L \subset X$ に対して

$$X = L \oplus L^{\perp}$$

が成り立つこと，とも表現できる．

○ **部分集合が張る部分空間**

定義. X をHilbert空間とする．部分集合 $L \subset X$ が**張る（生成する）部分空間**とは，

$$\operatorname{span} L := \left\{c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n;\ c_j \in \mathbb{K},\ x_j \in L,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

のことである．

注意． 1．任意個の有限和は許されているが，無限和は許されていない．

2．$\operatorname{span} L$ は，L を含む X の部分空間のうちで最小のものである．

命題 2.7. X をHilbert空間とする．任意の部分集合 $L \subset X$ に対し，

$$(L^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span} L}$$

が成り立つ．特に $L \subset X$ が閉部分空間であれば，$(L^{\perp})^{\perp} = L$ が成り立つ．

証明. $L^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{span} L}\right)^{\perp}$ であることは容易に確かめられるので（**問**とする），結局，$L \subset X$ が閉部分空間の場合に $(L^{\perp})^{\perp} = L$ を示せば十分である．このとき，定義より

$$L \subset (L^{\perp})^{\perp}$$

は容易にわかる．一方，$x \in (L^{\perp})^{\perp}$ とすると，正射影定理より，ある $y \in L$ と $z \in L^{\perp}$ が存在して $x = y + z$ と書ける．しかし

$$z = x - y \in L^{\perp} \cap (L^{\perp})^{\perp}$$

なので，$z = 0$ であり，$x = y \in L$ を得る．よって $(L^{\perp})^{\perp} \subset L$ である． □

§ 2.3 完全正規直交系

○ **正規直交系（ONS）**

定義. X をHilbert空間とする．高々可算な部分集合 $\{e_j\}_{j \in I} \subset X$ が，任意の $j, k \in I$ に対して

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}$$

を満たしているとき，$\{e_j\}_{j \in I}$ を X の**正規直交系**（または**ONS**）と呼ぶ．

命題 2.8（Besselの不等式）. X をHilbert空間とし，$\{e_j\}_{j \in I} \subset X$ を正規直交系とする．このとき，任意の $x \in X$ に対して

$$\sum_{j \in I} |(x, e_j)|^2 \le \|x\|^2$$

が成り立つ．

証明. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I の有限部分集合からなる単調非減少**取り尽し列**, すなわち

$$I_1 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots \subset I, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$$

とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &\le \left(x - \sum_{j\in I_n} (x, e_j)e_j, x - \sum_{k\in I_n} (x, e_k)e_k \right) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k\in I_n} \overline{(x, e_k)}(x, e_k) \\ &\quad - \sum_{j\in I_n} (x, e_j)(e_j, x) + \sum_{j,k\in I_n} (x, e_j)\overline{(x, e_k)}\delta_{jk} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j\in I_n} |(x, e_j)|^2 \end{aligned}$$

なので，$\displaystyle\sum_{j\in I_n} |(x, e_j)|^2 \le \|x\|^2$ となる．あとは $n \to \infty$ とすればよい． □

○ **完全正規直交系（CONS）**

定理 2.9. X をHilbert空間とし，$\{e_j\}_{j\in I} \subset X$ を正規直交系とする．以下は互いに同値である：

1. $\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}$ は X で稠密である；
2. 任意の $x \in X$ に対して，$x = \displaystyle\sum_{j\in I}(x, e_j)e_j$（**抽象的Fourier級数展開**）；
3. 任意の $x, y \in X$ に対して，$(x, y) = \displaystyle\sum_{j\in I}(x, e_j)\overline{(y, e_j)}$；
4. 任意の $x \in X$ に対して，$\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{j\in I} |(x, e_j)|^2$（**Parsevalの等式**）；
5. 任意の $j \in I$ に対して，$(x, e_j) = 0$ なら $x = 0$.

証明. 以下，$L = \overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}}$ とおく．

1 ⇒ 2. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I の有限部分集合からなる単調非減少取り尽し列とする．任意の $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$x_n = \sum_{j\in I_n} (x, e_j)e_j \in \mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}$$

とおくと，命題 2.8より，$n > m \to \infty$ のとき

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{j\in I_n\setminus I_m} (x, e_j)e_j \right\|^2 = \sum_{j\in I_n\setminus I_m} |(x, e_j)|^2 \to 0$$

なので，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はCauchy列である．その極限を $\xi \in L$ とおくと，任意の $k \in I$ に対し

$$(x - \xi, e_k) = (x, e_k) - \sum_{j\in I}(x, e_j)(e_j, e_k) = 0$$

であるから，$x - \xi \in L^{\perp} = \{0\}$ であり，条件2が従う．

2 ⇒ 3. 内積の連続性より，

$$(x, y) = \sum_{j,k\in I} (x, e_j)\overline{(y, e_k)}(e_j, e_k) = \sum_{j\in I}(x, e_j)\overline{(y, e_j)}$$

となる．

3 ⇒ 4. $x = y$ ととれば明らかである．

4 ⇒ 5. 明らかである．

5 ⇒ 1. $x \in L^{\perp}$ とすると，条件5より $x = 0$ である．すると正射影定理より $X = L \oplus \{0\} = L$ となって，条件1が従う． □

注意. 抽象的Fourier級数展開は和の順序によらないことに注意せよ．

定義. 定理 2.9の条件が成り立つとき，正規直交系$\{e_j\}_{j\in I}$は**完全**であると言う．完全正規直交系は**CONS**と呼ばれることもある．

注意. 完全正規直交系を**正規直交基底**（または**ONB**）と呼ぶこともあるが，**代数基底**と混同しないように注意する必要がある．

系 2.10. Hilbert空間Xは完全正規直交系$\{e_j\}_{j\in I}\subset X$を持つとする．このとき，写像

$$X\to \ell^2(I),\quad x\mapsto ((x,e_j))_{j\in I}$$

は内積を保つ線形全単射である．特に，Xと$\ell^2(I)$はHilbert空間として同型である．

証明. 与えられた写像が線形であることは定義から明らかであり，また内積を保つことも定理 2.9から分かる．特に単射なので，あとは全射性を示せばよい．任意の$(c_j)_{j\in I}\in\ell^2(I)$をとる．このとき，$I$の有限部分集合からなる

任意の単調非減少取り尽し列$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$に対し，級数

$$x=\sum_{j\in I}c_je_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in I_n}c_je_j$$

はXにおいて収束する．実際，任意の$n\geq m>0$に対し

$$\left\|\sum_{j\in I_n}c_je_j-\sum_{j\in I_m}c_je_j\right\|^2=\left(\sum_{j\in I_n\setminus I_m}c_je_j,\sum_{k\in I_n\setminus I_m}c_ke_k\right)$$
$$=\sum_{j\in I_n\setminus I_m}\sum_{k\in I_n\setminus I_m}c_j\overline{c_k}(e_j,e_k)=\sum_{j\in I_n\setminus I_m}|c_j|^2$$

なので，$(\sum_{j\in I_n}c_je_j)_{n\in\mathbb{N}}$は$X$のCauchy列であり，収束する．すると任意の$j\in I$に対し，内積の連続性と線形性より，

$$(x,e_j)=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in I_n}c_ke_k,e_j\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in I_n}c_k(e_k,e_j)=c_j$$

成り立つ．これは主張の写像が全射であることを意味する． □

○ **例：Fourier級数展開**

定理 2.11. $L^2(-\pi,\pi)$において，関数の族

$$\left\{(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

は完全正規直交系をなす．特に，任意の$u\in L^2(-\pi,\pi)$に対して

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx};\quad c_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x,$$

が成り立つ．

注意. 級数の収束はL^2ノルムに関する収束の意味で考える．上の級数展開を**Fourier級数展開**，c_nを**Fourier係数**と呼ぶ．

証明. 正規直交系であることは積分計算で容易にわかるので，完全性を示す．

Step 1. まず$u\in C([-\pi,\pi])$が，任意の$n\in\mathbb{Z}$に対し

$$(u,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})=0$$

を満たすなら，$u\equiv 0$となることを示す．uは実数値として一般性を失わない．もし$u\not\equiv 0$なら，符号を適当に取り換えることにより，ある$x_0\in[-\pi,\pi]$で$u(x_0)>0$となる．すると，ある$\delta\in(0,\pi)$に対して

$$u(x)\geq u(x_0)/2,\quad x\in I:=[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[-\pi,\pi],$$

が成り立つ．今

$$h(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta$$

とおくと，任意の$N \in \mathbb{N}_0$に対し$h(x)^N \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\}$なので

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} u(x)h(x)^N \, \mathrm{d}x \\ &= \int_I u(x)h(x)^N \, \mathrm{d}x + \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} u(x)h(x)^N \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つ．さて，$I' = [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2] \cap [-\pi, \pi]$とおくと，ある$\eta > 0$に対して

$$h(x) \geq 1 + \eta \text{ on } I', \quad |h(x)| \leq 1 \text{ on } [-\pi,\pi] \setminus I$$

となることから，($\clubsuit$)の最右辺第1項は$N \to \infty$のとき

$$\int_I u(x)h(x)^N \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}(1+\eta)^N u(x_0) \int_{I'} \mathrm{d}x \to \infty$$

である．一方，($\clubsuit$)の最右辺第2項は

$$\left| \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} u(x)h(x)^N \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} |u(x)| \, \mathrm{d}x$$

を満たし，Nによらずに有界である．これは矛盾であり，$u \equiv 0$を得る．

Step 2. 任意の$u \in L^2(-\pi,\pi)$に対し，正射影定理より

$$u = v + w \in L \oplus L^{\perp}; \quad L := \overline{\mathrm{span}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx};\ n \in \mathbb{Z}\right\}}$$

と分解できる．$w = 0$であることを示そう．今，$\tilde{w} \in C([-\pi,\pi])$を

$$\tilde{w}(x) = \int_{-\pi}^{x} w(t) \, \mathrm{d}t + (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} tw(t) \, \mathrm{d}t$$

により定めと，$\tilde{w} \perp L$である．実際，Fubiniの定理と$w \perp L$より，

$$\begin{aligned} (\tilde{w}, 1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{x} w(t) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} tw(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t) w(t) \, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} tw(t) \, \mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり，さらに任意の$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$に対し，

$$\begin{aligned} (\tilde{w}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{x} w(t) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \, \mathrm{d}x \\ &= (-\mathrm{i}n)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left((-1)^n - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \right) w(t) \, \mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．よってStep 1の結果より，$\tilde{w} = 0$であり，Lebesgueの微分定理から，$[-\pi,\pi]$上ほとんどいたるところで

$$w = 0$$

であることが従う．ゆえに定理 2.9の条件1が成立する． □

§ 2.4 Schmidtの直交化

$\{x_j\} \subset X$を高々可算かつ一次独立な部分集合とする．このとき

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad y_1 = x_1, \\ e_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|}, \quad y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1, \\ e_3 &= \frac{y_3}{\|y_3\|}, \quad y_3 = x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2, \\ &\cdots \end{aligned}$$

とおくことにより，$\{x_j\}$からXの正規直交系$\{e_j\}$を構成することができる．この構成手順を**Schmidtの直交化法**と呼ぶ．$N = 1, 2, \ldots, \infty$に対して

$$\mathrm{span}\{x_j\}_{j=1}^{N} = \mathrm{span}\{e_j\}_{j=1}^{N}$$

であることに注意する．

○ **完全正規直交系の存在**

定理 2.12. 可分なHilbert空間は完全正規直交系を持つ.

証明. 高々可算かつ稠密な部分集合$\{x_j\} \subset X$をとり，次の操作を行う：

1. $x_1 = 0$ならx_1を取り除き，そうでなければ取り除かない；
2. $x_{k+1} \in \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$なら$x_{k+1}$を取り除き，そうでなければ取り除かない.

残った部分集合を$\{y_j\}$とすると，$\{y_j\}$は高々可算かつ一次独立である．$\{y_j\}$にSchmidtの直交化法を適用して，正規直交系$\{e_j\}$を構成する．すると

$$\mathrm{span}\{e_j\} = \mathrm{span}\{y_j\} = \mathrm{span}\{x_j\}$$

はXで稠密なので，$\{e_j\}$は完全である. □

系 2.13. XをHilbert空間とする．以下の条件は互いに同値である：

1. Xは完全正規直交系を持つ；
2. XはHilbert空間としてℓ^2と同型である；
3. Xは可分である.

証明. 系 2.10と定理 2.12を用いればよい（**問**とする）. □

第3章 線形作用素

§ 3.1 線形作用素

本章では以下，X, YをBanach空間とする.

定義. 部分空間$D \subset X$の上で定義された線形写像

$$T \colon D \to Y$$

を本講では単にX**から**Y**への（線形）作用素**と呼ぶ．作用素Tが与えられたとき，その定義域，値域および核をそれぞれ

$$D(T) = D, \quad R(T) = \{Tx \in Y;\ x \in D(T)\},$$
$$N(T) = \{x \in D(T);\ Tx = 0\}$$

で表す.

注意. $D(T) \neq X$であっても，口頭では「XからYへの作用素T」と言うことが多いため，本講でもその習慣に従うことにする．なお「作用素$T \colon X \to Y$」という表記は定義域に誤解が生じる恐れがあるため，避けた方がよい.

定義. 1. X から Y への作用素 T, S に対し，**和** $T+S$ を
$$(T+S)x = Tx + Sx, \quad x \in D(T+S) = D(T) \cap D(S),$$
で定める．

2. X から Y への作用素 T および $c \in \mathbb{K}$ に対し，**スカラー倍** cT を
$$(cT)x = c(Tx), \quad x \in D(cT) = D(T),$$
で定める．

3. X から Y への作用素 T および Y から Z への作用素 S に対し，**積** ST を
$$(ST)x = S(Tx), \quad x \in D(ST) = \{x \in D(T);\ Tx \in D(S)\}.$$
で定める．

注意. 定義域に注意する．明らかに，これらは再び線形作用素となっている．

§ 3.2 有界作用素

定義. X から Y への線形作用素 T が**連続**であるとは，
$$x_j, x \in D(T),\ x_j \to x \quad \Rightarrow \quad Tx_j \to Tx$$
が成り立つことである．

定理 3.1. X から Y への線形作用素 T が連続となるためには
$$\exists M \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in D(T) \quad \|Tx\| \leq M\|x\| \qquad (\Diamond)$$
が成り立つことが必要十分である．

証明. まず必要性を示す．$(\Diamond)$ が成り立たないと仮定する．すなわち
$$\forall n \geq 0 \quad \exists x_n \in D(T) \quad \text{s.t.} \quad \|Tx_n\| > n\|x_n\|$$
とする．このとき $y_n = n^{-1}\|x_n\|^{-1}x_n$ とおくと，
$$\|y_n\| = n^{-1} \to 0, \quad \|Ty_n\| > 1$$
が成り立つので，T は連続ではない．

次に十分性を示す．$(\Diamond)$ を仮定すると，$x_j, x \in D(T)$，$x_j \to x$ のとき，
$$\|Tx - Tx_j\| = \|T(x - x_j)\| \leq M\|x - x_j\| \to 0$$
が成り立つ．よって，T は連続である． □

定義. X から Y への作用素 T が**有界**であるとは，$D(T) = X$ かつ
$$\exists M \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in X \quad \|Tx\| \leq M\|x\|$$
が成り立つことである．有界作用素 T に対し，その**作用素ノルム**を
$$\|T\| = \inf\Big\{M \geq 0;\ \forall x \in X\ \|Tx\| \leq M\|x\|\Big\}$$
で定義する．さらに X から Y への有界作用素全体の集合を $\mathcal{B}(X, Y)$ で表し，特に $X = Y$ のときは $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$ と書く．

注意. 1. 特に，T が X から Y への有界作用素ならば，任意の $x \in X$ に対し
$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$
が成り立つ．

2. 本講では，有界作用素 T に対しては常に $D(T) = X$ を要求する．

3. $\mathcal{B}(X, Y)$ は作用素の和とスカラー倍に関して線形空間となる．確認は容易である．

命題 3.2. 任意の$T \in \mathcal{B}(X,Y)$に対し，

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

が成り立つ．さらに$\|\cdot\|$は$\mathcal{B}(X,Y)$上のノルムである．

証明. まず第1の等号を示す．任意の$x \in X$に対し$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$が成り立つことから

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$$

がすぐに分かる．一方，$x \neq 0$に対して

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\|x\| \leq \left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Ty\|}{\|y\|}\right)\|x\|$$

なので，作用素ノルムの定義から

$$\|T\| \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

が分かる．第1の等号が示された．

次に第2の等号を示す．任意の$x \neq 0$に対して

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|y\|=1}\|Ty\|$$

なので，

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

である．また任意の$\|x\| = 1$に対して

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{y\neq 0}\frac{\|Ty\|}{\|y\|}$$

であることから

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

を得る．よって第2の等号も成立する．

作用素ノルムが$\mathcal{B}(X,Y)$にノルムを定めることの確認は，**問**として省略する． □

定理 3.3. $\mathcal{B}(X,Y)$は作用素ノルムに関してBanach空間となる．

証明. $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$を$\mathcal{B}(X,Y)$上の任意のCauchy列とする．まずは収束先の候補$T\colon X \to Y$を構成しよう．作用素ノルムとCauchy列の定義より，

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall j,k \geq N\ \forall x \in X \quad \|T_jx - T_kx\| \leq \epsilon\|x\| \qquad (\clubsuit)$$

が成り立つことに注意する．特に，各$x \in X$に対し，$(T_jx)_{j\in\mathbb{N}}$はY上のCauchy列であり，収束することが分かる．そこで$T\colon X \to Y$を

$$Tx = \lim_{j\to\infty} T_jx \quad \text{for } x \in X$$

で定める．

次に上で構成したTが有界作用素であることを確かめる．Tが線形であることはすぐに分かる．また(♣)の最後の式の左辺に三角不等式を適用して$j \to \infty$とすると，

$$\|Tx\| \le \|T_k x\| + \epsilon\|x\| \le (\|T_k\| + \epsilon)\|x\|$$

となる．よって確かにTは有界である．

最後に$(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$がTに収束することを示す．(♣)の最後の式で$j \to \infty$とすると

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \ge 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall k \ge N\ \forall x \in X \quad \|Tx - T_k x\| \le \epsilon\|x\|$$

となり，これは

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \ge 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall j, k \ge N \quad \|T - T_k\| \le \epsilon$$

を意味する．したがって，$T_k \to T$を得る． □

例 (掛け算作用素). $U \subset \mathbb{R}^n$を開集合とし，$m \in L^\infty(U)$，$1 \le p \le \infty$とする．このとき$u \in L^p(U)$に対して

$$(Tu)(x) = m(x)u(x)$$

と定めると，$T \in \mathcal{B}(L^p(U))$であり，

$$\|T\| = \|m\|_{L^\infty}$$

が成り立つ．このようなTを**掛け算作用素**と呼ぶ．

証明. ここでは$1 \le p < \infty$の場合にのみ示す．まず

$$\|Tu\|_{L^p} = \left(\int_U |m(x)|^p |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \|m\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}$$

なので，$\|T\| \le \|m\|_{L^\infty}$である．一方，$L^\infty$ノルムの定義から，任意の$\epsilon > 0$に対しLebesgue測度正のある可測集合$E \subset U$が存在して

$$|m(x)| > \|m\|_{L^\infty} - \epsilon \quad \text{on } E$$

が成り立つ．すると，

$$\|T\chi_E\|_{L^p} = \left(\int_U |m(x)|^p |\chi_E(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \ge \Big(\|m\|_{L^\infty} - \epsilon\Big)\|\chi_E\|_{L^p}$$

であり，よって$\|T\| \ge \|m\|_{L^\infty}$を得る． □

問. 省略された$p = \infty$の場合の証明を与えよ．

例. $U \subset \mathbb{R}^n$を開集合，$p, q \in [1, \infty]$をHölder共役指数対とし，$k \in L^q(U \times U)$とする．このとき，任意の$u \in L^p(U)$に対して

$$(Tu)(x) = \int_U k(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

と定めると，$T \in \mathcal{B}(L^p(U), L^q(U))$であり，

$$\|T\| \le \|k\|_{L^q} = \left(\int_{U\times U} |k(x,y)|^q \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

が成り立つ．

注意. 上のようなkを作用素Tの**積分核**や**作用素核**などと呼ぶ．

証明. $p,q\in(1,\infty)$ の場合のみを示し，$p,q\in\{1,\infty\}$ の場合は**問**とする．Hölderの不等式より，

$$\begin{aligned}|(Tu)(x)| &\le \int_U |k(x,y)u(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\le \Big(\int_U |k(x,y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{1/q}\Big(\int_U |u(y)|^p\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

なので，$(Tu)(x)$ はほとんどすべての $x\in U$ で意味を持つ．さらにこの不等式から

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{L^q}^q &= \int_U |(Tu)(x)|^q\,\mathrm{d}x\\ &\le \Big(\int_{U\times U} |k(x,y)|^q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\Big(\int_U |u(y)|^p\,\mathrm{d}y\Big)^{q/p}\\ &= \|k\|_{L^q}^q\|u\|_{L^p}^q\end{aligned}$$

となるので，主張が従う． □

例（たたみ込み作用素）. $\rho\in L^1(\mathbb{R}^n)$，$1\le p\le\infty$ とする．$u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$Tu(x)=(\rho*u)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

とおくと，$T\in\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))$ であり，

$$\|Tu\|_{L^p}\le\|\rho\|_{L^1}\|u\|_{L^p}$$

が成り立つ．このような T を**たたみ込作用素**と呼ぶ.

証明. $p\in(1,\infty)$ の場合にのみ示す．$q\in(1,\infty)$ を $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ととる．Hölderの不等式より，

$$\begin{aligned}|(Tu)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x-y)|^{1/q}|\rho(x-y)|^{1/p}|u(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x-y)|\,\mathrm{d}y\Big)^{1/q}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x-y)||u(y)|^p\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p}\\ &= \|\rho\|_{L^1}^{1/q}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x-y)||u(y)|^p\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{L^p}^p &\le \|\rho\|_{L^1}^{p/q}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x-y)||u(y)|^p\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\\ &= \|\rho\|_{L^1}^{p/q}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x-y)|\,\mathrm{d}x\Big)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\\ &= \|\rho\|_{L^1}^{p/q+1}\|u\|_{L^p}^p\end{aligned}$$

となり，これは $\|Tu\|_{L^p}\le\|\rho\|_{L^1}\|u\|_{L^p}$ を意味する． □

§ 3.3 閉作用素

定義. X から Y への線形作用素 T が**閉作用素**であるとは

$$x_j\in D(T),\ x_j\to x,\ Tx_j\to y\quad\Rightarrow\quad x\in D(T),\ Tx=y$$

が成り立つことである．

命題 3.4. X から Y への任意の有界作用素は閉作用素である．

証明. $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ とする．$x_j\in D(T)=X$ かつ $x_j\to x$，$Tx_j\to y$ と仮定すると，まず $x\in X=D(T)$ である．また，T の連続性から

$$Tx=\lim_{j\to\infty}Tx_j=y$$

が成り立つ．よって，T は閉作用素である． □

定義. T を X から Y への線形作用素とする．

1. T の**グラフ**とは，
$$\mathcal{G}(T)=\left\{(x,Tx)\in X\times Y;\ x\in D(T)\right\}$$
のことである．明らかに，これは $X\times Y$ の部分空間である．

2. $D(T)$ 上の**グラフノルム**とは，
$$\|x\|_{\mathcal{G}}=\|x\|_X+\|Tx\|_Y,\quad x\in D(T),$$
により定まるノルムのことである．

命題 3.5. T を X から Y への線形作用素とする．以下の条件は互いに同値である．

1. T は閉作用素である．
2. $\mathcal{G}(T)\subset X\times Y$ は閉部分空間である．
3. $D(T)$ はグラフノルムに関して完備である．

注意. もちろん，条件2では $X\times Y$ を直積空間としてBanach空間と見ている．

証明. 証明は省略する（**問**とする）． □

定義. T,S を X から Y への線形作用素とする．T は S の**拡張**（あるいは S は T の**制限**）であるとは
$$D(S)\subset D(T),\quad \forall x\in D(S)\quad Sx=Tx$$
が成り立つことである．このとき，$S\subset T$ と書く．

注意. $S\subset T$ はグラフの包含関係 $\mathcal{G}(S)\subset\mathcal{G}(T)$ と同値である．

定義. X から Y への線形作用素 T が**可閉**であるとは，T のある閉拡張が存在することである．

命題 3.6. X から Y への線形作用素 T が可閉であるためには，
$$x_j\in D(T),\ x_j\to 0,\ Tx_j\to y\quad\Rightarrow\quad y=0$$
が成り立つことが必要十分である．

証明. まず必要性を示す．T が閉拡張 $\tilde{T}$ を持つとする．このとき，$x_j\in D(T)$ かつ $x_j\to 0$，$Tx_j\to y$ とすると，$x_j\in D(\tilde{T})$ かつ $x_j\to 0$，$\tilde{T}x_j\to y$ が成り立つので，閉作用素の定義より $y=\tilde{T}0=0$ が得られる．

次に十分性を示す．各 $(x,y)\in\overline{\mathcal{G}(T)}$ に対し $\overline{T}x=y$ とおくことで，X から Y への作用素 $\overline{T}$ を定義すると，これはwell-definedである．実際，
$$x_j,x_j'\in D(T),\quad x_j\to x,\quad x_j'\to x,\quad Tx_j\to y,\quad Tx_j'\to y'$$
とすると，
$$x_j-x_j'\in D(T),\quad x_j-x_j'\to 0,\quad T(x_j-x_j')\to y-y'$$
であるから，仮定より $y=y'$ となって確かにwell-definedである．定義より $\mathcal{G}(\overline{T})=\overline{\mathcal{G}(T)}\supset\mathcal{G}(T)$ なので，$\overline{T}$ は T の閉拡張である． □

注意. 上の $\overline{T}$ は可閉作用素 T の最小閉拡張であり，T の**閉包**と呼ばれる．

§ 3.4 逆作用素

定義. T を X から Y への作用素とする．Y から X への作用素 S が

$$ST = \mathrm{id}_{D(T)}, \quad TS = \mathrm{id}_{D(S)}$$

の両者を満たすとき，S を T の**逆作用素**と呼び，$S = T^{-1}$ で表す．

注意. 1．このとき，以下が成り立つことに注意する．

$$D(T^{-1}) = R(T), \quad R(T^{-1}) = D(T).$$

2．次の条件は互いに同値である．証明は難しくない．

(a) T^{-1} が存在する；

(b) T は単射である；

(c) $N(T) = \{x \in D(T);\ Tx = 0\} = \{0\}$ が成り立つ．

命題 3.7. T を X から Y への閉作用素とする．もし逆作用素 T^{-1} が存在すれば，T^{-1} も閉作用素である．

証明. $y_j \in D(T^{-1})$，$y \in Y$ および $x \in X$ が

$$y_j \to y, \quad T^{-1}y_j \to x$$

を満たすとする．$D(T^{-1}) = R(T)$ なので，ある $x_j \in D(T)$ を用いて $y_j = Tx_j$ と書けることに注意する．すると，

$$x_j = T^{-1}y_j \to x, \quad Tx_j = y_j \to y$$

および T が閉であることから，$x \in D(T)$ かつ $Tx = y$ であり，これは

$$y \in R(T) = D(T^{-1}), \quad T^{-1}y = x$$

を意味する．よって T^{-1} は閉である． □

注意. 有界作用素の逆作用素は必ずしも有界ではないが，少なくとも閉となる．

○ Neumann級数

定理 3.8 (Neumann級数). $T \in \mathcal{B}(X)$ かつ $\|T\| < 1$ とする．このとき，$1 - T$ は有界な逆作用素 $(1-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ を持ち，それは

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

で与えられる．

注意. 上の等式は，複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$，$|\alpha| < 1$，に対する等比級数の和の公式

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$$

の類似公式と思える．

証明. $S_\nu = \sum_{n=0}^{\nu} T^n$ とおく．$\nu > \mu \to \infty$ のとき

$$\|S_\nu - S_\mu\| \le \sum_{n=\mu+1}^{\nu} \|T\|^n = \|T\|^{\mu+1}\frac{1 - \|T\|^{\nu-\mu}}{1 - \|T\|} \to 0$$

なので，$(S_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{B}(X)$ 上の Cauchy 列であり，極限

$$S = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{B}(X)$$

が $\mathcal{B}(X)$ の位相で存在する．すると

$$(1-T)S = S(1-T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = 1$$

が成り立つので，主張が得られた． □

第4章 Baireのカテゴリー定理とその応用

§ 4.1 Baireのカテゴリー定理

定理 4.1 (Baireのカテゴリー定理). Xを完備距離空間とする．もしXの閉部分集合の可算族$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

満たすなら，ある$n \in \mathbb{N}$に対しX_nはXのある開球を含む．すなわち，ある$x \in X$と$\rho > 0$が存在して

$$B(x,\rho) := \{y \in X;\ d(x,y) < \rho\} \subset X_n$$

が成り立つ．

証明. 結論を否定すると，$x_1 \in X \setminus X_1$が存在する．$d_1 = d(x_1, X_1)$として

$$B_1 = B(x_1, \rho_1), \quad \rho_1 = \min\{1, d_1/2\} > 0$$

とおくと，$\rho_1 \le 1$，$\overline{B_1} \cap X_1 = \emptyset$が成り立つ．$X_2$は開球を含まないので，ある$x_2 \in B_1 \setminus X_2$が存在する．$d_2 = d(x_2, X_2)$として

$$B_2 = B(x_2, \rho_2), \quad \rho_2 = \min\{1/2, d_2/2, \rho_1 - d(x_1, x_2)\} > 0$$

とおくと，$\rho_2 \le 1/2$，$\overline{B_2} \cap X_2 = \emptyset$，$B_1 \supset B_2$となる．これを繰り返すことで，帰納的に$B_j = B(x_j, \rho_j)$を

$$\rho_j \le 1/j, \quad \overline{B_j} \cap X_j = \emptyset, \quad B_1 \supset B_2 \supset \cdots$$

を満たすように構成できる．すると点列$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$はX上のCauchy列であり，Xの完備性によりある$x \in X$に収束する．一方，任意のjに対して$x \in \overline{B_j}$であるから$x \notin X_j$である．これは仮定に矛盾する． □

§ 4.2 一様有界性原理

定理 4.2 (一様有界性原理). X, YをBanach空間とする．有界作用素の族$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}(X,Y)$が

$$\forall x \in X \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\|_Y < \infty$$

を満たすなら，

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \infty$$

が成り立つ．

証明. 各$n \in \mathbb{N}$に対して

$$X_n = \left\{x \in X;\ \forall\lambda \in \Lambda \quad \|T_\lambda x\| \le n\right\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{x \in X;\ \|T_\lambda x\| \le n\right\}$$

とおくと，これはT_λの連続性より閉集合であり，また仮定より

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

である．このとき，Baireのカテゴリー定理より，あるX_nはXのある開球を含む．すなわち，ある$n \in \mathbb{N}$と$y \in X$，$\rho > 0$に対して$B(y, \rho) \subset X_n$である．すると任意の$x \in B(0, \rho)$と$\lambda \in \Lambda$に対して

$$\|T_\lambda x\| \le \|T_\lambda y\| + \|T_\lambda (y + x)\| \le 2n$$

であり，これは$\|T_\lambda\| \le 2n/\rho$を意味する． □

系 4.3 (Banach–Steinhaus). 作用素列$\{T_j\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$が各点極限

$$Tx := \lim_{j \to \infty} T_j x, \quad x \in X,$$

を持てば，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$であり，

$$\|T\| \le \liminf_{j \to \infty} \|T_j\| \tag{$\spadesuit$}$$

である．

証明. Tの線形性は極限の性質からすぐに分かるので，有界性を示す．任意の$x \in X$に対して

$$\|Tx\| = \lim_{j \to \infty} \|T_j x\| = \liminf_{j \to \infty} \|T_j x\| \le \Bigl(\liminf_{j \to \infty} \|T_j\|\Bigr) \|x\|$$

である．ここで一様有界性原理を用いると，仮定より$\liminf_{j \to \infty} \|T_j\| < \infty$が分かる．よって$T \in \mathcal{B}(X, Y)$である．($\spadesuit$)も上の不等式からすぐに従う． □

§ 4.3 開写像定理

定理 4.4 (開写像定理). X, YをBanach空間とし，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$とする．もし$R(T) = Y$ならTは開写像である．すなわち，任意の開集合$U \subset X$に対し$TU \subset Y$は開集合である．

系 4.5. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$が全単射なら，$T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$である．

証明. Tは単射なので，$R(T) = Y$で定義された逆作用素T^{-1}が存在する．開写像定理より任意の開集合$U \subset X$に対して逆像$(T^{-1})^{-1} U = TU$はYの開集合である．よって，T^{-1}は連続である． □

定理 4.4の証明. *Step 1*. まずある$\epsilon > 0$に対して

$$B_Y(0, \epsilon) \subset \overline{TB_X(0, 1)}$$

となることを示す．仮定より

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{TB_X(0, n)}$$

なので，Baireのカテゴリー定理より，ある$a \in Y$と$\delta > 0$が存在して

$$B_Y(a, \delta) \subset \overline{TB_X(0, n)}$$

が成り立つ．すると，任意の$y \in B_Y(0, \delta)$に対し，$y + a, a \in B_Y(a, \delta)$はそれぞれ$TB_X(0, n)$上のある点列$(y_j)_{j \in \mathbb{N}}, (y'_j)_{j \in \mathbb{N}}$の極限で書けるので，

$$y = (y + a) - a = \lim_{j \to \infty} (y_j - y'_j) \in \overline{TB_X(0, 2n)}$$

となる．よって$B_Y(0, \delta) \subset \overline{TB_X(0, 2n)}$であり，$\epsilon = \delta/2n$ととればよい．

Step 2. 次にStep 1の$\epsilon > 0$に対して

$$B_Y(0,\epsilon) \subset TB_X(0,2)$$

が成り立つことを示す．任意の$y \in B_Y(0,\epsilon)$をとる．Step 1の結果より，

$$\exists x_0 \in B_X(0,1) \quad \text{s.t.} \quad \|y - Tx_0\|_Y < \epsilon/2$$

である．すると，$y - Tx_0 \in B_Y(0,\epsilon/2)$なので，再びStep 1の結果より，

$$\exists x_1 \in B_X(0,1/2) \quad \text{s.t.} \quad \|y - Tx_0 - Tx_1\|_Y < \epsilon/2^2$$

である．以下，帰納的に

$$x_j \in B_X(0,1/2^j) \quad \text{s.t.} \quad \|y - Tx_0 - Tx_1 - \cdots - Tx_j\|_Y < \epsilon/2^{j+1}$$

となるものを構成する．このとき

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|_X < \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2$$

なので，$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \in B_X(0,2)$ は絶対収束しており，さらに

$$Tx = T\sum_{j=0}^{\infty} x_j = \sum_{j=0}^{\infty} Tx_j = y$$

である．よって$B_Y(0,\epsilon) \subset TB_X(0,2)$が示された．

問. 点列$x_j \in X$に対し，$\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|$が収束すれば$\sum_{j=0}^{\infty} x_j$も収束することを示せ．

Step 3. $U \subset X$を開集合とし，$y_0 \in TU$とする．$x_0 \in U$を$y_0 = Tx_0$ととり，また$r > 0$を$B_X(x_0,2r) \subset U$ととる．このとき

$$B_Y(y_0,\epsilon r) \subset TB_X(x_0,2r) \subset TU$$

が成り立つことを示そう．実際，$y \in B_Y(y_0,\epsilon r)$とすると，

$$y = y_0 + y', \quad y' \in B_Y(0,\epsilon r),$$

と書けるが，Step 2より$B_Y(0,\epsilon r) \subset TB_X(0,2r)$なので，

$$y = Tx_0 + y' \in TB_X(x_0,2r)$$

である．□

定理 4.6（閉グラフ定理）. TがXからYへの閉作用素で$D(T) = X$なら，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$である．

証明. 以下，$\mathcal{G}(T)$を$X \times Y$のノルムに関してBanach空間とみなす．線形作用素

$$P \colon \mathcal{G}(T) \to X, \quad (x,Tx) \mapsto x$$

は

$$\|P(x,Tx)\|_X = \|x\|_X \le \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x,Tx)\|_{X\times Y}$$

を満たすので，有界である．また明らかにPは単射かつ$R(P) = X$である．よって系 4.5より，$P^{-1} \in \mathcal{B}(X,\mathcal{G}(T))$である．すると

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y &\le \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x,Tx)\|_{\mathcal{G}(T)} \\ &= \|P^{-1}x\|_{X\times Y} \le \|P^{-1}\|\|x\|_X\end{aligned}$$

であり，したがって$T \in \mathcal{B}(X,Y)$である．□

第5章 線形汎関数

§ 5.1 共役空間

Banach 空間 X に対し，

$$X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$$

を X の**共役空間**（**双対空間**）と呼び，X^* の元を X 上の**有界線形汎関数**と呼ぶ．

例. X を Hilbert 空間とし，$y \in X$ を一つ固定する．このとき

$$f_y(x) = (x, y), \quad x \in X,$$

と定めると，$f_y \in X^*$ である．逆に X^* の任意の元はこの形に書けることが次の定理から分かる．

定理 5.1 (Riesz の表現定理). X を Hilbert 空間とする．任意の $f \in X^*$ に対し，$y \in X$ が一意的に存在して

$$f = (\,\cdot\,, y) \quad \Big(\text{i.e., } \forall x \in X \quad f(x) = (x, y)\Big)$$

と書ける．このとき，さらに

$$\|f\|_{X^*} = \|y\|_X$$

が成り立つ．

注意. 上の Riesz の表現定理による対応

$$X^* \to X, \quad f \mapsto y$$

はノルムを保つ共役線形同型写像である．これにより

$$X^* \cong X$$

と同一視することができる．

証明. *Step 1*. まず，条件を満たすような $y \in X$ を構成する．$f = 0$ なら $y = 0$ ととれるので，$f \neq 0$ とする．このとき

$$N := \{x \in X;\ f(x) = 0\}$$

は X の閉部分空間であり，仮定 $f \neq 0$ より $N \neq X$ である．よってある $z \in N^\perp \setminus \{0\}$ をとることができる．このとき，任意の $x \in X$ に対して

$$f(f(z)x - f(x)z) = 0 \quad \therefore\ f(z)x - f(x)z \in N$$

なので，$z \in N^\perp \setminus \{0\}$ に注意すると

$$(f(z)x - f(x)z, z) = 0 \quad \therefore\ f(x) = (x, \overline{f(z)}z/\|z\|^2)$$

を得る．したがって $y = \overline{f(z)}z/\|z\|^2$ ととればよい．

Step 2. 次に$y \in X$の一意性を示す．もし$y, y' \in X$が$f = (\cdot, y) = (\cdot, y')$を満たすなら，任意の$x \in X$に対し

$$(x, y - y') = 0$$

が成り立つ．ここで$x = y - y'$ととれば，$\|y - y'\|^2 = 0$となって$y = y'$が従う．

Step 3. 最後に等長性を確かめる．Cauchy–Schwarzの不等式より

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

なので，$\|f\| \leq \|y\|$である．一方，$x = y$ととると

$$\|y\|^2 = |f(y)| \leq \|f\|\|y\|$$

なので，$\|y\| \leq \|f\|$である．したがって$\|f\| = \|y\|$を得る． □

例. （複素）Euclid内積を通じて，自然に$(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{K}^n$と同一視される．

XがHilbert空間でない場合には，X^*がどのような空間になるかは一般には分からない．一方で，以下のような具体的に書ける例が知られている．

定理 5.2. $p \in [1, \infty)$と$q \in (1, \infty]$は互いにHölder共役とし，$y = (y_j) \in \ell^q$とする．このとき，任意の$x = (x_j) \in \ell^p$に対し，

$$f_y(x) = \sum_j x_j y_j \qquad (\diamondsuit)$$

は絶対収束し，$f_y \in (\ell^p)^*$を定める．さらに，この対応

$$\ell^q \to (\ell^p)^*, \quad y \mapsto f_y$$

は標準的な同型$(\ell^p)^* \cong \ell^q$を与える．

注意. 有限列の場合を除いて，$p = \infty$ではこれは成立しない．

証明. *Step 1.* まず$(\diamondsuit)$が等長埋め込み$\ell^q \hookrightarrow (\ell^p)^*$を与えることを示す．Hölderの不等式により

$$\sum_j |x_j y_j| \leq \left(\sum_j |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_j |y_j|^q\right)^{1/q} \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

なので，$(\diamondsuit)$は確かに絶対収束しており，さらにこれから

$$|f_y(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

が分かる．よって$f_y \in (\ell^p)^*$かつ$\|f_y\| \leq \|y\|_q$である．あとは$\|f_y\| \geq \|y\|_q$を示せば，上の埋め込みの等長性が分かる．

$1 < p < \infty$の場合，$x_j = |y_j|^{q-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \arg y_j}$とおくと，

$$\|x\|_p = \left(\sum_j |y_j|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \left(\sum_j |y_j|^q\right)^{1/p} = \|y\|_q^{q/p} < \infty$$

なので，$x := (x_j) \in \ell^p$であり，さらに

$$f_y(x) = \sum_j x_j y_j = \|y\|_q^q = \|y\|_q^{q-1} \|y\|_q = \|y\|_q^{q/p} \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q$$

となる．よって$\|f_y\| \geq \|y\|_q$が示された．

$p = 1$の場合，任意の$\epsilon > 0$に対して$|y_k| \geq \|y\|_\infty - \epsilon$を満たす$k$をとって，第$k$標準基底$e^{(k)} = (\delta_{jk})_j \in \ell^1$を考えると

$$\|y\|_\infty - \epsilon \leq |y_k| = |f_y(e^{(k)})| \leq \|f_y\| \|e^{(k)}\|_1 = \|f_y\|$$

となる．$\epsilon > 0$は任意であったから$\|f_y\| \geq \|y\|_\infty$が示された．

Step 2. 次にStep 1で構成した埋め込みの全射性を示す．任意の$f \in (\ell^p)^* \setminus \{0\}$に対し，第$j$標準基底$e^{(j)} \in \ell^p$を用いて

$$y = (y_j)_j, \quad y_j = f(e^{(j)}),$$

とおく．まずこのとき$y \in \ell^q$となることを示そう．

$1 < p < \infty$の場合，$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{q-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \arg y_j} e^{(j)} \in \ell^p$とおくと，

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q = f(x^{(n)}) \leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p(q-1)} \right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/p}$$

なので，

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|$$

であり，確かに$y \in \ell^q$である．

$p = 1$の場合，

$$|y_j| = |f(e^{(j)})| \leq \|f\| \|e^{(j)}\|_1 = \|f\|$$

なので，確かに$y \in \ell^\infty$である．

今，任意の$x \in \ell^p$に対して$x = \sum_j x_j e^{(j)} \in \ell^p$と書けることに注意すると，$f$の連続性より，

$$f(x) = \sum_j x_j f(e^{(j)}) = \sum_j x_j y_j = f_y(x)$$

となるので，$f = f_y$，$y \in \ell^q$，と書けることが分かった． □

定理 5.2はさらに次のように一般化される．

定理 5.3. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$を$\sigma$有限な測度空間とし，$p \in [1, \infty)$と$q \in (1, \infty]$は互いにHölder共役とする．また，$v \in L^q(\Omega, \mu)$とする．このとき，任意の$u \in L^p(\Omega, \mu)$に対し，$uv$は$\mu$可積分であり，

$$f_v(u) = \int_\Omega u(x) v(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

は$f_v \in (L^p(\Omega, \mu))^*$を定める．さらに，この対応

$$L^q(\Omega, \mu) \to (L^p(\Omega, \mu))^*, \quad v \mapsto f_v$$

は標準的な同型$(L^p(\Omega, \mu))^* \cong L^q(\Omega, \mu)$を与える．

証明. 証明は省略する． □

§ 5.2 Hahn–Banachの定理

○ **実数版**

定義. Xを$\mathbb{R}$線形空間とする．汎関数$p \colon X \to \mathbb{R}$が**劣線形**であるとは，以下の条件を満たすことである．

1. 任意の$\lambda > 0$と$x \in X$に対し$p(\lambda x) = \lambda p(x)$が成り立つ（**正斉次性**）;
2. 任意の$x, y \in X$に対し$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$が成り立つ（**劣加法性**）．

注意. 後述の$\mathbb{C}$線形空間上の半ノルムと異なり，劣線形汎関数は非負値とは限らないし，また非負値性を要求もしない．例えば，1次元$\mathbb{R}$線形空間上では，負値をとり得る劣線形汎関数を容易に構成できる．

定理 5.4 (Hahn–Banachの定理，実数版). Xを$\mathbb{R}$線形空間，$L \subset X$を部分空間とし，$p\colon X \to \mathbb{R}$を劣線形汎関数とする．もし$\mathbb{R}$線形汎関数$f\colon L \to \mathbb{R}$が

$$f(x) \le p(x) \text{ for } x \in L$$

を満たせば，ある$\mathbb{R}$線形汎関数$F\colon X \to \mathbb{R}$が存在して

$$F(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad F(x) \le p(x) \text{ for } x \in X$$

が成り立つ．

注意. 端的に言えば，部分空間L上で定義された線形汎関数fの，全空間Xへの拡張可能性を述べている．ここではXには位相構造が要求されていない点にも注意する．

○ **Zornの補題**

定義. 集合S上の二項関係$\preceq$がS上の**半順序**であるとは，以下の条件を満たすことである．

1. 任意の$a \in S$に対して$a \preceq a$が成り立つ（**反射律**）;
2. $a \preceq b$かつ$b \preceq a$なら$a = b$が成り立つ（**反対称律**）;
3. $a \preceq b$かつ$b \preceq c$なら$a \preceq c$が成り立つ（**推移律**）．

このとき，組$(S, \preceq)$または単にSを**半順序集合**と呼ぶ．

定義. Sを半順序集合とする．

1. $S_0 \subset S$が**全順序部分集合**であるとは，
$$\forall a, b \in S_0 \quad (a \preceq b \text{ または } b \preceq a)$$
が成り立つことである．
2. $b \in S$が$S_0 \subset S$の**上界**であるとは，
$$\forall a \in S_0 \quad a \preceq b$$
が成り立つことである．
3. $c \in S$がSの**極大元**であるとは，
$$(a \in S \text{ かつ } c \preceq a) \quad \Rightarrow \quad a = c$$
が成り立つことである．

定理 5.5 (Zornの補題). Sを半順序集合とする．Sの任意の全順序部分集合がS内に上界を持つならば，Sは極大元を持つ．

証明. 省略する． □

定理 5.4の証明. *Step 1.* まずFの候補を選出する．そのために，

$$\mathcal{S} = \Big\{ F\colon M \to \mathbb{R};\ L \subset M \subset X \text{ は部分空間，} F \text{ は } M \text{ 上の線形汎関数で} \\ F(x) = f(x) \text{ for } x \in L \text{ かつ } F(x) \le p(x) \text{ for } x \in M \Big\}$$

とおく．$f \in \mathcal{S}$より$\mathcal{S} \neq \emptyset$であることに注意する．$\mathcal{S}$に属する2つの汎関数

$$F\colon M \to \mathbb{R}, \quad F'\colon M' \to \mathbb{R}$$

に対して

$$F \preceq F' \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad M \subset M' \text{ かつ } F = F'|_M$$

と定義すると，$(\mathcal{S}, \preceq)$は半順序集合である．

さてZornの補題を適用するために，任意の全順序部分集合$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$が$\mathcal{S}$に上界を持つことを示そう．$\mathcal{S}_0 = \{F_\lambda \colon M_\lambda \to \mathbb{R}\}_{\lambda\in\Lambda}$のように添え字付けて，

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

とおくと，$M \subset X$は部分空間である（**問**とする）．また，任意の$x\in M$に対しある$\lambda\in\Lambda$で$x \in M_\lambda$となるものを一つ選んで，

$$F(x) = F_\lambda(x)$$

とおくと，これはwell-definedな$\mathbb{R}$線形汎関数$F\colon M\to\mathbb{R}$を定める（**問**とする）．集合$\mathcal{S}$とFの構成の仕方から，明らかに

$$F(x) = f(x) \text{ for } x\in L, \quad F(x)\le p(x) \text{ for } x \in M$$

が成り立ち，よって$F\in\mathcal{S}$である．また，その構成の仕方からFが$\mathcal{S}_0$の上界となっていることも分かる．

よってZornの補題により，$\mathcal{S}$は極大元を持つ．以降，極大元$F\in\mathcal{S}$を一つ取って固定する．

Step 2. Fの定義域がXに一致することを示す．Fの定義域をMとして，$M = X$を示せばよい．今，$M \neq X$と仮定し，$z \in X\setminus M$を一つ固定して，

$$\widetilde{M} = \left\{ y + tz \in X;\ y\in M,\ t\in\mathbb{R} \right\}$$

とおく．ここで任意の$x\in\widetilde{M}$に対し，表示

$$x = y + tz, \quad y\in M,\ t\in\mathbb{R}$$

は一意的であることに注意する．実際，これは

$$x = y + tz = y' + t'z, \quad y, y' \in M,\ t, t' \in \mathbb{R},$$

とすると，

$$y - y' = (t' - t)z \in M \cap \Big[(X\setminus M) \cup \{0\} \Big]$$

となることからわかる．さて，実数$c\in\mathbb{R}$を任意に固定して，$\widetilde{F}\colon \widetilde{M}\to\mathbb{R}$を

$$\widetilde{F}(x) = F(y) + ct, \quad x = y + tz \in \widetilde{M}$$

で定義しよう．$\widetilde{F}$が$\widetilde{M}$上の$\mathbb{R}$線形汎関数であることの確認は容易である．

定義より$\widetilde{F}$がFの拡張となることは自明なので，$c\in\mathbb{R}$を適当に選んで

$$\widetilde{F}(x) \le p(x) \text{ for } x \in \widetilde{M} \tag{$\diamondsuit$}$$

とできることを示す．そのために，まず，ある$c\in\mathbb{R}$に対して

$$\begin{aligned} F(y) + c &\le p(y+z) \text{ for } y\in M \\ F(y') - c &\le p(y'-z) \text{ for } y'\in M \end{aligned}$$

となることを示す．実際，任意の$y, y'\in M$に対して

$$\begin{aligned} F(y) + F(y') = F(y+y') &\le p(y+y') \\ &\le p(y+z) + p(y'-z) \end{aligned}$$

であるから，$F(y') - p(y'-z) \le p(y+z) - F(y)$であり，よって

$$\sup_{y'\in M}\Big[F(y') - p(y'-z) \Big] \le c \le \inf_{y\in M}\Big[p(y+z) - F(y) \Big]$$

を満たす$c\in\mathbb{R}$が取れる．この$c\in\mathbb{R}$に対し，以下のように$(\diamondsuit)$を示せる：

$t > 0$のとき，

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y+tz) = F(y) + ct &= t[F(t^{-1}y) + c] \\ &\le tp(t^{-1}y + z) = p(y+tz) = p(x); \end{aligned}$$

$t < 0$のとき，

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y+tz) = F(y) + ct &= -t[F(-t^{-1}y) - c] \\ &\le -tp(-t^{-1}y - z) = p(y+tz) = p(x); \end{aligned}$$

$t = 0$のとき，

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y) = F(y) \le p(y) = p(x).$$

以上により$\widetilde{F}\in\mathcal{S}$，$F \preceq \widetilde{F}$，$F \neq \widetilde{F}$となるが，これは$F$の極大性に反する．よって$M = X$である． □

○ **複素数版**

定義. X を $\mathbb{C}$ 線形空間とする．汎関数 $p\colon X \to \mathbb{R}$ が**半ノルム**であるとは，以下の条件を満たすことである．

1. 任意の $c \in \mathbb{C}$ と $x \in X$ に対し $p(cx) = |c|p(x)$ が成り立つ（**絶対斉次性**）；
2. 任意の $x, y \in X$ に対し $p(x+y) \le p(x)+p(y)$ が成り立つ（**劣加法性**）．

問. $\mathbb{C}$ 線形空間上の半ノルムは自動的に非負値となることを示せ．

定理 5.6（Hahn–Banachの定理，複素数版）. X を $\mathbb{C}$ 線形空間，$L \subset X$ を部分空間とし，$p\colon X \to \mathbb{R}$ を半ノルムとする．もし $\mathbb{C}$ 線形汎関数 $f\colon L \to \mathbb{C}$ が

$$|f(x)| \le p(x) \text{ for } x \in L$$

を満たせば，ある $\mathbb{C}$ 線形汎関数 $F\colon X \to \mathbb{C}$ が存在して

$$F(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad |F(x)| \le p(x) \text{ for } x \in X$$

が成り立つ．

注意. ここでも X には位相構造を要求しない．

証明. $g = \mathrm{Re}\, f$ は $L \subset X$ を $\mathbb{R}$ 線形空間と見たときの $\mathbb{R}$ 線形汎関数で，

$$g(x) \le p(x) \text{ for } x \in L$$

を満たす．すると定理 5.4 より，X 上の $\mathbb{R}$ 線形汎関数 G で

$$G(x) = g(x) \text{ for } x \in L, \quad G(x) \le p(x) \text{ for } x \in X$$

を満たすものが存在する．今，$f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}f(x)$ より

$$f(x) = g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x), \quad x \in L,$$

となることに注意すると，

$$F(x) = G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x), \quad x \in X,$$

が求める汎関数となっている．実際，F が f の拡張であることは明らかである．

また，F は明らかに $\mathbb{R}$ 線形であるが，さらに

$$\begin{aligned}F((a+\mathrm{i}b)x) &= aF(x) + bF(\mathrm{i}x)\\ &= a\big(G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x)\big) + b\big(G(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}G(-x)\big)\\ &= (a+\mathrm{i}b)\big(G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x)\big)\\ &= (a+\mathrm{i}b)F(x)\end{aligned}$$

なので，結局 $\mathbb{C}$ 線形である．最後に，$x \in X$ に対して

$$F(x) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r \ge 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

と表示すると，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(x) = F(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)$ は実数なので，

$$|F(x)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(x) = F(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) = G(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) \le p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) = p(x)$$

が成り立つ． □

系 5.7. Xを$\mathbb{K}$ノルム空間，$L \subset X$を部分空間，$f \in L^*$とする．このとき$F \in X^*$で

$$F(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad \|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$$

を満たすものが存在する．

証明. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$のとき，$p(x) = \|f\|_{L^*}\|x\|$として定理 5.4を適用すると，$F \in X^*$で

$$F(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad F(x) \le \|f\|_{L^*}\|x\| \text{ for } x \in X$$

を満たすものが存在する．任意の$x \in X$に対して

$$-F(x) = F(-x) \le \|f\|_{L^*}\| - x\| = \|f\|_{L^*}\|x\|$$

も成り立つので，

$$|F(x)| \le \|f\|_{L^*}\|x\|$$

であり，結局

$$\|F\|_{X^*} \le \|f\|_{L^*}$$

を得る．一方，$x \in L$に対しては

$$|f(x)| = |F(x)| \le \|F\|_{X^*}\|x\|$$

なので，

$$\|f\|_{L^*} \le \|F\|_{X^*}$$

である．よって$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$となる．

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$のとき，$p(x) = \|f\|_{L^*}\|x\|$に対して定理 5.6を適用し，上と同じように議論すればよい（**問**とする）． □

系 5.8. Xを$\mathbb{K}$ノルム空間とする．任意の$x_0 \in X \setminus \{0\}$に対して，ある$F \in X^*$で

$$F(x_0) = \|x_0\|, \quad \|F\|_{X^*} = 1$$

を満たすものが存在する．

注意. 特に，$x \in X$が任意の$f \in X^*$に対し$f(x) = 0$を満たせば，$x = 0$である．

証明. 部分空間$L = \{tx_0 \in X;\ t \in \mathbb{K}\}$上の汎関数$f$を

$$f(x) = f(tx_0) = t\|x_0\|, \quad x = tx_0 \in L$$

で定義する．明らかにfはL上$\mathbb{K}$線形で，さらに

$$|f(x)| = |f(tx_0)| = |t|\|x_0\| = \|x\|, \quad x = tx_0 \in L,$$

なので，$f \in L^*$かつ$\|f\|_{L^*} = 1$である．あとは系 5.7を用いればよい． □

系 5.9. Xを$\mathbb{K}$ノルム空間，$L \subset X$を部分空間とし，$x_0 \in X \setminus L$とする．

$$d = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| > 0$$

なら，ある$F \in X^*$で次を満たすものが存在する：

$$F(x_0) = 1, \quad F(y) = 0 \text{ for } y \in L, \quad \|F\| \le d^{-1}.$$

証明. 部分空間$\widetilde{L} = \{tx_0 + y \in X;\ t \in \mathbb{K},\ y \in L\}$に対して，

$$f(x) = f(tx_0 + y) = t, \quad x = tx_0 + y \in \widetilde{L}$$

と定義すると，これは$\widetilde{L}$上$\mathbb{K}$線形で

$$f(x_0) = 1, \quad f(y) = 0 \text{ for } y \in L,$$

を満たす．さらに，$x = tx_0 + y$，$t \ne 0$，に対して

$$|f(x)| = |t|\|x\| \big/ \|tx_0 + y\| = \|x\| \big/ \|x_0 + t^{-1}y\| \le \|x\| \big/ d$$

なので，$f \in \widetilde{L}^*$，$\|f\|_{\widetilde{L}^*} \le d^{-1}$である．あとは系 5.7を用いればよい． □

§ 5.3 分離定理

定義. X をノルム空間とする.

1. $K \subset X$ が**凸**であるとは, 任意の $x, y \in K$ と $t \in [0,1]$ に対し
$$tx + (1-t)y \in K$$
が成り立つことである.

2. $K, K' \subset X$ が $f \in X^* \setminus \{0\}$ により**分離される**とは, 任意の $x \in K$ と $x' \in K'$ に対し
$$\operatorname{Re} f(x) \leq \operatorname{Re} f(x') \qquad (\diamondsuit)$$
が成り立つことである.

注意. K, K' が $f \in X^* \setminus \{0\}$ により分離されるとき, 特に, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して
$$\operatorname{Re} f \leq c \quad \text{on } K, \qquad \operatorname{Re} f \geq c \quad \text{on } K'. \qquad (\clubsuit)$$
が成り立つ. 実際, $(\diamondsuit)$ の左辺の上限, 右辺の下限を取れば
$$\sup_{x \in K} \operatorname{Re} f(x) \leq \inf_{x' \in K'} \operatorname{Re} f(x')$$
となるので, $c \in \mathbb{R}$ を
$$\sup_{x \in K} \operatorname{Re} f(x) \leq c \leq \inf_{x' \in K'} \operatorname{Re} f(x')$$
となるように選べば, $(\clubsuit)$ が成り立つ. なお, $(\clubsuit)$ は幾何的には K, K' が X 内の**超平面**
$$\{x \in X;\ \operatorname{Re} f(x) = c\}$$
により分離されることを意味する.

定理 5.10 (分離定理). X をノルム空間, $K_1, K_2 \subset X$ を凸部分集合とし,
$$K_1^\circ \neq \emptyset, \quad K_1^\circ \cap K_2 = \emptyset$$
とする. このとき, ある $f \in X^* \setminus \{0\}$ が存在して, f は K_1 と K_2 を分離する.

注意. 一般に, 任意の $S \subset X$ に対し, その内点全体の集合を S° で表す.

定義. X をノルム空間とし, $K \subset X$ は凸部分集合で, $0 \in K^\circ$ とする. このとき, K の**サポート関数**（**Minkowski汎関数**）$p_K \colon X \to [0, \infty]$ を, 任意の $x \in X$ に対し
$$p_K(x) = \inf\left\{\lambda > 0;\ \lambda^{-1} x \in K\right\}$$
で定める.

命題 5.11. 上のサポート関数 p_K は以下を満たす：

1. 任意の $x \in X$ に対して $0 \leq p_K(x) < \infty$ が成り立つ.
2. 任意の $\lambda \geq 0$ と $x \in X$ に対して $p_K(\lambda x) = \lambda p_K(x)$ が成り立つ.
3. 任意の $x, y \in X$ に対して $p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y)$ が成り立つ.
4. ある $C > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対し $p_K(x) \leq C\|x\|$ が成り立つ.
5. $K^\circ = \{x \in X;\ p_K(x) < 1\}$ が成り立つ.
6. $\overline{K} = \{x \in X;\ p_K(x) \leq 1\}$ が成り立つ.

特に, X を $\mathbb{R}$ 線形空間と見たとき, p_K は非負値かつ劣線形であり, さらに p_K は X 上で連続である.

証明. *1.* $p_K(0)=0$であることは定義からすぐに分かるので，あとは任意の$x\in X\setminus\{0\}$に対し$p_K(x)<\infty$であることを示せばよい．仮定$0\in K^\circ$より，ある$\epsilon>0$に対し$B(0,\epsilon)\subset K$が成り立つことに注意する．このとき，$\epsilon(2\|x\|)^{-1}x\in B(0,\epsilon)\subset K$なので，

$$p_K(x)\le 2\epsilon^{-1}\|x\|<\infty$$

を得る．

2. $\lambda=0$のとき主張は明らかなので，$\lambda>0$としてよい．このとき，サポート関数の定義より

$$\begin{aligned}p_K(\lambda x)&=\inf\Big\{\mu>0;\ \mu^{-1}\lambda x\in K\Big\}\\&=\inf\Big\{\lambda\mu'>0;\ \mu'^{-1}x\in K\Big\}\\&=\lambda p_K(x)\end{aligned}$$

を得る．

3. 任意の$x,y\in X$に対し，$\lambda,\mu>0$を$\lambda^{-1}x,\mu^{-1}y\in K$のようにとると，$K$の凸性より

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(x+y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda^{-1}x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\mu^{-1}y\in K$$

なので，

$$p_K(x+y)\le\lambda+\mu$$

となる．上の不等式の右辺でλ,μについての下限をとれば，求める不等式が従う．

なお，p_Kが非負値かつ劣線形であることは，主張1–3から直接従う．

4. 主張1の証明と同様に，ある$\epsilon>0$が存在して$B(0,\epsilon)\subset K$が成り立つ．このとき，任意の$x\in X\setminus\{0\}$に対し，$\epsilon(2\|x\|)^{-1}x\in B(0,\epsilon)\subset K$であることから，

$$p_K(x)\le 2\epsilon^{-1}\|x\|$$

である．これは$x=0$の場合にも成り立つので，結局$C=2\epsilon^{-1}$とおけば，求める不等式が得られる．

なお，p_Kの連続性は，主張3および4により，任意の$x,y\in X$に対し

$$|p_K(x)-p_K(y)|\le\max\Big\{p_K(x-y),p_K(y-x)\Big\}\le C\|x-y\|$$

が成り立つことに注意すれば，すぐに分かる．

5. まず$x\in K^\circ$とする．このとき，xのある近傍$U\subset X$に対し$U\subset K$であり，さらにスカラー倍の連続性を用いると，ある$\epsilon>0$に対し$(1-\epsilon)^{-1}x\in U\subset K$となる．これは

$$p_K(x)\le 1-\epsilon<1$$

を意味する．

逆に，$x\in X$かつ$p_K(x)<1$とする．このとき，ある$\epsilon>0$が存在して$p_K(x)<1-\epsilon$が成り立つ．ここでp_Kの連続性を用いると，xのある近傍Uが存在して，任意の$y\in U$に対し

$$p_K(y)<1$$

が成り立つ．これはある$\lambda\in(0,1)$に対し$\lambda^{-1}y\in K$が成り立つことを意味し，Kの凸性を用いると

$$y=(1-\lambda)0+\lambda(\lambda^{-1}y)\in K$$

となる．よって$U\subset K$であり，$x\in K^\circ$を得る．

6. $x \notin \overline{K}$，すなわち，$x \in (\overline{K})^c$ とする．このとき，$(\overline{K})^c$ が開集合であることとスカラー倍の連続性から，ある $\epsilon > 0$ に対して $(1+\epsilon)^{-1}x \in (\overline{K})^c$ が成り立つ．特に

$$(1+\epsilon)^{-1}x \notin K$$

であり，これは

$$p_K(x) \geq 1+\epsilon > 1$$

を意味する．実際，もし $p_K(x) < 1+\epsilon$ とすると，ある $\lambda \in (0, 1+\epsilon)$ に対し $\lambda^{-1}x \in K$ が成り立つが，ここで K の凸性を用いると，

$$(1+\epsilon)^{-1}x = (1-(1+\epsilon)^{-1}\lambda)0 + (1+\epsilon)^{-1}\lambda(\lambda^{-1}x) \in K$$

となって矛盾を生じる．

逆に，$x \in X$ かつ $p_K(x) > 1$ とする．このとき，ある $\epsilon > 0$ で

$$p_K(x) > 1+\epsilon$$

を満たすものがとれる．ここで p_K の連続性を用いると，x のある近傍 U が存在して，任意の $y \in U$ に対し

$$p_K(y) > 1$$

となる．これは $y \notin K$ を意味する．実際，$y \in K$ とすると，$1^{-1}y \in K$ より $p_K(y) \leq 1$ となってしまうからである．よって，$K \cap U = \emptyset$ であり，これは $x \notin \overline{K}$ を意味する．□

定理 5.10 の証明. 平行移動により，$0 \in K_1^\circ$ としてよい．また，任意の $x_0 \in K_2$ を固定して

$$K = x_0 + K_1 - K_2 = \left\{x_0 + x_1 - x_2 \in X;\ x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2\right\}$$

とおく．

Step 1. まず，K は凸集合である．実際，任意の $x, y \in K$ をとると，これらはある $x_1, y_1 \in K_1$ と $x_2, y_2 \in K_2$ を用いて

$$x = x_0 + x_1 - x_2, \quad y = x_0 + y_1 - y_2$$

の形に書ける．すると，K_1 と K_2 の凸性により，任意の $t \in [0,1]$ に対し

$$tx + (1-t)y = x_0 + \Big(tx_1 + (1-t)y_1\Big) - \Big(tx_2 + (1-t)y_2\Big) \in K$$

が成り立つ．

Step 2. 次に $0 \in K^\circ$ を示す．実際，仮定により，ある $\epsilon > 0$ が存在して $B(0,\epsilon) \subset K_1$ が成り立つ．すると，任意の $x \in B(0,\epsilon) \subset K_1$ に対し

$$x = x_0 + x - x_0 \in K$$

が成り立つ．

Step 3. さらに $x_0 \notin K^\circ$ である．実際，$x_0 \in K^\circ$ と仮定して矛盾を導こう．このとき，任意の $y \in K_2$ に対し十分小さな $\delta > 0$ をとれば $x_0 + \delta y \in K$ となるので，ある $x_1 \in K_1$ と $x_2 \in K_2$ が存在して

$$x_0 + \delta y = x_0 + x_1 - x_2$$

と書ける．すると，この等式と K_2 の凸性により

$$\frac{1}{1+\delta}x_1 = \frac{\delta}{1+\delta}y + \frac{1}{1+\delta}x_2 \in K_2$$

が分かる．あとは

$$\frac{1}{1+\delta}x_1 \in K_1^\circ \qquad (\heartsuit)$$

を示せれば，仮定 $K_1^\circ \cap K_2 = \emptyset$ に矛盾する．Step 2 と同様に，ある $\epsilon > 0$ を $B(0, \epsilon) \subset K_1$ となるようにとると，任意の $w \in B(0, \epsilon\delta/(1+\delta))$ に対し，K_1 の凸性から，

$$\frac{1}{1+\delta}x_1 + w = \frac{1}{1+\delta}x_1 + \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1+\delta}{\delta}w \in K_1$$

となる．これは確かに $(\heartsuit)$ を意味する．

Step 4. さて，Steps 1–3 を用いて定理の主張を証明しよう．Steps 1, 2 と命題 5.11 により，K のサポート関数 $p_K \colon X \to [0, \infty)$ は非負値かつ劣線形であることに注意する．今，$L = \{\lambda x_0 \in X;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ 上の $\mathbb{R}$ 線形汎関数

$$f \colon L \to \mathbb{R}$$

を任意の $y = \lambda x_0 \in L$ に対して

$$f(y) = \lambda p_K(x_0)$$

で定めれば，

$$f \le p_K \quad \text{on } L$$

が容易に分かる．すると定理 5.4 より，ある $\mathbb{R}$ 線形汎関数 $F_1 \colon X \to \mathbb{R}$ が存在して

$$F_1 = f \quad \text{on } L, \qquad F_1 \le p_K \quad \text{on } X$$

が成り立つ．命題 5.11.4 より F_1 は X 上で連続であることも分かる．

さて，$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に応じてそれぞれ

$$F = F_1,\ F_1 - \mathrm{i}F_1(\mathrm{i}\,\cdot)$$

と定めると，F は X 上の連続な $\mathbb{K}$ 線形汎関数となることが分かる（**問**とする）．また，任意の $x \in K$ に対し，命題 5.11 と Step 3 を用いると，

$$\mathrm{Re}\, F(x) = F_1(x) \le p_K(x) \le 1 \le p_K(x_0) = F_1(x_0)$$

が成り立つ．したがって，任意の $x_1 \in K_1$ および $x_2 \in K_2$ に対し，上の不等式を $x = x_0 + x_1 - x_2 \in K$ において適用すると，

$$\mathrm{Re}\, F(x_1) \le \mathrm{Re}\, F(x_2)$$

を得る．よって主張が示された．$\square$

§ 5.4 第２共役空間

定理 5.12. X を Banach 空間とする．$x \in X$ に対し，

$$\phi_x(f) = f(x), \qquad f \in X^*$$

と定義すると，$\phi_x \in X^{**} := (X^*)^*$ である．さらに，この対応

$$X \to X^{**}, \qquad x \mapsto \phi_x$$

は等長線形作用素を定める．

注意. 上の等長埋め込みを通じて $X \subset X^{**}$ とみなすことができる．

証明. $x \in X$とする．任意の$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$と$f, g \in X^*$に対して

$$\phi_x(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \phi_x(f) + \mu \phi_x(g)$$

なので，$\phi_x \colon X^* \to \mathbb{C}$は線形である．さらに任意の$f \in X^*$に対し

$$|\phi_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|_{X^*} \|x\|_X \tag{$\spadesuit$}$$

なので，$\phi_x \in X^{**}$を得る．

($\spadesuit$)から$\|\phi_x\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$が分かる．$\|\phi_x\|_{X^{**}} \ge \|x\|_X$を示そう．$x \ne 0$としてよい．Hahn–Banachの定理（の系）より，$f \in X^*$を適当に選んで，

$$f(x) = \|x\|_X, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

とできる．すると

$$\|x\|_X = |f(x)| = |\phi_x(f)| \le \|\phi_x\|_{X^{**}} \|f\|_{X^*} = \|\phi_x\|_{X^{**}}$$

が得られる． □

定義. Banach空間Xが$X^{**} = X$を満たすとき，Xは**反射的**であるという．

例. Hilbert空間は常に反射的である．

例. 任意の$p \in (1, \infty)$に対し$L^p(\Omega)$は反射的であるが，$L^1(\Omega)$と$L^\infty(\Omega)$は一般には反射的ではない．

§ 5.5 弱位相

定義. XをBanach空間とする．汎関数列$\{f_j\} \subset X^*$が$f \in X^*$に**汎弱収束**（**弱*収束**）するとは，任意の$x \in X$に対して

$$\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x)$$

が成り立つことである．このとき，fを$\{f_j\}$の**汎弱極限**（**弱*極限**）と呼び，

$$f_j \xrightarrow{\mathrm{w}^*} f, \quad f_j \overset{*}{\rightharpoonup} f, \quad \mathrm{w}^*\text{-}\lim_{j \to \infty} f_j = f$$

などで表す．

問. 1. 汎弱極限の一意性を示せ．

2. $\{f_j\} \in X^*$が$f \in X^*$にX^*のノルムで収束することと汎弱収束することとの違いを言葉で説明し，両者の強弱関係について述べよ．

注意. 作用素に対しては上のような収束は**強収束**と呼ばれる．

定理 5.13. XをBanach空間とする．X^*の任意の汎弱収束列は有界列である．さらに，$\{f_j\} \subset X^*$が$f \in X^*$に汎弱収束するなら，

$$\|f\| \le \liminf_{j \to \infty} \|f_j\|$$

が成り立つ．

証明. 定理の主張は一様有界性原理とBanach–Steinhausの定理の言いかえに他ならない． □

定理 5.14. XをBanach空間とし，$\{f_j\} \subset X^*$とする．任意の$x \in X$に対し$f_j(x)$が収束するなら，$\{f_j\}$は汎弱収束する．

証明. Banach–Steinhausの定理と汎弱収束の定義から明らかである． □

注意. 定理 5.14はX^*の汎弱位相に関する完備性に相当する．

定理 5.15. Xを可分Banach空間とする．任意の有界列$\{f_j\} \subset X^*$は汎弱収束部分列を持つ．

証明. $\{x_k\} \subset X$を稠密な可算部分集合とする．まず$\{f_j(x_1)\} \subset \mathbb{C}$は有界列なので，ある部分列$\{f_{1,j}\} \subset \{f_j\}$が存在して$\{f_{1,j}(x_1)\}$は収束する．次に$\{f_{1,j}(x_2)\} \subset \mathbb{C}$も有界列なので，ある部分列$\{f_{2,j}\} \subset \{f_{1,j}\}$が存在して$\{f_{2,j}(x_2)\}$は収束する．以下，帰納的に$\{f_{n,j}\}$を構成する．

すると$\{f_{n,n}\}$は汎弱収束する．実際，任意の$x \in X$に対して

$$\begin{aligned}
&|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \\
&\le |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_k)| + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)| \\
&\quad + |f_{m,m}(x_k) - f_{m,m}(x)| \\
&\le 2(\sup \|f_{n,n}\|)\|x - x_k\| + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)|
\end{aligned}$$

なので，$\{f_{n,n}(x)\}$はCauchy列であり，よって収束する．あとは定理 5.14を用いればよい． □

定理 5.16 (Banach–Alaoglu). XをBanach空間とする．X^*の閉単位球は汎弱コンパクトである．

注意. コンパクトと点列コンパクトは一般には異なる性質である．

証明. 以下，X^*の閉単位球をBとする．単射

$$\iota \colon X^* \hookrightarrow \mathbb{C}^X, \quad f \mapsto (f(x))_{x \in X}$$

を通して，X^*をその像$\iota(X^*)$と同一視する．X^*の汎弱位相は直積位相空間$\mathbb{C}^X$ の部分空間としての位相に一致することに注意する．包含関係

$$\iota(B) \subset I := \{(z_x) \in \mathbb{C}^X;\ |z_x| \le \|x\|\}$$

とIのコンパクト性（Tychonoffの定理）より，あとは$\iota(B)$がIの閉部分集合であることを示せばよい．

$f = (f(x))_{x \in X} \in \overline{\iota(B)} \subset I$とする．まず$f$の線形性を確かめる．任意の$x, y \in X$をとる．直積位相と閉包の定義より，任意の$\epsilon > 0$に対し，ある$g \in \iota(B)$が存在して

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon, \quad |f(y) - g(y)| < \epsilon, \quad |f(x+y) - g(x+y)| < \epsilon$$

とできる．すると

$$\begin{aligned}
|f(x) + f(y) - f(x+y)| &= |f(x) - g(x)| + |f(y) - g(y)| \\
&\quad + |f(x+y) - g(x+y)| \\
&< 3\epsilon
\end{aligned}$$

なので，結局$f(x+y) = f(x) + f(y)$が分かる．同様に任意の$\alpha \in \mathbb{C}$と$x \in X$に対し$f(\alpha x) = \alpha f(x)$となることも分かり，$f$の線形性が示された．

また$f \in I$から$\|f\| \le 1$も明らかであり，よって$f \in \iota(B)$である．

以上により$\iota(B) \subset I$は閉集合であることが分かった． □

定義. XをBanach空間とする．点列$\{x_j\} \subset X$が$x \in X$に**弱収束**するとは，任意の$f \in X^*$に対して

$$\lim_{j \to \infty} f(x_j) = f(x)$$

が成り立つことである．このとき，xを$\{x_j\}$の**弱極限**と呼び，

$$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x, \quad x_j \rightharpoonup x, \quad \operatorname*{w\text{-}lim}_{j \to \infty} x_j = x$$

などで表す．弱収束との対比のために，通常の収束を**強収束**と呼び，

$$x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x, \quad \operatorname*{s\text{-}lim}_{j \to \infty} x_j = x$$

などで表すことがある．

問. $x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x$ならば，$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x$であることを示せ．

命題 5.17. $\{x_j\} \subset X$ が弱収束していれば，弱極限は一意的である．

証明. いま，

$$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x, \qquad x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x'$$

と仮定する．もし $x \neq x'$ なら，Hahn–Banach の定理（の系）より，ある $f \in X^*$ が存在して

$$f(x-x') = \|x-x'\| \neq 0, \quad \|f\| = 1$$

である．しかし

$$f(x-x') = f(x) - f(x') = \lim_{j\to\infty} f(x_j) - \lim_{j\to\infty} f(x_j) = 0$$

なので，これは矛盾である． □

例. 点列 $\{x_j\} \subset \ell^2$ を

$$x_j = (\delta_{jk})_k$$

により定めると，$\{x_j\}$ は $0 \in \ell^2$ に弱収束するが，強収束はしない．

証明. 任意の $f \in (\ell^2)^*$ をとる．Riesz の表現定理より，ある $y \in \ell^2$ が存在して $f = (\,\cdot\,, y)$ と書けるので，$j \to \infty$ のとき

$$f(x_j) = (x_j, y) = \overline{y}_j \to 0 = f(0) \qquad \therefore\ x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$$

である．しかし，任意の $j \neq l$ に対し

$$\|x_j - x_l\| = \sqrt{2}$$

なので，$\{x_j\}$ は Cauchy 列にはなり得ず，強収束しない． □

定理 5.18. 任意の弱収束列は有界列である．さらに，$\{x_j\} \subset X$ が $x \in X$ に弱収束するなら，

$$\|x\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|x_j\|$$

が成り立つ．

証明. $\phi_j, \phi \in X^{**}$ を各 $f \in X^*$ に対し

$$\phi_j(f) = f(x_j), \quad \phi(f) = f(x)$$

として定義する．任意の $f \in X^*$ に対し $\phi_j(f) \to \phi(f)$ なので，定理 5.12 と一様有界性原理（と Banach–Steinhaus の定理）により，

$$\sup \|x_j\| = \sup \|\phi_j\| < \infty$$

および

$$\|x\| = \|\phi\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|\phi_j\| = \liminf_{j\to\infty} \|x_j\|$$

を得る． □

定理 5.19. X を Hilbert 空間とし，$\{x_j\} \subset X$，$x \in X$ とする．$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ かつ $\|x_j\| \to \|x\|$ なら，$x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x$ である．

証明. $j \to \infty$ のとき，

$$\|x - x_j\|^2 = \|x\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x, x_j) \to 0$$

なので，確かに $x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x$ である． □

定理 5.20. Xを反射的Banach空間とし，$\{x_j\} \subset X$とする．任意の$f \in X^*$に対し$f(x_j)$が収束するなら，$\{x_j\}$は弱収束する．

証明. 埋め込み$X \subset X^{**}$による$x_j \in X$の像を$\phi_j \in X^{**}$とし，

$$\phi(f) = \lim_{j\to\infty} \phi_j(f) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) \quad \text{for } f \in X^*$$

と定義すると，Banach–Steinhausの定理より$\phi \in X^{**}$である．仮定より$X = X^{**}$なので，ある$x \in X$が存在して，任意の$f \in X^*$に対し

$$f(x) = \phi(f) = \lim_{j\to\infty} f(x_j)$$

である．これは$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x$を意味する． □

注意. これは反射的Banach空間の弱位相に関する完備性を意味する．

定理 5.21. 反射的Banach空間の任意の有界列はある弱収束部分列を含む．

補題 5.22. Xを反射的Banach空間，$L \subset X$を閉部分空間とする．LはXのノルムに関して反射的Banach空間となる．

証明. LがBanach空間となることは自明である．$\phi \in L^{**}$とする．任意の$f \in X^*$に対し，$f|_L \in L^*$，$\|f|_L\|_{L^*} \le \|f\|_{X^*}$であることに注意して，

$$\psi(f) = \phi(f|_L)$$

と定めると，$\psi \in X^{**}$となる．するとXは反射的なので，あるxが存在して

$$\phi(f|_L) = \psi(f) = f(x) \quad \text{for all } f \in X^* \qquad (\heartsuit)$$

と書ける．

ここで仮に$x \notin L$とすると，Hahn–Banachの定理（の系）により

$$\exists f \in X^* \quad \text{s.t.} \quad f|_L = 0,\ f(x) \neq 0$$

となるが，これは$(\heartsuit)$に矛盾する．よって$x \in L$である．すると$(\heartsuit)$より

$$\phi(f|_L) = f|_L(x) \quad \text{for all } f \in X^*$$

である．再びHahn–Banachの定理（の系）により，任意の$g \in L^*$はある$f \in X^*$を用いて$g = f|_L$の形に書けることに注意すると，

$$\phi(g) = g(x) \quad \text{for all } g \in L^*$$

が得られる． □

補題 5.23. XをBanach空間とする．X^*が可分ならXも可分である．

証明. $\{f_j\} \subset X^*$を稠密な可算部分集合とする．$\{x_j\} \subset X$を

$$|f_j(x_j)| \ge \|f_j\|/2, \quad \|x_j\| = 1$$

を満たすように選び，$L = \overline{\mathrm{span}\{x_j\}}$とおく．明らかに$L \subset X$は可分な閉部分空間である．いま，仮に$L \neq X$と仮定すると，Hahn–Banachの定理（の系）より，ある$f \in X^*$が存在して

$$f|_L = 0, \quad f \neq 0$$

である．しかしf_{j_n}を$\|f - f_{j_n}\| < 1/n$のようにとると

$$\|f_{j_n}\|/2 \le |f(x_{j_n}) - f_{j_n}(x_{j_n})| \le 1/n$$

なので，$f_{j_n} \to 0$となり，これは矛盾である．よって$L = X$である． □

定理 5.21の証明. Xを反射的Banach空間，$\{x_j\} \subset X$を有界列とし，

$$L = \overline{\mathrm{span}\{x_j\}}$$

とおく．補題 5.22よりLは反射的であり，よって$L^{**} = L$は可分である．すると補題 5.23よりL^*は可分なので，定理 5.15より$\{x_j\} \subset L^{**}$は汎弱収束部分列を持つ．汎弱収束と弱収束の定義より，これは$\{x_j\} \subset L$が弱収束部分列を持つことに他ならない． □

問. Banach空間Xの任意の有界列が強収束部分列を持つなら，Xは有限次元であることを示せ．

§ 5.6 共役作用素

定義. X, YをBanach空間，TをXからYへの作用素とし，$D(T) \subset X$は稠密とする．Y^*からX^*への作用素T^*を以下のように定義する：条件

$$\exists f \in X^* \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in D(T) \quad g(Tx) = f(x) \qquad (\diamondsuit)$$

を満たすような$g \in Y^*$の集合を$D(T^*)$とし，また任意の$g \in D(T^*)$に対し$(\diamondsuit)$を満たす$f \in X^*$をとって

$$T^*g = f$$

と定める．T^*をTの**共役作用素（双対作用素）**と呼ぶ．

注意. $g \in D(T^*)$とし，$f, f' \in X^*$が$(\diamondsuit)$を満たしているとする．任意の$x \in X$に対し，xに収束する列$\{x_j\} \subset D(T)$をとると，

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = \lim_{j\to\infty} g(Tx_j) = \lim_{j\to\infty} f'(x_j) = f'(x)$$

である．よって，$f = f'$であり，T^*はwell-definedである．

定義. TはHilbert空間XからYへの作用素で，$D(T) \subset X$は稠密とする．このとき，$y \in Y$で

$$\exists \xi \in X \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in D(T) \quad (Tx, y)_Y = (x, \xi)_X \qquad (\clubsuit)$$

を満たすものの集合を$D(T^*)$とし，また任意の$y \in D(T^*)$に対し$(\clubsuit)$を満たす$\xi \in X^*$をとって

$$T^*y = \xi$$

と定義する．T^*をTの**共役作用素**と呼ぶ．

注意. Banach空間では$(\alpha T)^* = \alpha T^*$，Hilbert空間では$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$であることに注意する．

例. Tを$\mathbb{C}^n$から$\mathbb{C}^m$への有界作用素とする．$\mathbb{C}^n$，$\mathbb{C}^m$の標準基底をそれぞれ$e_1, \ldots, e_n$，$f_1, \ldots, f_m$とし，

$$t_{ij} = (Te_j, f_i)$$

とおくと，Tは行列$(t_{ij})_{i,j}$，T^*は随伴行列$(\bar{t}_{ji})_{i,j}$で行列表示される．

証明. $y = Tx$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$ とすると，

$$y_i = (y, f_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (Te_j, f_i) = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

なので，Tは確かに$(t_{ij})_{i,j}$により行列表示される．同様に，

$$s_{ij} = (T^* f_j, e_i) = \overline{(Te_i, f_j)} = \bar{t}_{ji}$$

とおくと，T^*は$(s_{ij})_{i,j} = (\bar{t}_{ji})_{i,j}$により行列表示される． □

命題 5.24. T は X から Y への作用素で $D(T) \subset X$ は稠密とする．このとき，T^* は Y^* から X^* への閉作用素である．

証明. $g_j \in D(T^*)$，$g \in Y^*$，$f \in X^*$ で，$j \to \infty$ のとき

$$g_j \to g, \quad T^* g_j \to f$$

と仮定する．このとき，任意の $x \in X$ に対し

$$g_j(Tx) = (T^* g_j)(x)$$

であり，ここで $j \to \infty$ とすると

$$g(Tx) = f(x)$$

を得る．これは $g \in D(T^*)$，$T^* g = f$ を意味し，したがって T^* は閉作用素である． □

命題 5.25. T は X から Y への閉作用素で $D(T) \subset X$ は稠密とする．すると

$$T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$$

が成り立つ．さらに，このとき $\|T\| = \|T^*\|$ が成り立つ．

証明. まず $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ と仮定する．任意の $g \in Y^*$ に対し，$f := g(T\,\cdot\,)$ は X 上の線形汎関数であり，

$$\forall x \in X \ \ |f(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|\|T\|\|x\| \qquad \therefore\ f \in X^*$$

である．さらに定義から明らかに

$$\forall x \in X \quad g(Tx) = f(x)$$

なので，$g \in D(T^*)$ かつ $T^* g = f = g(T\,\cdot\,)$ がわかる．上の不等式より

$$\forall x \in X \ \ |(T^* g)(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|\|T\|\|x\| \qquad \therefore\ \|T^* g\| \le \|T\|\|g\|$$

なので，$T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ かつ $\|T^*\| \le \|T\|$ が得られる．

逆に $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ とする．任意の $x \in D(T)$ に対し，Hahn–Banach の定理により $g(Tx) = \|Tx\|$，$\|g\| = 1$ を満たす $g \in Y^*$ をとることで，

$$\|Tx\| = |g(Tx)| = |(T^* g)(x)| \le \|T^* g\|\|x\| \le \|T^*\|\|x\|$$

が得られる．この不等式と，T が閉作用素であることおよび $D(T) \subset X$ が稠密であることを合わせると，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ でなければならないことがわかる．すると，上の不等式から，さらに $\|T\| \le \|T^*\|$ もわかる． □

命題 5.26. 以下が成り立つ：

1. $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$ に対し，$(T + S)^* = T^* + S^*$;
2. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$(\lambda T)^* = \lambda T^*$ （※ Hilbert空間では $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$）;
3. $S \in \mathcal{B}(X, Y)$，$T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ に対し，$(TS)^* = S^* T^*$.

証明. ほぼ明らかなので証明は省略する． □

命題 5.27. T は X から Y への作用素で，$D(T) \subset X$ および $D(T^*) \subset Y^*$ はそれぞれ稠密であるとする．このとき，埋め込み $X \subset X^{**}$ および $Y \subset Y^{**}$ の下で T を X^{**} から Y^{**} への作用素とみなすと

$$T \subset T^{**}$$

が成り立つ．

証明. $x = \phi_x \in D(T) \subset X^{**}$ とする．このとき，任意の $g \in D(T^*)$ に対し

$$\phi_x(T^*g) = (T^*g)(x) = g(Tx) = \phi_{Tx}(g)$$

が成り立つので，

$$x = \phi_x \in D(T^{**}), \quad T^{**}x = T^{**}\phi_x = \phi_{Tx} = Tx$$

が従う． □

注意. 第２共役空間への埋め込みに関しては，定理 5.12を参照せよ．

定義. T は Hilbert 空間 X から X への作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．T が**対称作用素**であるとは

$$T \subset T^* \quad (\text{すなわち } D(T) \subset D(T^*) \text{ かつ } T^*|_{D(T)} = T)$$

が成り立つことである．また，T が**自己共役作用素**であるとは

$$T = T^*$$

が成り立つことである．

命題 5.28. T は Hilbert 空間 X 上の作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．T が対称であるためには,

$$\forall x, y \in D(T) \quad (Tx, y) = (x, Ty)$$

が成り立つことが必要十分である．

証明. 省略する（**問**とする）． □

§ 5.7 閉値域定理

定義. X を Banach 空間とする．部分集合 $L \subset X$，$M \subset X^*$ に対して

$$L^{\perp} = \{f \in X^*;\ \forall x \in L\ f(x) = 0\},$$
$${}^{\perp}M = \{x \in X;\ \forall f \in M\ f(x) = 0\}$$

とおく．

命題 5.29. T は Banach 空間 X から Y への閉作用素で $D(T) \subset X$ は稠密とする．このとき

$$\overline{R(T)} = {}^{\perp}N(T^*), \quad \overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$$

が成り立つ．

証明. $y = Tx \in R(T)$ とすると，任意の $g \in N(T^*)$ に対し

$$g(y) = g(Tx) = (T^*g)(x) = 0$$

なので，$y \in {}^{\perp}N(T^*)$ である．したがって，$R(T) \subset {}^{\perp}N(T^*)$ であり，結局 $\overline{R(T)} \subset {}^{\perp}N(T^*)$ を得る．

逆の包含関係を示そう．ある $y_0 \in {}^{\perp}N(T^*) \setminus \overline{R(T)}$ が存在したとすると，ある $g \in Y^*$ で

$$g(y_0) \neq 0, \quad \forall y \in \overline{R(T)} \quad g(y) = 0$$

を満たすものが存在する．後者は

$$\forall x \in D(T) \quad g(Tx) = 0$$

を意味し，したがって $T^*g = 0$，つまり $g \in N(T^*)$ である．すると $y_0 \in {}^{\perp}N(T^*)$ より $g(y_0) = 0$ であるが，これは仮定に矛盾する． □

問. $\overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$ を示せ．

定理 5.30 (閉値域定理). X, Y をBanach空間とし，T は X から Y への閉作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．以下の条件は互いに同値である：

1. $R(T) \subset Y$ は閉部分空間である；
2. $R(T^*) \subset X^*$ は閉部分空間である；
3. $R(T) = {}^{\perp}N(T^*)$ が成り立つ；
4. $R(T^*) = N(T)^{\perp}$ が成り立つ．

証明. 省略する．K. Yosida，"Functional Analysis" を参照せよ． □

第6章 レゾルベントとスペクトル

§ 6.1 レゾルベント

○ 定義と基本的性質

本章では常に，X を $\mathbb{C}$ 上のBanach空間とする．一般に X 上の閉作用素 T と $z \in \mathbb{C}$ に対し次の3つの場合がある：

1. $(z-T)^{-1}$ は存在しない．(すなわち $N(z-T) \neq \{0\}$ である．)
2. $(z-T)^{-1}$ は存在するが，$\mathcal{B}(X)$ には属さない．
3. $(z-T)^{-1}$ が存在し，$\mathcal{B}(X)$ に属する．

注意. X には線形構造の他に位相構造が入っているため，集合論的な逆写像の存在と同時に，その位相との関係（連続性）にも興味がある．

定義. Banach空間 X 上の閉作用素 T に対し，

$$\rho(T) = \left\{z \in \mathbb{C};\ \exists (z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\right\}, \quad \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

をそれぞれ T の**レゾルベント集合**，**スペクトル**と呼ぶ．$z \in \rho(T)$ に対し，

$$R(z) = R(z;T) = (z-T)^{-1}$$

を T の**レゾルベント**と呼ぶ．また，

$$\sigma_p(T) = \left\{z \in \mathbb{C};\ \exists x \in X \text{ s.t. } Tx = zx\right\} \subset \sigma(T),$$

を T の**点スペクトル**，$\sigma_p(T)$ の元を T の**固有値**と呼ぶ．さらに，$z \in \sigma_p(T)$ のとき，$N(z-T)$ の元を T の**固有ベクトル**，$N(z-T)$ を z に付随する T の**固有空間**，$\dim N(z-T)$ を z の**重複度**と呼ぶ．

定理 6.1 (レゾルベント方程式). T をBanach空間 X 上の閉作用素とする．任意の $z, w \in \rho(T)$ に対し，次の等式が成り立つ：

$$R(z) - R(w) = (w-z)R(z)R(w) = (w-z)R(w)R(z).$$

証明. $R(R(w)) \subset D(T)$ に注意して,

$$\begin{aligned} R(z) - R(w) &= R(z)(w-T)R(w) - R(z)(z-T)R(w) \\ &= (w-z)R(z)R(w). \end{aligned}$$

同様に，$R(R(z)) \subset D(T)$ に注意して,

$$\begin{aligned} R(z) - R(w) &= R(w)(w-T)R(z) - R(w)(z-T)R(z) \\ &= (w-z)R(z)R(w). \end{aligned}$$

よって主張は示された. □

注意. レゾルベント方程式は，形式的には,

$$\frac{1}{z-T} - \frac{1}{w-T} = \frac{w-z}{(z-T)(w-T)} = \frac{w-z}{(w-T)(z-T)}$$

とも書ける.

定理 6.2. $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ は開部分集合である．また $R(z)$ は $\rho(T)$ 上で正則であり，$R'(z) = -R(z)^2$ が成り立つ.

証明. $z \in \rho(T)$ とする．$|\zeta - z| < \|R(z)\|^{-1}$ を満たす任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対し $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\zeta - z)^n R(z)^{n+1}$ は $\mathcal{B}(X)$ でノルム収束しており,

$$\begin{aligned} &S(\zeta - T) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\zeta - z)^n R(z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\zeta - z)^{n+1} R(z)^{n+1} = 1, \\ &(\zeta - T)S \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\zeta - z)^n R(z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\zeta - z)^{n+1} R(z)^{n+1} = 1 \end{aligned}$$

より，$\zeta \in \rho(T)$，よって $\rho(T)$ は開である．さらに $S = R(\zeta)$ は $R(z)$ の Taylor展開を与えるので，正則性および $R'(z) = -R(z)^2$ も示される. □

○ **共役作用素のレゾルベント**

定理 6.3. T をBanach空間 X 上の閉作用素とし，$D(T)$ は X で稠密であるとする．このとき

$$\rho(T^*) = \rho(T), \quad R(z;T^*) = R(z;T)^*$$

が成り立つ.

注意. Hilbert空間であれば,

$$\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}, \quad R(z;T^*) = R(\overline{z};T)^*$$

が成り立つ.

証明. Step 1. $z \in \rho(T)$ とする．$(z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ が存在するので，$((z-T)^{-1})^* \in \mathcal{B}(X^*)$ が存在する．また $(z-T^*)^{-1}$ も存在する．実際，$g \in N(z-T^*)$ とすると，任意の $x \in X$ に対して

$$g((z-T)x) = ((z-T^*)g)(x) = 0$$

だが，$R(z-T) = Y$ なので，$g = 0$ でなければならない.

いま $f \in X^* = D(((z-T)^{-1})^*)$ とすると，任意の $x \in D(T)$ に対し

$$f(x) = f((z-T)^{-1}(z-T)x) = [((z-T)^{-1})^* f]((z-T)x)$$

なので，$((z-T)^{-1})^* f \in D(z-T^*)$ かつ

$$(z-T^*)((z-T)^{-1})^* f = f \tag{♠}$$

がわかる．これは $R(z-T^*) = X^*$ を意味し，したがって閉グラフ定理より，$(z-T^*)^{-1} \in \mathcal{B}(X^*)$ である．特に $z \in \rho(T^*)$ を得る．さらに (♠) の両辺に $(z-T^*)^{-1}$ をかけて，$((z-T)^{-1})^* = (z-T^*)^{-1}$ もわかる.

Step 2. $z \in \rho(T^*)$ とする．定義より $(z-T^*)^{-1} \in \mathcal{B}(X^*)$ が存在する．また $(z-T)^{-1}$ も存在する．実際，$x \in N(z-T)$ とすると，任意の $g \in D(T^*)$ に対して，

$$((z-T^*)g)(x) = g((z-T)x) = 0$$

であるが，いま $R(z-T^*) = X^*$ なので，これは $x=0$ を意味する．

$D((z-T)^{-1}) \subset Y$ は稠密であることに注意する．実際，$\overline{R(z-T)} \neq Y$ と仮定すると，Hahn–Banach の定理より，ある $g \in Y^* \setminus \{0\}$ が存在して

$$\forall x \in D(T) \quad g((z-T)x) = 0$$

である．しかし，これは $(z-T^*)g = 0$ を意味し，$g=0$ となって矛盾である．よって $((z-T)^{-1})^*$ が定義される．

いま $g \in D((z-T^*))$ とすると，任意の $y \in R(z-T)$ に対して，

$$g(y) = g((z-T)(z-T)^{-1}y) = [(z-T^*)g]((z-T)^{-1}y)$$

なので，$(z-T^*)g \in D(((z-T)^{-1})^*)$ かつ

$$((z-T)^{-1})^*(z-T^*)g = g \qquad (\heartsuit)$$

を得る．これから

$$X^* = R(z-T^*) \subset D(((z-T)^{-1})^*)$$

がわかり，閉グラフ定理より $((z-T)^{-1})^* \in \mathcal{B}(X^*)$ となる．命題 5.25 より $(z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ であり，特に $z \in \rho(T)$ である．さらに $(\heartsuit)$ から $((z-T)^{-1})^* = (z-T^*)^{-1}$ もわかる．□

○ スペクトル半径

命題 6.4. $T \in \mathcal{B}(X)$ とし，

$$r(T) = \limsup_{j\to\infty} \|T^j\|^{1/j} \geq 0$$

とおく.（これを T の**スペクトル半径**と呼ぶ.）

1. $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > r(T)\} \subset \rho(T)$ であり，$|z| > r(T)$ に対し

$$R(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} T^j \qquad (\spadesuit)$$

   が成り立つ.

2. $\sigma(T) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r(T)\} \neq \emptyset$ である.

注意. 特に $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \|T\|\}$ である.

証明. $|z| > r(T)$ とし，$\epsilon > 0$ を $|z| - \epsilon > r(T)$ ととる．このとき N を十分大きくとると，任意の $j \geq N$ に対して $|z| - \epsilon > \|T^j\|^{1/j}$ なので，

$$\sum_{j=N}^{\infty} |z|^{-j-1}\|T^j\| \leq |z|^{-1} \sum_{j=N}^{\infty} \Big[(z-\epsilon)/|z|\Big]^j < \infty$$

である．よって $S = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}T^j$ は $\mathcal{B}(X)$ の位相で絶対収束する．定理 6.2 の証明と同様にして $z \in \rho(T)$ および $S = R(z)$ が示される．

次に $\sigma(T) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r(T)\} = \emptyset$ と仮定する．$\sigma(T)$ は閉集合であるから，ある $\epsilon > 0$ が存在して

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r(T) - \epsilon\} \subset \rho(T)$$

となる．特に $R(z)$ は D において Laurent 級数で表され，それは $(\spadesuit)$ で与えられる．しかし複素関数論の議論と同様にして，$(\spadesuit)$ は $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < r(T)\}$ では収束しないので，これは矛盾である．□

§ 6.2 自己共役作用素のスペクトル

T をHilbert空間 X 上の対称作用素とする．このとき，任意の $x \in X$ に対し $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ であることに注意する．実際，これは

$$\overline{(Tx, x)} = (x, Tx) = (Tx, x)$$

であることからわかる．ある $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in D(T)$ に対し

$$(Tx, x) \geq \gamma \|x\|^2$$

が成り立つとき，T は**下に半有界**であるといい，これを $T \geq \gamma$ のように書く．

定理 6.5. T をHilbert空間 X 上の自己共役作用素とする．このとき，

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$$

が成り立つ．また，さらに $T \geq \gamma$ であれば，

$$\sigma(T) \subset [\gamma, \infty)$$

が成り立つ．

証明. $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とする．任意の $x \in D(T)$ に対し，

$$\|(z-T)x\|^2 = |\operatorname{Im} z|^2\|x\|^2 + \|(\operatorname{Re} z - T)x\|^2 \geq |\operatorname{Im} z|^2\|x\|^2$$

であることから，

$$\|(z-T)x\| \geq |\operatorname{Im} z|\|x\| \qquad (\clubsuit)$$

が成り立つことに注意する．これより $z-T$ は単射であり，$(z-T)^{-1}$ が存在することがわかる．

あとは $R(z-T) = X$ を示せれば，閉グラフ定理より $z \in \rho(T)$ が従う．($\clubsuit$) と T が閉作用素であることから，まず $R(z-T) \subset X$ は閉部分空間である．$x \in R(z-T)^\perp$ とすると

$$\forall y \in D(T) \quad ((z-T)y, x) = 0 = (y, 0)$$

であり，これは

$$x \in D(T^*) = D(T), \quad (z-T^*)x = (z-T)x = 0$$

を意味する．$z-T$ は単射なので $x = 0$ となり，$R(z-T) = X$ を得る．

$T \geq \gamma$ の場合についても同様に証明できる．□

問. $T \geq \gamma$ の場合に対する主張の証明を与えよ.（上の議論では省略されている証明の細部も埋めよ）.

命題 6.6. T をHilbert空間 X 上の自己共役作用素とする．任意の相異なる固有値 $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ に対し

$$N(\lambda - T) \perp N(\mu - T)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $x \in N(\lambda - T)$, $y \in N(\mu - T)$ に対し，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に注意すると

$$\lambda(x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = \overline{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$$

なので，

$$(\lambda - \mu)(x, y) = 0$$

である．$\lambda \neq \mu$ なので，$(x, y) = 0$ を得る．□

注意. 対称作用素でも成立する．

第7章 コンパクト作用素

§ 7.1 定義と基本的性質

定義. X, Y をBanach空間とし，T を X から Y への線形作用素とする．T が**コンパクト**（または**完全連続**）であるとは，$D(T) = X$ かつ任意の有界列 $\{x_j\} \subset X$ に対し $\{Tx_j\} \subset Y$ が収束部分列を持つことである．X から Y へのコンパクト作用素全体の集合を $\mathcal{B}_c(X, Y)$ で表す．

命題 7.1. $\mathcal{B}_c(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ である．

証明. $T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$ とする．T が有界でないとすると，点列 $\{x_j\} \subset X$ で

$$\|x_j\| = 1, \quad \|Tx_j\| \to \infty \ (j \to \infty)$$

を満たすものが存在する．しかし，このとき明らかに $\{Tx_j\} \subset Y$ からは収束部分列をとれず，これは矛盾である． □

定理 7.2. コンパクト作用素は弱収束列を強収束列にうつす．

証明. $x_j \overset{\mathrm{w}}{\to} x$ とする．まず $Tx_j \overset{\mathrm{w}}{\to} Tx$ であることに注意しておく．実際，任意の $f \in Y^*$ に対して，

$$f(Tx_j) = (T^*f)(x_j) \to (T^*f)(x) = f(Tx)$$

である．

いま，もし $Tx_j \not\to Tx$ であるなら，ある $\epsilon > 0$ と部分列 $\{x_{j'}\} \subset \{x_j\}$ で

$$\|Tx - Tx_{j'}\| > \epsilon \qquad (\clubsuit)$$

を満たすものがとれる．$\{x_{j'}\}$ は弱収束することから特に有界列であり，仮定により，部分列 $\{x_{j''}\} \subset \{x_{j'}\}$ で $\{Tx_{j''}\}$ が強収束するものがとれる．しかし，

$$\lim_{j'' \to \infty} Tx_{j''} = \operatorname*{w-lim}_{j'' \to \infty} Tx_{j''} = Tx$$

なので，これは $(\clubsuit)$ に矛盾する． □

定理 7.3. $\mathcal{B}_c(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ は閉部分空間である．

証明. $T, S \in \mathcal{B}_c(X, Y)$，$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ とし，$\{x_j\} \subset X$ を任意の有界列とする．このとき定義より，$\{x_j\}$ のある部分列 $\{x_{1,j}\}$ が存在して $\{Tx_{1,j}\}$ は収束する．さらに再び定義より，$\{x_{1,j}\}$ のある部分列 $\{x_{2,j}\}$ が存在して $\{Sx_{2,j}\}$ は収束する．明らかに $\{(\lambda T + \mu S)x_{2,j}\}$ は収束するので，$\lambda T + \mu S \in \mathcal{B}_c(X, Y)$ を得る．

次に$\{T_j\} \subset \mathcal{B}_c(X,Y)$を$\mathcal{B}(X,Y)$の収束列とし，その収束先を$T$とする．$\{x_j\} \subset X$を有界列とする．$\{x_j\}$のある部分列$\{x_{1,j}\}$が存在して$\{T_1 x_{1,j}\}$は収束する．さらに$\{x_{1,j}\}$のある部分列$\{x_{2,j}\}$が存在して$\{T_2 x_{2,j}\}$は収束する．以下，これを繰り返して$\{x_{k,j}\}$を構成し，$y_j = x_{j,j}$とおく．するとこのとき$\{Ty_j\}$は収束する．実際

$$\begin{aligned}\|Ty_j - Ty_k\| &\le \|Ty_j - T_l y_j\| + \|T_l y_j - T_l y_k\| + \|T_l y_k - Ty_k\| \\ &\le 2\|T - T_l\| \sup_j \|y_j\| + \|T_l y_j - T_l y_k\|\end{aligned}$$

が成り立つので，任意の$\epsilon > 0$に対し，まずlを大きくとって固定し，続いてj,kを大きくとると

$$\|Ty_j - Ty_k\| < \epsilon$$

とできる．ゆえに$T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$である． □

定理 7.4. $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}(Y,Z)$なら，$ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$である．また，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}_c(Y,Z)$なら，$ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$である．

証明. まず$T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}(Y,Z)$とし，$\{x_j\} \subset X$を有界列とする．このとき，$\{Tx_j\}$は収束部分列を持ち，Sは連続なので，$\{STx_j\}$も収束部分列を持つ．よって$ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$である．

次に$T \in \mathcal{B}(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}_c(Y,Z)$とし，再び$\{x_j\} \subset X$を有界列とする．このとき，$\{Tx_j\}$は有界列なので，Sのコンパクト性から$\{STx_j\}$は収束部分列を持つ．よって$ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$である． □

注意. 定理 7.3, 7.4 より特に$\mathcal{B}_c(X) \subset \mathcal{B}(X)$は閉両側イデアルである．

定理 7.5 (Schauder). $T \in \mathcal{B}(X,Y)$とする．このとき，$T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$であるための必要十分条件は$T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$である．

補題 7.6. $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$ならば，$TX \subset Y$は可分部分空間である．

証明. $B = \{x \in X;\ \|x\| \le 1\}$として，$TB \subset Y$が可分なことを示せばよい．

いま，

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \text{有限集合} F_\epsilon \subset TB \quad \text{s.t.} \quad \forall y \in TB \quad \mathrm{dist}(y, F_\epsilon) < \epsilon$$

が成り立つこと注意する．実際，そうでないとすると，

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \text{有限集合} F \subset TB \quad \exists y \in TB \quad \mathrm{dist}(y, F) \ge \epsilon$$

である．このとき，$y_1 \in TB$を任意に固定し，以下，$y_j \in TB$を順次

$$\begin{aligned}&\exists y_2 \in TB \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{dist}(y_2, y_1) \ge \epsilon, \\ &\exists y_3 \in TB \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{dist}(y_3, \{y_1, y_2\}) \ge \epsilon, \\ &\ldots\end{aligned}$$

のように選ぶことができる．すると，その選び方から$\{y_j\}$は収束部分列を持たないが，これはTのコンパクト性に矛盾する．

上の主張を用いて，

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$$

ととれば，$G \subset TB$は可算かつ稠密である． □

定理 7.5の証明．（必要性）　$T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$とし，$\{g_j\} \subset Y^*$を任意の有界列とする．まずT^*g_jは汎弱収束部分列を持つことを示す．補題 7.6より$Z := \overline{TX} \subset Y$は可分閉部分空間であり，$\{g_j|_Z\} \subset Z^*$は有界列なので，定理 5.15よりある部分列$\{g_{j'}|_Z\}$は$Z^*$内で汎弱極限$h$を持つ．この$h$をHahn–Banachの定理により$Y$上全体に拡張したものを$g$とすれば，

$$\forall x \in X \quad g_{j'}(Tx) = g_{j'}|_Z(Tx) \to h(Tx) = g(Tx) \text{ as } j' \to \infty$$

なので，

$$T^*g_{j'} \xrightarrow{\mathrm{w}} T^*g \qquad (\diamondsuit)$$

である．

さて$(\diamondsuit)$が強収束であることを示そう．もし$(\diamondsuit)$が強収束ではないとすると，さらに部分列をとりなおすことである$\epsilon > 0$に対して

$$\|T^*g_{j'} - T^*g\| > \epsilon$$

としてよい．すると，ある$\{x_{j'}\} \in X$が存在して

$$\|x_{j'}\| = 1, \quad |T^*g_{j'}(x_{j'}) - T^*g(x_{j'})| > \frac{\epsilon}{2}$$

とできる．一方，部分列をとりなおすことで，$\{Tx_{j'}\}$は収束するとしてよく，このとき

$$\begin{aligned}
&|T^*g_{j'}(x_{j'}) - T^*g(x_{j'})| \\
&\le |T^*g_{j'}(x_{j'} - x_{k'})| + |T^*g_{j'}(x_{k'}) - T^*g(x_{k'})| + |T^*g(x_{k'} - x_{j'})| \\
&\le \|g_{j'}\|\|Tx_{j'} - Tx_{k'}\| + |(T^*g_{j'} - T^*g)(x_{k'})| + \|g\|\|Tx_{k'} - Tx_{j'}\|
\end{aligned}$$

なので，まずk'を大きくとって固定し，次にj'を大きくとると，右辺はいくらでも小さくできる．これは矛盾であり，よって$T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$である．

（十分性）　$T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$とする．命題 5.27により，

$$X \subset X^{**}, \quad Y \subset Y^{**}, \quad T \subset T^{**}$$

とみなせることに注意する．さて，いま$\{x_j\} \subset X \subset X^{**}$を有界列とすると，前半の議論から部分列$\{x_{j'}\}$が存在して，$\{T^{**}x_{j'}\} \subset Y^{**}$は収束列となる．しかし，$T^{**}x_{j'} = Tx_{j'} \in Y$なので，$\{Tx_{j'}\}$は結局$Y$の収束列である．よって$T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$である．□

§ 7.2 コンパクト作用素の例

○ Hilbert–Schmidt型積分作用素

命題 7.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$を開集合とし，$k \in L^2(\Omega \times \Omega)$とする．このとき，任意の$u \in L^2(\Omega)$に対し

$$(Ku)(x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

と定めると，$K \in \mathcal{B}_c(L^2(\Omega))$であり，

$$\|K\| \le \|K\|_{\mathrm{HS}} := \|k\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

が成り立つ．

注意. 上のようなKを**Hilbert–Schmidt型積分作用素**と呼び，$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$をKの**Hilbert–Schmidtノルム**と呼ぶ．

証明. Kの有界性およびノルム不等式は定理 3.3の後の例で既に示したので，コンパクト性を示す．$\{u_j\} \subset L^2(\Omega)$を有界列とする．定理 5.21より$\{u_j\}$はある$u \in L^2(\Omega)$に弱収束するとしてよい．$v_j = Ku_j$, $v = Ku$とおいて，

$$v_j \to v \in L^2(\Omega)$$

を示せばよい．仮定より

$$(v_j - v)(x) \to 0 \quad \text{for a.e. } x \in \Omega$$

である．一方，Cauchy–Schwarzの不等式より

$$|(v_j - v)(x)|^2 \le \Bigl(\sup_j \|u_j - u\|_{L^2}\Bigr) \int_\Omega |k(x,y)|^2 \,\mathrm{d}y$$

が分かるので，$|v_j - v|^2$はjに依らない可積分関数で上から評価されている．よってLebesgue収束定理により

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{L^2}^2 = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |v_j(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

であり，$K \in \mathcal{B}_c(L^2(\Omega))$がわかる．　□

○ **位数有限の作用素**

定義. 値域が有限次元の作用素を**位数有限**の作用素と呼ぶ．

命題 7.8. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$が位数有限ならば，Tはコンパクトである．

証明. $\{x_j\} \subset X$を有界列とする．このとき$\{Tx_j\} \subset R(T)$は有限次元空間の有界列であり，有限次元空間は局所（点列）コンパクトであることから，$\{Tx_j\}$は収束部分列を含む．　□

系 7.9. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$が位数有限の作用素列$\{T_j\} \subset \mathcal{B}(X,Y)$の極限であるなら，$T$はコンパクトである．

証明. 定理 7.3と命題 7.8より明らかである．　□

○ **格子上の重み付き関数空間**

任意の$s \in \mathbb{R}$に対し

$$\ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d) = \{u\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C};\ \|u\|_s < \infty\}$$

と定める．ここで

$$\|u\|_s = \Bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s} |u_n|^2\Bigr)^{1/2}, \quad \langle n\rangle = \bigl(1 + n_1^2 + \cdots + n_d^2\bigr)^{1/2}$$

とする．$\ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$はBanach空間（実はHilbert空間）である．明らかに

$$s < t \ \Rightarrow\ \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d) \subset \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$$

が成り立つことに注意する．

定理 7.10. 任意の$s < t$に対し，埋め込み写像

$$J\colon \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d) \hookrightarrow \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$$

はコンパクトである．

証明. $N = 1,2,\ldots$に対し，作用素$J_N\colon \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d) \to \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$を

$$(J_N u)_n = \begin{cases} u_n & \text{for } |n| \le N, \\ 0 & \text{for } |n| > N, \end{cases}$$

で定めると，J_Nは明らかに有界かつ位数有限なのでコンパクトである．ここで，任意の$u \in \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d)$に対し

$$\begin{aligned} \|(J_N - J)u\|_s^2 &= \sum_{|n|>N} \langle n\rangle^{2s} |u_n|^2 \\ &= \sum_{|n|>N} \langle n\rangle^{-2(t-s)} \langle n\rangle^{2t} |u_n|^2 \\ &\le (1+N)^{-(t-s)} \|u\|_t^2 \end{aligned}$$

であることから，

$$J_N \to J \quad \text{in } \mathcal{B}(\ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d), \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d))$$

である．よってJもコンパクトであることが従う．　□

○ **Rellichのコンパクト埋め込み定理**

任意の$s \in \mathbb{R}$に対し

$$H^s(\mathbb{T}^d) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d);\ \hat{u} \in \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d) \right\}, \quad \|u\|_s = \|\hat{u}\|_{\ell^{2,s}}$$

と定める．ここで$\hat{u}$はFourier係数

$$\hat{u}_n = \mathcal{F}[u]_n = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{e}^{-inx} u(x)\, \mathrm{d}x$$

から定まる$\mathbb{Z}^d$上の関数とする．明らかに，

$$\mathcal{F}\colon H^s(\mathbb{T}^d) \to \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d) \qquad (\spadesuit)$$

はHilbert空間としての同型を与える．特に

$$s < t \ \Rightarrow\ H^t(\mathbb{T}^d) \subset H^s(\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

定理 7.11 (Rellich). 任意の$s < t$に対し，埋め込み写像

$$J\colon H^t(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow H^s(\mathbb{T}^d)$$

はコンパクトである．

証明. 定理 7.10と同型($\spadesuit$)から明らかである． □

命題 7.12. 任意の$s \in \mathbb{R}$に対し$C^\infty(\mathbb{T}^d)$は$H^s(\mathbb{T}^d)$の稠密な部分集合である．また，任意の非負整数$k \geq 0$に対し，ある$c, C > 0$が存在して，

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^d) \quad c\|u\|_k \leq \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \Big)^{1/2} \leq C\|u\|_k$$

が成り立つ．

証明. 省略する． □

開集合$\Omega \subset \mathbb{R}^d$と$k \in \mathbb{Z}_+$に対して

$$C_0^k(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega);\ \mathrm{supp}\, u \subset \Omega \text{はコンパクト} \right\},$$
$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)}\, \mathrm{d}x \quad \text{for } u, v \in C_0^k(\Omega),$$

と定めると，$(C_0^k(\Omega), (\cdot,\cdot)_k)$は内積空間となる．これを完備化して得られるHilbert空間を$H_0^k(\Omega)$で表す．明らかに

$$L^2(\Omega) = H_0^0(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) \supset H_0^2(\Omega) \supset \cdots$$

が成り立つ．

注意. $H_0^k(\Omega)$は境界で値0をとる関数の空間とみなされる．

定理 7.13 (Rellich). Ωが有界集合のとき，埋め込み写像

$$J\colon H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

はコンパクトである．

証明. $N > 0$に対し$\mathbb{T}_N = \mathbb{R}/(2\pi N\mathbb{Z})$とおく．$N > 0$を十分大きくとると，$\Omega$は大きなトーラス$\mathbb{T}_N^d$の部分集合とみなせる：$\Omega \subset \mathbb{T}_N^d$．この同一視により$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{T}_N^d)$とみなせ，このとき定理 7.11により包含写像の合成

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\mathbb{T}_N^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}_N^d)$$

はコンパクトとなる．この合成写像の像は明らかに$L^2(\Omega)$に含まれているため，結局$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$はコンパクトであることが従う． □

§ 7.3 コンパクト作用素のスペクトル

○ **主定理とその系**

定理 7.14. X を無限次元複素Banach空間とし，$T \in \mathcal{B}_c(X)$ とする．このとき，0にのみ集積し得る，有界かつ高々可算な $\{z_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\{z_j\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T) = \{z_j\} \cup \{0\},$$

および，

$$\{z_j\} \subset \sigma_p(T^*) \subset \sigma(T^*) = \{z_j\} \cup \{0\}$$

が成り立つ．さらに各 z_j に対し

$$\dim N(z_j - T) = \dim N(z_j - T^*) < \infty$$

が成り立つ．

命題 7.15. T をBanach空間 X 上の閉作用素とする．このとき以下の条件は互いに同値である:

1. $\exists z \in \rho(T)\ R(z) \in \mathcal{B}_c(X)$;
2. $\forall z \in \rho(T)\ R(z) \in \mathcal{B}_c(X)$.

証明. レゾルベント方程式と定理 7.4から明らかである（**問**とする）． □

注意. 命題 7.15の条件が成立するとき，T は**コンパクトレゾルベント**を持つということにする．

系 7.16. X を無限次元複素Banach空間とし，T は X 上の閉作用素でコンパクトレゾルベントを持つとする．このとき，離散的（集積点を持たない）かつ高々可算な $\{z_j\} \subset \mathbb{C}$ が存在して，

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{z_j\}, \quad \dim N(z_j - T) < \infty$$

が成り立つ．さらに $D(T) \subset X$ が稠密なら，同じ $\{z_j\}$ に対して

$$\sigma(T^*) = \sigma_p(T^*) = \{z_j\}, \quad \dim N(z_j - T^*) < \infty,$$

および，

$$\dim N(z_j - T) = \dim N(z_j - T^*)$$

が成り立つ．

証明. $z \in \rho(T)$ を一つ固定する．$0 \notin \sigma_p(R(z))$ に注意すると，定理 7.14より0にのみ集積し得る有界かつ高々可算な $\{w_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\sigma(R(z)) = \{w_j\} \cup \{0\}, \quad \sigma_p(R(z)) = \{w_j\} \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ．一方，

$$\sigma(R(z)) = \left\{(z-\zeta)^{-1} \in \mathbb{C};\ \zeta \in \sigma(T)\right\} \cup \{0\} \qquad (\diamondsuit)$$

も成り立つことに注意する．実際，任意の $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ に対して

$$R(z) - (z-\zeta)^{-1} = -(z-\zeta)^{-1}(\zeta - T)R(z)$$

となることに注意すると，

$$(z-\zeta)^{-1} \in \rho(R(z)) \iff \zeta \in \rho(T)$$

となり（**問**とする），($\diamondsuit$)が従う．

さて，いま $z_j = z - w_j^{-1}$ とおこう．すると $(\heartsuit)$ と $(\diamondsuit)$ より，

$$\sigma(T) = \{z_j\}$$

が従う．また

$$N(z_j - T) = N(w_j - R(z))$$

である．実際，これは

$$\begin{aligned} x \in N(z_j - T) &\iff Tx = z_j x \\ &\iff (z - T)x = (z - z_j)x = w_j^{-1} x \\ &\iff R(z)x = w_j x \\ &\iff x \in N(w_j - R(z)) \end{aligned}$$

からわかる．すると

$$\sigma_p(T) = \{z_j\}$$

が従う．共役作用素に関する主張は定理 6.3 と定理 7.14 から得られる． □

○ **定理 7.14 の証明**

以下，この節では X を無限次元複素 Banach 空間とし，$T \in \mathcal{B}_c(X)$ とする．

命題 7.17. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し $R(z - T) \subset X$ は閉部分空間である．

証明．$\{x_j\} \subset X$ に対し $\{(z - T)x_j\} \subset R(z - T)$ が収束したとする．このとき，$\{\xi_j\} \subset X$ を

$$x_j - \xi_j \in N(z - T), \quad \|\xi_j\| \le 2\,\mathrm{dist}(x_j, N(z - T))$$

ととる．もし $\{\xi_j\}$ が有界なら，T のコンパクト性から，ある部分列 $\{\xi_{j'}\} \subset X$ に対し $\{T\xi_{j'}\} \subset X$ は収束する．すると

$$\xi_{j'} = z^{-1}(z - T)x_{j'} + z^{-1} T\xi_{j'}$$

なので $\{\xi_{j'}\} \subset X$ も収束し，したがって

$$\lim_{j \to \infty} (z - T)x_j = \lim_{j' \to \infty} (z - T)\xi_{j'} = (z - T) \lim_{j' \to \infty} \xi_{j'} \in R(z - T)$$

である．よって $\{\xi_j\}$ は非有界としてよい．部分列 $\{\xi_{j'}\}$ で $\xi_{j'} \to \infty$ となるものをとって，$\eta_{j'} = \|\xi_{j'}\|^{-1} \xi_{j'}$ とおくと

$$\|\eta_{j'}\| = 1, \quad (z - T)\eta_{j'} = \|\xi_{j'}\|^{-1}(z - T)x_{j'} \to 0$$

である．すると，上と同様にして，収束部分列 $\{\eta_{j''}\}$ の存在が示せる．その極限を η とすると，$\eta \in N(z - T)$ なので，

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x_{j''}, N(z - T)) &\le \big\| \xi_{j''} - \|\xi_{j''}\| \eta \big\| \\ &= \|\xi_{j''}\| \|\eta_{j''} - \eta\| \\ &\le 2 \|\eta_{j''} - \eta\| \,\mathrm{dist}(x_{j''}, N(z - T)) \end{aligned}$$

が成り立つ．これは大きい j'' に対し $x_{j''} \in N(z - T)$ であることを意味し，よって $(z - T)x_j \to 0 \in R(z - T)$ を得る． □

補題 7.18. $L \subsetneq X$ を閉部分空間とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $e \in X$ が存在して

$$\|e\| = 1, \quad \mathrm{dist}(e, L) \ge 1 - \epsilon$$

が成り立つ．

証明．任意の $z \in X \setminus L$ をとって固定する．$L \subset X$ は閉部分集合であるから，

$$\delta := \mathrm{dist}(z, L) > 0$$

が成り立つ．$y_j \in L$ を

$$\delta_j := \|z - y_j\| \to \delta \quad \text{as } j \to \infty$$

を満たすようにとり，$e_j = \delta_j^{-1}(z - y_j)$ とおく．すると，$\|e_j\| = 1$ であり，また任意の $y \in L$ に対して

$$\|e_j - y\| = \delta_j^{-1} \|z - y_j - \delta_j y\| \ge \delta_j^{-1} \delta \to 1 \quad \text{as } j \to \infty$$

が成り立つ．よって十分大きな j に対して $e = e_j$ とおけばよい． □

補題 7.19. $\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ が成り立つ．

証明. $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(T) \cup \{0\})$ とする．$(z-T)^{-1}$ の存在は明らかなので，$R(z-T) = X$ を示せば，閉グラフ定理により $(z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$，すなわち $z \in \rho(T)$ となって結論が従う．

いま $R(z-T) \subsetneq X$ と仮定して，

$$X_j = (z-T)^j X \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \dots$$

とおく．このとき，仮定と命題 7.17 により

$$X_1 = R(z-T) \subsetneq X = X_0, \quad X_1 \text{は} X_0 \text{の閉部分空間}$$

である．続けて，$(z-T)|_{X_1} \in \mathcal{B}_c(X_1)$ に注意すると，X_2 は X_1 の真閉部分空間であることが同様に示される．以下，帰納的に，すべての $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して X_{j+1} は X_j の真閉部分空間である．

さて補題 7.18 により，列 $\{x_j\} \subset X$ を

$$x_j \in X_j, \quad \|x_j\| = 1, \quad \mathrm{dist}(x_j, X_{j+1}) \geq \frac{1}{2}$$

のようにとろう．このとき，任意の $j < k$ に対して

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{z}(Tx_j - Tx_k)\right\| &= \left\|x_j - \left[\frac{1}{z}(z-T)x_j + x_k - \frac{1}{z}(z-T)x_k\right]\right\| \\ &\geq \mathrm{dist}(x_j, X_{j+1})\end{aligned}$$

なので，

$$\|Tx_j - Tx_k\| \geq \frac{|z|}{2}$$

となり，$\{Tx_j\}$ は収束部分列を含み得ない．しかし，これは T のコンパクト性に矛盾する．よって $R(z-T) = X$ となり，補題の主張が示された． □

補題 7.20. $\sigma_p(T) \subset \mathbb{C}$ は（集合として）0 にのみ集積し得る．

証明. $\sigma_p(T)$ が $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に集積するなら $\{z_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $\{x_j\} \subset X$ で

$$\|x_j\| = 1, \quad Tx_j = z_j x_j, \quad z_j \neq z_k \text{ for } j \neq k, \quad \lim_{j \to \infty} z_j = z$$

を満たすものが存在する．

$\{x_j\}$ は線形独立であることを示そう．単独の $\{x_1\}$ が線形独立なことは明らかである．$N \geq 2$ に対し，$\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ が線形独立であると仮定して，

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N = 0$$

とする．$z_N^{-1} T$ を作用させたものと差をとると

$$\left(1 - \frac{z_1}{z_N}\right)\lambda_1 x_1 + \cdots + \left(1 - \frac{z_{N-1}}{z_N}\right)\lambda_{N-1} x_{N-1} = 0$$

となるので，仮定により $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{N-1} = 0$ である．これを上式に代入すると $\lambda_N = 0$ もわかる．

いま，$X_j = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_j\}$ とおくと $X_j \subsetneq X_{j+1}$ であり，補題 7.18 により，列 $\{e_j\} \subset X$ を

$$e_j \in X_j, \quad \|e_j\| = 1, \quad \mathrm{dist}(e_j, X_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$$

ととれる．任意の $j > k$ に対して，$e_j = c_j x_j + y_j$，$y_j \in X_{j-1}$，と書けば，

$$\begin{aligned}\|Te_j - Te_k\| &= \|z_j c_j x_j + Ty_j - Te_k\| \\ &= \|z_j e_j - z_j y_j + Ty_j - Te_k\| \\ &\geq |z_j| \,\mathrm{dist}(e_j, X_{j-1})\end{aligned}$$

なので，

$$\|Te_j - Te_k\| \geq \frac{1}{2} \inf_{l \geq 1} |z_l| > 0$$

となって，$\{Te_j\}$ は収束部分列を含み得ない．しかし，これは T のコンパクト性に矛盾する．よって補題が示された． □

補題 7.21. $z \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ に対し $\dim N(z-T) < \infty$ である．

証明. $\dim N(z-T) = \infty$ であれば，線形独立な $\{x_j\} \subset X$ で

$$\|x_j\| = 1, \quad Tx_j = zx_j$$

を満たすものが存在する．いま，$X_j = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_j\}$ とおくと $X_j \subsetneq X_{j+1}$ であり，補題 7.18 により，列 $\{e_j\} \subset X$ を

$$e_j \in X_j, \quad \|e_j\| = 1, \quad \mathrm{dist}(e_j, X_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$$

ととれる．このとき，任意の $j > k$ に対して，

$$\|Te_j - Te_k\| = |z|\|e_j - e_k\| \geq |z| \,\mathrm{dist}(e_j, X_{j-1}) \geq \frac{|z|}{2}$$

となって，$\{Te_j\}$ は収束部分列を含み得ない．しかしこれは T のコンパクト性に矛盾する．よって補題が示された． □

補題 7.22. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し

$$\dim N(z-T) = \dim N(z-T^*)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し

$$n = \dim N(z-T), \quad m = N(z-T^*)$$

とおく．$\sigma(T) = \sigma(T^*)$ と補題 7.19 により $m = 0$ と $n = 0$ は同値なので，$m \neq 0$ および $n \neq 0$ の下で $m = n$ を示せば十分である．

まず $n \geq m$ を示す．$m > n > 0$ と仮定し，

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subset N(z-T), \quad \{g_1, \ldots, g_m\} \subset N(z-T^*)$$

をそれぞれの空間の基底とする．$f_j \in X^*$ および $y_j \in X$ を

$$f_j(x_k) = \delta_{jk} \quad \text{for } j,k = 1, \ldots, n,$$
$$g_j(y_k) = \delta_{jk} \quad \text{for } j,k = 1, \ldots, m,$$

を満たすようにとり（※ 要確認だが一時的に省略する），

$$S = T + \sum_{j=1}^{n} f_j(\,\cdot\,)y_j \in \mathcal{B}_c(X)$$

と定義する．

$z - S$ が単射である．実際，$x \in X$ が $(z-S)x = 0$ を満たすなら，

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x)y_j = (z-T)x \qquad (\spadesuit)$$

の両辺に g_k を作用させることで，

$$f_k(x) = g((z-T)x) = ((z-T^*)g)(x) = 0 \qquad (\heartsuit)$$

となる．($\spadesuit$)，($\heartsuit$) より $x \in N(z-T)$ なので，

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

と書けるが，再び ($\heartsuit$) より $\lambda_j = 0$ がわかり，$x = 0$ が得られる．

Sはコンパクトであり，$z - S$は単射なので，補題 7.19より$R(z-S) = X$である．よって任意の$y \in X$に対し，ある$x \in X$が存在して

$$y = (z - S)x$$

と書ける．これにg_{n+1}を作用させると，

$$g_{n+1}(y) = g_{n+1}((z-S)x) = ((z-S^*)g_{n+1})(x) = 0$$

となり，$g_{n+1} \neq 0$に矛盾する．以上により，$n \geq m$を得る．

次に$m \geq n$を示そう．T^*に前半の議論を適用すると

$$\dim N(z - T^*) \geq \dim N(z - T^{**})$$

となる．一方，$T \subset T^{**}$なので，

$$\dim N(z - T^{**}) \geq \dim N(z - T)$$

でなければならない．したがって$m \geq n$を得る． □

定理 7.14の証明. 命題 6.4および補題 7.19–7.22より，あとは$0 \in \sigma(T)$を示せばよい．もし$0 \in \rho(T)$と仮定すると，定義より$T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$が存在する．すると，単位球$B \subset X$に対し$T^{-1}B \subset X$は有界集合であり，$T$のコンパクト性から

$$B = TT^{-1}B \subset X$$

は相対点列コンパクトである．しかし，これは$\dim X < \infty$を意味し，仮定に矛盾する． □

§ 7.4 コンパクトな自己共役作用素

定理 7.23. Xを無限次元複素Hilbert空間，$T \in \mathcal{B}_c(X)$を自己共役作用素とする．このとき，0以外には集積し得ない，有界かつ高々可算な$\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$が存在して，

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}, \quad \dim N(\lambda_j - T) < \infty \text{ for } \lambda_j \neq 0$$

が成り立つ．$P_j \in \mathcal{B}(X)$を$N(\lambda_j - T)$への正射影作用素とすると，任意の$j \neq k$に対し

$$P_j P_k = 0 \quad \text{（すなわち，}N(\lambda_j - T) \perp N(\lambda_k - T)\text{）}$$

であり，さらに任意の$x \in X$に対して強収束の意味で

$$x = \sum_j P_j x, \quad Tx = \sum_j \lambda_j P_j x$$

が成り立つ．特に$0 \notin \sigma_p(T)$なら0は$\sigma_p(T)$の集積点である．

系 7.24. Xを無限次元複素Hilbert空間とし，TはX上の自己共役作用素でコンパクトレゾルベントを持つとする．このとき，点列$\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$が存在して，

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}, \quad \dim N(\lambda_j - T) < \infty, \quad \lim_{j\to\infty} |\lambda_j| = \infty$$

が成り立つ．$P_j \in \mathcal{B}(X)$を$N(\lambda_j - T)$への正射影作用素とすると，任意の$j \neq k$に対し

$$P_j P_k = 0 \quad \text{（すなわち，}N(\lambda_j - T) \perp N(\lambda_k - T)\text{）}$$

であり，さらに強収束の意味で

$$x = \sum_j P_j x \quad \text{for } x \in X, \quad Tx = \sum_j \lambda_j P_j x \quad \text{for } x \in D(T)$$

が成り立つ．

証明. 系 7.16 より $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ は離散的なので，ある $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$ がとれる．$R(\lambda) \in \mathcal{B}_c(X)$ は自己共役であることと，$0 \notin \sigma_p(R(\lambda))$ に注意すると，定理 7.23 より 0 に集積する有界かつ可算な $\{\mu_j\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\sigma(R(\lambda)) = \{\mu_j\} \cup \{0\}, \quad \sigma_p(R(\lambda)) = \{\mu_j\}$$

と書ける．系 7.16 の証明の議論を繰り返すと，$\lambda_j = \lambda - \mu_j^{-1}$ とおいて，

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}, \quad N(\lambda_j - T) = N(\mu_j - R(\lambda))$$

が成り立つことが示される．$N(\lambda_j - T) = N(\mu_j - R(\lambda))$ への正射影作用素を P_j とすると，定理 7.23 より，任意の $j \neq k$ に対して

$$P_j P_k = 0$$

が成り立ち，さらに，任意の $x \in X$ に対して強収束の意味で

$$x = \sum_j P_j x, \quad R(\lambda)x = \sum_j \mu_j P_j x \qquad (\diamondsuit)$$

が成り立つ．いま，任意の $y \in D(T)$ に対して，$x \in X$ を $y = R(\lambda)x$ となるように選ぶと，

$$Ty = TR(\lambda)x = x - \lambda R(\lambda)x$$

であり，$(\diamondsuit)$ を用いると

$$Ty = \sum_j P_j x - \lambda \sum_j \mu_j P_j x = \sum_j (1 - \lambda\mu_j) P_j x = \sum_j \lambda_j \mu_j P_j x$$

となる．$(\diamondsuit)$ の第2式に P_k をかけると $P_k R(\lambda)x = \mu_k P_k x$ となることから，

$$Ty = \sum_j \lambda_j P_j R(T)x = \sum_j \lambda_j P_j y$$

を得る． □

○ 定理 7.23 の証明の準備

以下，X を無限次元 Hilbert 空間，$T \in \mathcal{B}_c(X)$ を自己共役作用素とする．

補題 7.25. $L \subset X$ が $TL \subset L$ を満たすなら，$T(L^\perp) \subset L^\perp$ である．

証明. $x \in L^\perp$ とする．このとき，任意の $y \in L$ に対して

$$(Tx, y) = (x, Ty) = 0$$

なので，$Tx \in L^\perp$ である．よって，$T(L^\perp) \subset L^\perp$ である． □

補題 7.26. $\sigma(T) = \{0\}$ なら，$T = 0$ である．

証明. 次を示せば十分である:

$$\forall x \in X \quad (Tx, x) = 0. \qquad (\clubsuit)$$

実際，$(\clubsuit)$ が成り立つとすると，任意の $x, y \in X$ に対し，複素 Hilbert 空間の場合は

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}\Big[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) \\ + \mathrm{i}(T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y)\Big],$$

また実 Hilbert 空間の場合は $T^* = T$ を用いて

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}\Big[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)\Big],$$

がそれぞれ成り立つ（**問**とする）ので，$T = 0$ が従う．

いま，(♣)が成り立たないと仮定する．$\pm T$の適当な方をTと選び直して，

$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) > 0$$

としてよい．点列$\{x_j\} \subset X$を

$$\|x_j\| = 1, \quad (Tx_j, x_j) \to \lambda$$

ととる．定理 5.21より，$\{x_j\}$はある$x \in X$に弱収束するとしてよく，すると定理 7.2より，$\{Tx_j\}$はTxに強収束する．このとき

$$(Tx, x) = \lim_{j\to\infty} (Tx_j, x_j) = \lambda, \quad \|x\| = 1 \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つ．実際，前者は

$$\begin{aligned}|(Tx, x) - (Tx_j, x_j)| &\le |(Tx, x) - (Tx, x_j)| + |(Tx, x_j) - (Tx_j, x_j)| \\ &\le |(Tx, x - x_j)| + \|Tx - Tx_j\|\end{aligned}$$

からすぐにわかる．後者については，定理 5.18からまず$\|x\| \le 1$がわかり，また

$$\lambda \|x\|^{-2} = (Tx/\|x\|, x/\|x\|) \le \lambda$$

から$\|x\| \ge 1$がわかる．

さて，上のx，λに対して

$$Tx = \lambda x$$

が成り立つことを示す．これを示せば，$\lambda \in \sigma_p(T) = \{0\}$となって矛盾が導かれる．任意の$y \in L := (\mathrm{span}\{x\})^\perp$をとる．このとき，

$$\begin{aligned}&(T(x+ty), x+ty) - \lambda\|x+ty\|^2 \\ &= 2t\,\mathrm{Re}(Tx, y) + t^2[(Ty, y) - \lambda\|y\|^2]\end{aligned}$$

であるが，もし$\pm\mathrm{Re}(Tx, y) > 0$なら，小さい$\pm t > 0$に対し，

$$(T(x+ty), x+ty) - \lambda\|x+ty\|^2 > 0, \quad x + ty \ne 0$$

となって，これは矛盾である．よって

$$\mathrm{Re}(Tx, y) = 0$$

である．複素Hilbert空間であれば，yを$\mathrm{i}y$で置き換えて

$$\mathrm{Im}(Tx, y) = 0$$

も得られる．よって$TL \subset L$であり，補題 7.25から$T(L^\perp) \subset L^\perp$なので，

$$\exists \mu \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad Tx = \mu x$$

となる．ここで(♠)を用いると，$\mu = \lambda$でなければならないことがわかり，示すべき結論が得られた．□

定理 7.23の証明．定理 7.14と定理 6.5により，0以外には集積し得ない，有界かつ高々可算な$\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$が存在して

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}, \quad \dim N(\lambda_j - T) < \infty$$

であることがわかる．また命題 6.6より，

$$P_j P_k = 0 \quad \text{for all } j \ne k$$

もわかる．

さて

$$L = \overline{\mathrm{span}\bigcup_j P_j X}$$

とおいて，$L = X$を示そう．$L^\perp \ne \{0\}$と仮定する．$TL \subset L$なので，補題 7.25より$T(L^\perp) \subset L^\perp$が成り立ち，$T_0 := T|_{L^\perp} \in \mathcal{B}_c(L^\perp)$とみなせる．$T_0$が自己共役であることもすぐに確かめられる．

もし$T_0 \neq 0$なら，補題 7.26により，$\lambda \in \sigma_p(T_0)\setminus\{0\}$が存在する．すると

$$\exists x \in L^\perp \setminus \{0\} \quad T_0 x = \lambda x$$

であるが，これはxがTの固有ベクトルであることを意味し，$x \in L$となって矛盾である．よって$T_0 = 0$であるが，$L^\perp \neq \{0\}$より，これは$\sigma_p(T_0) = \{0\}$を意味するので，上と同様にこれも矛盾である．ゆえに$L = X$を得た．

（**問．**以下の議論を確かめよ：）任意の$x \in X$に対し

$$\tilde{x} := \sum_j P_j x$$

が収束することはすぐに確かめられ，任意のkに対し$P_k(x - \tilde{x}) = 0$であることから，$x = \tilde{x}$でなければならない．すると，これから

$$Tx = \sum_j \lambda_j P_j x$$

もすぐにわかる．特に$0 \notin \sigma_p(T)$かつ$\sigma_p(T)$が0に集積しないと仮定すると，$\dim X < \infty$となって不合理であることもわかる．□

§ 7.5 応用：有界領域上のDirichlet Laplacian

定理 7.27. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$を領域とし，Hilbert空間$L^2(\Omega)$上の作用素$A$を

$$Au = -\triangle u \quad \text{for } u \in D(A) := \left\{u \in H_0^1(\Omega);\ \triangle u \in L^2(\Omega)\right\}$$

で定める．このとき，Aは自己共役かつ$A \geq 0$である．特にΩが有界領域であれば，Aはコンパクトレゾルベントを持つ．

証明. $u, v \in D(A)$とし，$u_j, v_j \in C_0^\infty(\Omega)$を

$$u_j \to u \text{ in } H_0^1(\Omega), \quad v_j \to v \text{ in } H_0^1(\Omega)$$

ととる．すると

$$\begin{aligned}(Au, v) &= \lim_{j\to\infty}(\triangle u, v_j) = \lim_{j\to\infty}(u, \triangle v_j) = \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty}(u_k, \triangle v_j) \\ &= \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty}(\nabla u_k, \nabla v_j) = \cdots = (u, Av)\end{aligned}$$

なので，Aは対称作用素である．

次に$-1 \in \rho(A)$であることを確かめる．まず，任意の$u \in D(A)$に対し，

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = (u, u) + (Au, u) \leq \|(1+A)u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

なので，

$$\|u\|_{L^2} \leq \|(1+A)u\|_{L^2}$$

であり，$1 + A$は単射であることがわかる．次に任意の$w \in L^2(\Omega)$をとる．$(\cdot, w)_{L^2}$は$H_0^1(\Omega)$上の有界線形汎関数なので，ある$u \in H_0^1(\Omega)$が存在して

$$(\,\cdot\,, w)_{L^2} = (\,\cdot\,, u)_{H^1}$$

と書ける．これは$u \in D(A)$かつ$(1+A)u = w$を意味し，したがって$1+A$は全射である．以上により$-1 \in \rho(A)$である．

さて$u \in D(A^*)$としよう．このとき，$1 + A$は全射であることから，ある$v \in D(A)$が存在して

$$(1 + A)v = (1 + A^*)u$$

と書ける．すると，任意の$w \in D(A)$に対して

$$((1 + A)w, u) = (w, (1 + A^*)u) = (w, (1 + A)v) = ((1 + A)w, v)$$

が成り立つ．これは$u = v \in D(A)$を意味し，よってAは自己共役である．

任意の$u \in D(A)$に対し，$(Au, u) = \|\nabla u\|_{L^2}$なので，$A \geq 0$である．

$R(R(-1)) = D(A) \subset H_0^1(\Omega)$なので，$\Omega$が有界ならRellichのコンパクト埋め込み定理よりAのレゾルベントはコンパクトである．□

定理 7.28（Poincaréの不等式）. $\Omega\subset\mathbb{R}^d$はある帯状領域に含まる領域とする．このとき，ある$C=C_\Omega>0$が存在して，任意の$u\in H_0^1(\Omega)$に対し

$$\|u\|_{L^2}\le C\|\nabla u\|_{L^2}$$

が成り立つ．特に定理 7.27のAは$A\ge C^{-2}>0$を満たす．

証明．領域の回転と平行移動により$\Omega\subset\{x\in\mathbb{R}^d;\ 0<x_1<M\}$としてよい．任意の$u\in C_0^\infty(\Omega)$に対して

$$|u(x_1,y)|^2=\left|\int_0^{x_1}\partial_1 u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi\right|^2\le|x_1|\int_0^M|\partial_1 u(\xi,y)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

が成り立つので，

$$\|u\|_{L^2}^2\le\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_0^M|x_1|\,\mathrm{d}x_1\int_0^M|\partial_1 u(\xi,y)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}y\le\frac{M^2}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

を得る．これより$A\ge C^{-2}$は自明である． □

定理 7.29. $\Omega\subset\mathbb{R}^d$を有界領域とする．このとき，ある

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots,\quad \lim_{j\to\infty}\lambda_j\to\infty$$

と

$$u_j\in H_0^1(\Omega),\quad \{u_j\}\text{: }L^2(\Omega)\text{の完全正規直交系}$$

が存在して，

$$-\triangle u_j=\lambda_j u_j$$

が成り立つ．特に$u_j\in C^\infty(\Omega)$である．

証明．$u_j\in C^\infty(\Omega)$を示せばよいが，これは$\triangle^k u_j=(-\lambda_j)^k u_j\in L^2(\Omega)$とSobolev埋め込み定理からわかる． □

注意. この定理を用いると，有界領域上の熱方程式などをトーラス上と同様の方法で解くことができる．変数係数にも拡張できる．