緩増加超関数とFourier解析 講義スライド

担当教員：伊藤健一

2024年1月24日版

この講義について

内容： 緩増加超関数とFourier解析の基本事項について学ぶ.

参考書： 新井仁之「新・フーリエ解析と関数解析学」（培風館）
垣田高夫「シュワルツ超関数入門」（日本評論社）
新井仁之「フーリエ解析学」（朝倉書店）

第1章 Lebesgue空間

§ 1.1 L^p空間

本章では以下，$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．また，

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \overline{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\overline{\mathbb{R}}$$

などと書くことにする.

定義. $p \in [1, \infty)$ とする．Ω 上の L^p **空間**を

$$L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{C}};\ f \text{ は可測かつ} \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

で定める．また，任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対し，その L^p **ノルム**を

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

で定める．ただし $L^p(\Omega)$ において，Ω 上ほとんど至るところ一致する関数はすべて同一視するものとする.

注意. より厳密には,

$$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)=\Big\{f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{C}};\ f\text{は可測かつ}\int_\Omega|f|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty\Big\}$$

とおき，$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 上の同値関係 $\sim$ を，任意の $f,g\in\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ に対し

$$f\sim g \quad\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad f=g \quad \text{a.e. on } \Omega$$

と定める．その上で，Ω 上の L^p 空間を，商空間を用いて

$$L^p(\Omega)=L^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)=\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)/\sim$$

と定義する．同値類 $[f]\in L^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ をその代表元 $f\in\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ を用いて，単に

$$[f]=f$$

と書くことにすれば，前項の設定を集合論の枠組の中で実現できる．

定義. 1. 可測関数 $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ が Ω 上で**本質的に上に有界**であるとは,

$$\exists M\in\mathbb{R}\quad\text{s.t.}\quad f\le M\quad\text{a.e. on }\Omega$$

が成り立つことである．

2. 可測関数 $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ に対し，その**本質的上限**を

$$\operatorname{ess\,sup} f=\inf\Big\{M\in\mathbb{R};\ f\le M\ \text{ a.e. } x\in\Omega\Big\}$$

で定義する．ただし，f が Ω 上で本質的に上に有界でないときには,

$$\operatorname{ess\,sup} f=\infty$$

と定める．

問. 任意の可測関数 $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$$f(x)\le\operatorname{ess\,sup} f\quad\text{for a.e. } x\in\Omega$$

が成り立つことを示せ．

定義. Ω 上の L^∞ **空間**を

$$L^\infty(\Omega)=L^\infty(\Omega,\mathcal{B},\mu)=\Big\{f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{C}};\ f\text{は可測かつ}\operatorname{ess\,sup}|f|<\infty\Big\}$$

で定める．また，任意の $f\in L^\infty(\Omega)$ に対し，その L^∞ **ノルム**を

$$\|f\|_\infty=\|f\|_{L^\infty}=\operatorname{ess\,sup}|f|$$

で定める．ただし，ほとんど至るところ一致する関数はすべて同一視するものとする．

注意. より厳密には，L^∞ 空間も商空間を用いて定義されるが，$p\in[1,\infty)$ のときと全く同様なので省略する．

例. $d\in\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$ とする．Lebesgue可測集合 $U\subset\mathbb{R}^d$ に対しては，$L^p(U)$ は常にLebesgue測度に関する U 上の L^p 空間を表すものとする．

例. 可測空間 $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上の**数え上げ測度** $\#$ を，任意の $E\subset\mathbb{N}$ に対して

$$\#(E)=\sum_{j\in E}1=(E\text{の元の個数})$$

で定義する．各 $p\in[1,\infty]$ に対し,

$$\ell^p(\mathbb{N})=L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\#)$$

とおく．このとき，任意の $p\in[1,\infty)$ に対し

$$\ell^p(\mathbb{N})=\Big\{u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C};\ \sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|^p<\infty\Big\},\qquad\|u\|_p=\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|^p\Big)^{1/p},$$

$$\ell^\infty(\mathbb{N})=\Big\{u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C};\ \sup_{j\in\mathbb{N}}|u_j|<\infty\Big\},\qquad\|u\|_\infty=\sup_{j\in\mathbb{N}}|u_j|$$

が成り立つ．ただし，$u_j=u(j)$ と書いた．

注意． 1．$p \in [1,\infty)$ に対し上の主張を示すには，以下の事実に注意すればよい．まず，任意の関数 $u\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 可測である．さらに，これが $\#$ 可積分となるための必要十分条件は

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j| < \infty$$

であり，このとき，

$$\int_{\mathbb{N}} u \,\mathrm{d}\# = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j$$

が成り立つ．(**問．** これを確かめよ．)

2．同様に，$\ell^p(\mathbb{Z})$ なども定義される．まとめて単に ℓ^p と書くこともある．

○ **Hölderの不等式**

定理 1.1 (Hölderの不等式). $p,q \in [1,\infty]$ は

$$1 \le p \le q \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする．ただし，$p=1$ のときは，$q=\infty$ とする．このとき，任意の $f \in L^p(\Omega)$ と $g \in L^q(\Omega)$ に対し，積 fg は μ 可積分であり，

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$$

が成り立つ．

証明． $p=1$，$q=\infty$ なら

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_\infty \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

なので，主張が成り立つ．

次に $1 < p \le q < \infty$ とする．このとき，まず任意の $a,b \ge 0$ に対し

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つことに注意する．実際，$\phi(a) = a^p/p + b^q/q - ab$ とおくと，$\phi'(a) = a^{p-1} - b$ より，$\phi(a) \ge \phi(b^{1/(p-1)}) = 0$ となって確かに $(\clubsuit)$ が従う．さて，$\|f\|_p\|g\|_q = 0$ なら主張は明らかなので，$\|f\|_p\|g\|_q \ne 0$ としてよい．このとき，$(\clubsuit)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \frac{1}{p}\|f\|_p^{-p}\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\|g\|_q^{-q}\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

である．したがって主張が示された． □

○ **Lebesgue空間の包含関係**

一般に，$p < q$ であっても，$L^p(\Omega)$ と $L^q(\Omega)$ の間に包含関係はない．しかし，特定の条件下では包含関係が成立することがある．

命題 1.2. $\mu(\Omega) < \infty$ ならば，任意の $1 \le p \le q \le \infty$ に対して

$$L^p(\Omega) \supset L^q(\Omega)$$

が成り立つ．さらに，任意の $f \in L^q(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_p \le \mu(\Omega)^{1/p-1/q}\|f\|_q$$

が成り立つ．

証明. $p=q=\infty$ のときは自明である．

$1 \le p < q = \infty$ のとき，任意の $f \in L^\infty(\Omega)$ に対し

$$\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f\|_\infty^p \,\mathrm{d}\mu = \mu(\Omega)\|f\|_\infty^p$$

なので，$f \in L^p(\Omega)$ であり，主張の不等式も上から従う．

$1 \le p \le q < \infty$ のとき，任意の $f \in L^q(\Omega)$ に対し Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu &\le \left(\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}\mu\right)^{(q-p)/q} \left(\int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{p/q} \\ &= \mu(\Omega)^{(q-p)/q}\|f\|_q^p\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$f \in L^p(\Omega)$ であり，主張の不等式も上から従う． □

命題 1.3. 任意の $1 \le p \le q \le \infty$ に対して，

$$\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

が成り立つ．さらに，任意の $u \in \ell^p(\mathbb{N})$ に対して

$$\|u\|_q \le \|u\|_p$$

が成り立つ．

証明. *Step 1*. まず，任意の $\alpha \ge 1$ を固定して，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $a_1, \dots, a_n \ge 0$ に対し

$$a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha \le (a_1 + \cdots + a_n)^\alpha \tag{$\spadesuit$}$$

が成り立つことを示そう．帰納法を用いる．$n=2$ のとき，$a_1 + a_2 > 0$ としてよく，このとき，

$$\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^\alpha \le \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_2} = 1$$

が成り立つ．また，ある n に対し ($\spadesuit$) を仮定する．任意の $a_1, \dots, a_{n+1} \ge 0$ をとる．このとき，$a_1 + \cdots + a_{n+1} > 0$ としてよく，さらに適当に並べ替えて $a_1 + \cdots + a_n > 0$ としておけば，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1}{a_1+\cdots+a_{n+1}}\right)^\alpha + \cdots + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1+\cdots+a_{n+1}}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1+\cdots+a_{n+1}}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a_1}{a_1+\cdots+a_n}\right)^\alpha + \left(\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_n}\right)^\alpha\right] \\ &\quad + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1+\cdots+a_{n+1}}\right)^\alpha \\ &\le \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1+\cdots+a_{n+1}}\right)^\alpha + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1+\cdots+a_{n+1}}\right)^\alpha \\ &\le \frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1+\cdots+a_{n+1}} = 1\end{aligned}$$

を得る．

Step 2. さて，主張を示そう．$q=\infty$ なら主張は明らかなので，$q<\infty$ の場合を考える．任意の $u \in \ell^p(\mathbb{N})$ に対し，$\alpha = q/p$ かつ $a_j = |u_j|^p$ として ($\spadesuit$) を適用すると

$$\left(|u_1|^q + \cdots + |u_n|^q\right)^{1/q} \le \left(|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p\right)^{1/p}$$

となる．ここで $n \to \infty$ とすれば，

$$\|u\|_q \le \|u\|_p < \infty$$

となり，確かに主張が従う． □

注意. 粗く言えば，積分が発散する要因は二つあり，それらは

1. 関数の局所的な特異性（発散）の強さ
2. 関数の空間遠方での増大の強さ（減衰の不十分さ）

である．$|f|^p$ において，$p \in [1,\infty]$ が大きいほど，前者は強くなり，後者は弱くなることに注意しよう．命題 1.2 は，仮定 $\mu(\Omega) < \infty$ により空間遠方に相当する部分が存在せず，前者のみで積分の収束を判定できるために包含関係が成立する，と解釈できる．逆に命題 1.3 は，$\ell^p(\mathbb{N})$ が関数に局所的な特異性を許さない関数空間であることから，後者のみを考慮すればよく，それゆえ逆の包含関係が成立する，と解釈できる．

問. 上の説明に注意して，任意の $1 \le p < q \le \infty$ に対し，$L^p(\mathbb{R})$ と $L^q(\mathbb{R})$ の間には包含関係がないことを例を挙げて確かめよ．

○ **Minkowski の不等式（三角不等式）**

定理 1.4（Minkowski の不等式）. $p \in [1,\infty]$ とする．このとき，任意の $f, g \in L^p(\Omega)$ に対して，$f+g \in L^p(\Omega)$ であり，さらに

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

が成り立つ．特に，$L^p(\Omega)$ は自然な和とスカラー倍に関して線形空間となる．

証明. $p = 1, \infty$ なら主張は易しいので，$1 < p < \infty$ とする．このとき，任意の $f, g \in L^p(\Omega)$ とほとんどすべての $x \in \Omega$ に対し

$$\begin{aligned}
|f(x)+g(x)|^p &\le \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big)^p \\
&\le \Big(2\max\Big\{|f(x)|, |g(x)|\Big\}\Big)^p \\
&\le 2^p \max\Big\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\Big\} \\
&\le 2^p\Big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\Big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$f+g \in L^p(\Omega)$ である．さらに，Hölder の不等式より，$q = p/(p-1)$ に対し

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}\Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) \\
&= \|f+g\|_p^{p/q}\Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)
\end{aligned}$$

である．もし $\|f+g\|_p \neq 0$ なら，上式の両辺を $\|f+g\|_p^{p/q}$ で割ることで主張の不等式が従う．一方，$\|f+g\|_p = 0$ の場合には，主張の不等式は明らかである．よって主張が示された． □

§ 1.2 ノルム空間

定義. X を $\mathbb{C}$ 線形空間とする．写像 $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ が X 上の**ノルム**であるとは，以下を満たすことである．

1. 任意の $u \in X$ に対し $\|u\| \ge 0$ が成り立つ；
2. $\|u\| = 0$ となるための必要十分条件は $u = 0$ である；
3. 任意の $c \in \mathbb{C}$ と $u \in X$ に対し $\|cu\| = |c|\|u\|$ が成り立つ；
4. 任意の $u, v \in X$ に対し $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$（**三角不等式**）が成り立つ．

このとき，$(X, \|\cdot\|)$ または単に X を**ノルム空間**と呼ぶ．

問. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ に対し

$$\Big|\|u\| - \|v\|\Big| \le \|u - v\|$$

が成り立つ事を示せ．

例. $p \in [1, \infty]$ とする．$L^p(\Omega)$ は L^p ノルム $\|\cdot\|_p$ に関してノルム空間となる．特に，三角不等式はMinkowskiの不等式に他ならないことに注意せよ．

例. $K \subset \mathbb{R}^d$ を有界閉集合とし，$C(K)$ を K 上の連続関数全体の集合とする．また，任意の $f \in C(K)$ に対し，その**一様ノルム**を

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

で定義する．このとき，$C(K)$ は一様ノルムに関してノルム空間となる．

問. $C(K)$ が一様ノルムに関してノルム空間となることを確かめよ．

○ **自然な距離**

命題 1.5. X をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ に対し

$$\mathrm{dist}(u, v) = \|u - v\|$$

と定めると，dist は X 上の**距離**である（**自然な距離**と呼ぶ）．すなわち，

1. 任意の $u, v \in X$ に対し $\mathrm{dist}(u, v) \geq 0$ が成り立つ；
2. $\mathrm{dist}(u, v) = 0$ となるための必要十分条件は $u = v$ である；
3. 任意の $u, v \in X$ に対し $\mathrm{dist}(u, v) = \mathrm{dist}(v, u)$ が成り立つ；
4. 任意の $u, v, w \in X$ に対し $\mathrm{dist}(u, w) \leq \mathrm{dist}(u, v) + \mathrm{dist}(v, w)$ が成り立つ．

証明．ほぼ明らかなので，証明は省略する． □

○ **自然な位相**

定義. X をノルム空間とする．X 上の**自然な位相**とは，自然な距離から定まる位相のことである．

注意. 以降，ノルム空間は，常にその自然な位相に関して位相空間とみなす．特に，定義によれば，X 上の点列 $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ が $u \in X$ に収束するとは

$$\lim_{j \to \infty} \|u - u_j\| = 0$$

が成り立つことである．このとき，これを

$$u = \lim_{j \to \infty} u_j \quad \text{あるいは} \quad u_j \to u \ (j \to \infty)$$

などで表す．

問. $K \subset \mathbb{R}^d$ を有界閉集合とする．$C(K)$ の任意の関数列に対し，一様ノルムに関する収束と一様収束は同等であることを示せ．

○ **構造の連続性**

命題 1.6. X をノルム空間とする．このとき，以下が成り立つ．

1. 加法 $X \times X \to X$ は連続である．すなわち，$u_j \to u$ かつ $v_j \to v$ ならば，$u_j + v_j \to u + v$ が成り立つ．
2. スカラー倍 $\mathbb{C} \times X \to X$ は連続である．すなわち，$c_j \to c$ かつ $u_j \to u$ ならば，$c_j u_j \to cu$ が成り立つ．
3. ノルム $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ は連続である．すなわち，$u_j \to u$ ならば，$\|u_j\| \to \|u\|$ が成り立つ．

証明．**問**として省略する． □

§ 1.3 Banach空間

定義. ノルム空間 X 上の点列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が **Cauchy列**であるとは，

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\geq 0\ \ \text{s.t.}\ \ \forall j,k\geq N\ \|u_j-u_k\|<\epsilon$$

が成り立つことである．

注意. X 上の任意の収束列はCauchy列である．実際，もし $u_j\to u$ ならば，

$$\|u_j-u_k\|\leq\|u_j-u\|+\|u-u_k\|\to 0\ \ (j,k\to\infty)$$

が成り立つ．

定義. ノルム空間 X が**完備**であるとは，X 上の任意のCauchy列が X のある点に収束することである．完備なノルム空間を **Banach空間**と呼ぶ．

定理 1.7. 任意の $p\in[1,\infty]$ に対し，$L^p(\Omega)$ はBanach空間である．

証明. 完備性を確かめればよい．ここでは $p<\infty$ の場合のみ示し，$p=\infty$ の場合は問として省略する．$(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を $L^p(\Omega)$ の任意のCauchy列とする．

Step 1. まず，ある部分列 $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，

$$\|f_{j_{k+1}}-f_{j_k}\|_p<2^{-k}$$

が成り立つ．実際，仮定よりある $j_1\geq 1$ が存在して，任意の $j\geq j_1$ に対し

$$\|f_j-f_{j_1}\|_p<2^{-1}$$

が成り立つ．次に，$j_2>j_1$ を十分大きく選べば，任意の $j\geq j_2$ に対し

$$\|f_j-f_{j_2}\|_p<2^{-2}$$

が成り立つ．これを繰り返せばよい．

Step 2. $\phi_k=f_{j_k}$ とおく．$g_2,g_3,\ldots\in L^p(\Omega)$ を，各 $x\in\Omega$ に対し

$$g_l(x)=|\phi_1(x)|+\sum_{k=1}^{l-1}|\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)|$$

で定める．任意の $x\in\Omega$ に対し，実数列 $(g_l(x))_{l\geq 2}$ は単調非減少なので，

$$g(x)=\lim_{l\to\infty}g_l(x)\leq\infty$$

が存在するが，このとき，さらに $g\in L^p(\Omega)$ である．実際，単調収束定理とMinkowskiの不等式により

$$\begin{aligned}\int_\Omega|g|^p\,\mathrm{d}\mu&=\lim_{l\to\infty}\int_\Omega|g_l|^p\,\mathrm{d}\mu\\&\leq\lim_{l\to\infty}\left(\|\phi_1\|_p+\sum_{k=1}^{l-1}\|\phi_{k+1}-\phi_k\|_p\right)^p\\&\leq\left(\|\phi_1\|_p+1\right)^p<\infty\end{aligned}$$

である．特に，g は Ω 上ほとんど至るところ有限であることに注意する．

Step 3. ほとんどすべての $x\in\Omega$ に対し

$$f(x):=\lim_{k\to\infty}\phi_k(x)\qquad(\clubsuit)$$

が存在し，さらに $f\in L^p(\Omega)$ である．実際，任意の $x\in\Omega$ と $m>l$ に対し

$$|\phi_m(x)-\phi_l(x)|\leq\sum_{k=l}^{m-1}|\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)|\leq g_m(x)-g_l(x)\qquad(\spadesuit)$$

であり，ほとんどすべての $x\in\Omega$ に対し $(g_l(x))_{l\geq 2}$ がCauchy列であったことから，同じ $x\in\Omega$ に対して $(\clubsuit)$ は収束する．さらに，三角不等式より

$$|f(x)|=\lim_{k\to\infty}|\phi_k(x)|\leq\lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$$

なので，$g\in L^p(\Omega)$ から $f\in L^p(\Omega)$ が従う．

Step 4. $L^p(\Omega)$ の位相において，$(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が f に収束することを示す．まず，(♣) が成立することに注意する．また，(♠) において $m\to\infty$ とすると

$$\left|f(x)-\phi_l(x)\right|\le g(x)-g_l(x)\le g(x)$$

である．$g\in L^p(\Omega)$ より，Lebesgue 収束定理を適用して，

$$\lim_{l\to\infty}\|f-\phi_l\|_p=0$$

を得る．

Step 5. 最後に $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が f に収束することを示す．任意の $\epsilon>0$ に対しある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $j,l>N$ に対し

$$\|f_j-f_l\|_p<\epsilon$$

が成り立つ．ここで $l=j_k$ ととって $k\to\infty$ とすると，任意の $j>N$ に対し

$$\|f_j-f\|_p\le\epsilon$$

が成り立つ．これより主張が従う．□

問. $p=\infty$ の場合に対し，定理 1.7 の証明を与えよ．

問. $K\subset\mathbb{R}^d$ を有界閉集合とする．$C(K)$ は一様ノルムに関して Banach 空間であることを示せ．

例. 任意の $p\in[1,\infty]$ と $s\in\mathbb{R}$ に対し，**s 次重み付き L^p 空間**および **s 次重み付き L^p ノルム**をそれぞれ

$$L^p_s(\mathbb{R}^d)=\left\{u\colon\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{C}};\ \langle x\rangle^s u\in L^p(\mathbb{R}^d)\right\},\quad \|u\|_{L^p_s}=\|\langle x\rangle^s u\|_{L^p}$$

で定める．ただし，任意の $x\in\mathbb{R}^d$ に対し

$$x^2=x\cdot x=x_1^2+\cdots+x_d^2,\quad \langle x\rangle=(1+x^2)^{1/2}$$

とおいた．このとき，$L^p_s(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間となる．実際，Lebesgue 可測空間 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度 ν を

$$\nu(E)=\int_E\langle x\rangle^{ps}\,\mathrm{d}x\quad\text{for } E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$$

で定めると，測度論の一般論より

$$L^p_s(\mathbb{R}^d)=L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d),\nu)$$

が成り立つ．したがって定理 1.7 から，$L^p_s(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間である．

§ 1.4 Hilbert 空間

定義. X を $\mathbb{C}$ 線形空間とする．写像 $(\cdot,\cdot)\colon X\times X\to\mathbb{C}$ が X 上の**内積**であるとは，以下を満たすことである．

1. 任意の $u\in X$ に対し $(u,u)\ge 0$ が成り立つ；
2. $(u,u)=0$ なるための必要十分条件は $u=0$ である；
3. 任意の $u,v\in X$ に対し $(u,v)=\overline{(v,u)}$ が成り立つ；
4. 任意の $a,b\in\mathbb{C}$ と $u,v,w\in X$ に対し $(au+bv,w)=a(u,w)+b(v,w)$ が成り立つ．

このとき，$(X,(\cdot,\cdot))$ または単に X を**内積空間**（**前 Hilbert 空間**）と呼ぶ．

例. $L^2(\Omega)$ は内積

$$(f,g)=\int_\Omega f\bar{g}\,\mathrm{d}\mu,\quad f,g\in L^2(\Omega),$$

に関して内積空間となる．なお任意の $f,g\in L^2(\Omega)$ に対し $f\bar{g}$ が可積分であることは，例えばHölderの不様式から分かる．特に，$\ell^2(\mathbb{N})$ の内積は

$$(u,v)=\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j\bar{v}_j,\quad u,v\in\ell^2(\mathbb{N}),$$

で与えられる．

問. このことを確かめよ．

○ **自然なノルム**

定理 1.8. X を内積空間とし，任意の $u\in X$ に対し

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)}$$

と定める．このとき，以下が成り立つ．

1. (**Cauchy–Schwarzの不等式**) 任意の $u,v\in X$ に対して

$$|(u,v)|\le\|u\|\|v\|$$

が成り立つ．

2. $\|\cdot\|$ は X 上のノルムである．

注意. 上の $\|\cdot\|$ を X 上の**自然なノルム**と呼ぶ．以降，内積空間は自然なノルムに関してノルム空間とみなし，特に位相空間とみなす．

証明. *1.* $v\neq 0$ としてよい．このとき，$\alpha=-(u,v)/\|v\|^2$ とおくと

$$\begin{aligned}0&\le(u+\alpha v,u+\alpha v)\\&=\|u\|^2+\bar{\alpha}(u,v)+\alpha(v,u)+|\alpha|^2\|v\|^2\\&=\|u\|^2-|(u,v)|^2/\|v\|^2\end{aligned}$$

なので，求める結論が従う．

2. 三角不等式のみを示す．Cauchy–Schwarzの不等式より

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=\|u\|^2+\overline{(u,v)}+(u,v)+\|v\|^2\\&\le\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2\\&=(\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

なので，求める結論が従う． □

問. X を内積空間とする．内積 $(\cdot,\cdot)\colon X\times X\to\mathbb{C}$ は自然な位相に関して連続であることを示せ．

○ **内積空間の特徴付け**

定理 1.9. 1. (**中線定理**) X を内積空間とする．任意の $u,v\in X$ に対し

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\big(\|u\|^2+\|v\|^2\big)\qquad(\heartsuit)$$

が成り立つ．

2. X をノルム空間とする．もし任意の $u,v\in X$ に対し $(\heartsuit)$ が成り立つなら，

$$(u,v)=\frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+\mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2-\mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2\big)$$

は X 上の内積を定める．さらにこの内積は X 上の元々のノルムと**両立する**，すなわち，$(\cdot,\cdot)$ が定める自然なノルムは $\|\cdot\|$ に一致する．

注意. 主張2に現れる内積のノルムによる表示公式を，**極化恒等式**と呼ぶ．

証明. *1.* 任意の$u, v \in X$に対し，直接計算により

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + \overline{(u,v)} + (u,v) + \|v\|^2 \\ &\quad + \|u\|^2 - \overline{(u,v)} - (u,v) + \|v\|^2 \\ &= 2\bigl(\|u\|^2 + \|v\|^2\bigr)\end{aligned}$$

が成り立つ．

2. $(\cdot,\cdot)$が内積の公理を満たすことの証明は省略する．またこのとき，任意の$u \in X$に対して

$$(u,u) = \frac{1}{4}\bigl(\|2u\|^2 + \mathrm{i}\|(1+\mathrm{i})u\|^2 - \mathrm{i}\|(1-\mathrm{i})u\|^2\bigr) = \|u\|^2$$

なので，$(\cdot,\cdot)$から定まる自然なノルムはX上の元々のノルムに一致する． □

問. 上の$(\cdot,\cdot)$が内積の公理を満たすことを示せ（やや長い議論が必要である）．

系 1.10. $p \in [1,\infty] \setminus \{2\}$とする．もしある$E, F \in \mathcal{B}$が存在して

$$E \cap F = \emptyset, \quad \mu(E) > 0, \quad \mu(F) > 0$$

が成り立てば，$L^p(\Omega)$上の内積でL^pノルムと両立するものは存在しない．

証明. $p = \infty$の場合は省略し，$p < \infty$の場合のみ考える．このとき

$$f = \mu(E)^{-1/p}\chi_E, \quad g = \mu(F)^{-1/p}\chi_F$$

とおくと，$E \cap F = \emptyset$に注意して，

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2^{1+2/p}, \quad 2\bigl(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\bigr) = 4$$

となる．すると定理 1.9 より，L^pノルムと両立する内積が存在するには

$$2^{1+2/p} = 4$$

が必要であるが，これは$p \neq 2$に矛盾する．よって主張は示された． □

問. $p = \infty$の場合に対し，定理 1.10 の 2 の証明を与えよ．

○ **Hilbert空間**

定義. 自然なノルムに関して完備な内積空間を，**Hilbert空間**と呼ぶ．

定理 1.11. $L^2(\Omega)$において，L^2内積はL^2ノルムと両立する．このことから特に，$L^2(\Omega)$はHilbert空間である．

証明. これまでの議論から明らかなので，証明を省略する． □

例. 定理 1.11 より特に，任意の$s \in \mathbb{R}$に対し$L^2_s(\mathbb{R}^d)$は内積

$$(f,g)_{L^2_s} = \int_\Omega \langle x\rangle^{2s} f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu, \quad f, g \in L^2_s(\mathbb{R}^d),$$

に関してHilbert空間となる．

§ 1.5 たたみ込み

定義. 2つの関数$f, g\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{C}}$に対し，積分

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

が適当な意味を持ち，それにより新たな関数$f*g\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{C}}$が定まるとき，これを$f$と$g$の**たたみ込み**または**合成積**と呼ぶ．

注意. Riemann和を用いて近似的に

$$(f*g)(x) \sim \sum f(x-y_j)g(y_j)\Delta y_j$$

と表示すれば，$f*g$とはgの分布に沿ってfの平行移動を並べ，重ね合わせたものと見ることもできる．

定理 1.12. $p \in [1,\infty]$ とし，$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $f(x-\cdot)g$ および $g(x-\cdot)f$ は可積分であり，

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$
$$(g*f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

と定めると，

$$f*g = g*f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \|f*g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$$

が成り立つ．

注意. 一般に，Banach空間 $(X,\|\cdot\|_X)$，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ と線形写像 $T\colon X \to Y$ に対し，T が**有界**であるとは，ある $M \ge 0$ が存在して任意の $u \in X$ に対し

$$\|Tu\|_Y \le M\|u\|_X$$

が成り立つことである．定理 1.12は，L^1 関数によるたたみ込み作用素が，任意の $p \in [1,\infty]$ に対し，$L^p(\mathbb{R}^d)$ 上で有界であることを意味する．

問. X と Y をBanach空間とし，$T\colon X \to Y$ を線形写像とする．T が連続であるためには，T が有界であることが必要十分条件であることを示せ．

問. $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ がLebesgue可測ならば，$\phi(x,y) = f(x-y)$ で与えられる関数 $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ はLebesgue可測であることを示せ．

証明. $p=\infty$ の場合は易しいので省略し，$p \in [1,\infty)$ とする．$q \in [1,\infty]$ を $p^{-1}+q^{-1}=1$ ととると，Tonelliの定理とHölderの不等式により

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,\mathrm{d}y\right)^{p/q}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \|f\|_1^p\|g\|_p^p
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y$$

はほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対し有限であり，したがって $f(x-\cdot)g$ は可積分である．変数変換により，$g(x-\cdot)f$ も可積分であり，さらに

$$f*g = g*f$$

が分かる．残りの主張は上の計算から従う． □

○ **Friedrichsの軟化子**

定義. $U \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする．任意の $f \in C(U)$ に対し，その**台**を

$$\operatorname{supp} f = \overline{\left\{x \in U;\ f(x) \ne 0\right\}}$$

で定義する．ただし，上の右辺では $U \subset \mathbb{R}^d$ の相対位相に関する閉包を考えている．さらに，任意の $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ に対し

$$C_0^k(U) = \left\{f \in C^k(U);\ \operatorname{supp} f \subset U \text{ はコンパクト}\right\}$$

とおく．特に $k=0$ のときは，単に $C_0(U) = C_0^0(U)$ と書くこともある．

注意. 可測関数 $f\colon U \to \overline{\mathbb{C}}$ に対しては，一点毎の値には意味がないので，

$$\operatorname{supp} f = \left(\bigcup\left\{V \subset U;\ V \text{ は開集合，} f=0 \text{ a.e. on } V\right\}\right)^c$$

のように定義する．

問. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$を

$$f=\begin{cases}0 & \text{for } x\le 0,\\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{for } x>0\end{cases}$$

で定めると，$f\in C^\infty(\mathbb{R})$であることを示せ．さらに，任意の空でない開集合$U\subset\mathbb{R}^d$に対し，$C_0^\infty(U)\neq\emptyset$であることを示せ．

定義. 関数$\delta_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$で

$$\int_{\mathbb{R}^d}\delta_1(x)\,\mathrm{d}x=1$$

を満たすものをとり，任意の$\epsilon>0$に対し，$\delta_\epsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$を

$$\delta_\epsilon(x)=\epsilon^{-d}\delta_1(\epsilon^{-1}x)\quad\text{for } x\in\mathbb{R}^d$$

で定める．δ_ϵによるたたみ込み作用素を（**Friedrichsの**）**軟化子**と呼ぶ.

定理 1.13. $p\in[1,\infty]$，$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$かつ$\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$とする.

1. $\phi*f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$であり，任意の$j=1,\dots,d$に対し
$$\partial_{x_j}(\phi*f)=(\partial_{x_j}\phi)*f$$
が成り立つ.

2. 包含関係
$$\operatorname{supp}(\phi*f)\subset\Big\{y+z\in\mathbb{R}^d;\ y\in\operatorname{supp}\phi,\ z\in\operatorname{supp}f\Big\}$$
が成り立つ.

3. さらに$p\in[1,\infty)$とする．このとき，$L^p(\mathbb{R}^d)$の位相において
$$f=\lim_{\epsilon\to+0}(\delta_\epsilon*f),\quad\text{すなわち}\quad\lim_{\epsilon\to+0}\|f-\delta_\epsilon*f\|_p=0,$$
が成り立つ.

注意. $\delta_\epsilon*f$はfの分布に沿って近似デルタ関数δ_ϵを並べたものである.

証明. *1.* 等式

$$(\phi*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

において，右辺が無限回微分可能であり，微分と積分の順序交換が可能であることを示せばよい．しかし，$\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$であることと，$f$が任意のコンパクト集合上で可積分であることに注意すると，Lebesgue収束定理より結論が従う．詳細は省略する.

2. $x\in\mathbb{R}^d$が右辺の集合に属さないとする．このとき，任意の$y\in\mathbb{R}^d$に対し，

$$(y\in\operatorname{supp}f\ \text{かつ}\ x-y\notin\operatorname{supp}\phi)\quad\text{または}\quad y\notin\operatorname{supp}f$$

である．よって，任意の$y\in\mathbb{R}^d$に対し，

$$\phi(x-y)f(y)=0\qquad\therefore\ (\phi*f)(x)=0$$

が従う.

3. Step 1. まず任意の$f\in C_0(\mathbb{R}^d)\subset L^p(\mathbb{R}^d)$に対し主張を示す．ある$\kappa>0$が存在して，任意の$\epsilon>0$に対し

$$\operatorname{supp}\delta_\epsilon\subset\Big\{x\in\mathbb{R}^d;\ |x|\le\kappa\epsilon\Big\}$$

が成り立つことに注意する．すると，任意の$x\in\mathbb{R}^d$と$\epsilon>0$に対し

$$\begin{aligned}|f(x)-\delta_\epsilon*f(x)|&\le\int_{\mathbb{R}^d}|\delta_\epsilon(x-y)||f(x)-f(y)|\,\mathrm{d}y\\&\le\|\delta_1\|_1\sup_{|x-y|\le\kappa\epsilon}|f(x)-f(y)|\end{aligned}$$

が成り立つので，$\epsilon\to+0$のとき$\mathbb{R}^d$上で一様に$\delta_\epsilon*f\to f$である．一方，2の結果より

$$\operatorname{supp}(\delta_\epsilon*f)\subset\Big\{x+y\in\mathbb{R}^d;\ x\in\operatorname{supp}f,\ |y|\le\kappa\epsilon\Big\}=:S_\epsilon$$

であり，特に任意の$\epsilon\in(0,1]$に対し一様に

$$\operatorname{supp}f\subset S_1,\quad\operatorname{supp}(\delta_\epsilon*f)\subset S_1$$

が成り立つ．以上より，$\epsilon \to +0$のとき

$$\|f - \delta_\epsilon * f\|_p \le \mu(S_1)^{1/p}\|f - \delta_\epsilon * f\|_\infty \to 0$$

が従う．

Step 2. 一般の$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$に対し主張を示す．$C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$が稠密であることを既知とする．すなわち，任意の$\eta > 0$に対しある$\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$が存在して

$$\|f - \phi\|_p < \eta$$

が成り立つ．このϕに対しStep 1の結果を用いると，小さな$\epsilon > 0$に対し

$$\|\phi - \delta_\epsilon * \phi\|_p < \eta$$

が成り立つ．すると，Minkowskiの不等式および定理 1.12より

$$\begin{aligned}\|f - \delta_\epsilon * f\|_p &\le \|f - \phi\|_p + \|\phi - \delta_\epsilon * \phi\|_p + \|\delta_\epsilon * (\phi - f)\|_p \\ &< (2 + \|\delta_1\|_1)\eta\end{aligned}$$

が従う．よって主張は示された． □

系 1.14. 任意の開集合$U \subset \mathbb{R}^d$と$p \in [1, \infty)$に対し，$C_0^\infty(U) \subset L^p(U)$は稠密である．すなわち，任意の$f \in L^p(U)$と$\kappa > 0$に対し，ある$\phi \in C_0^\infty(U)$が存在して

$$\|f - \phi\|_p < \kappa$$

が成り立つ．

問. 任意の空ではない開集合$U \subset \mathbb{R}^d$に対し，$C_0(U) \subset L^\infty(U)$は稠密ではないことを示せ．このことから特に，$C_0^\infty(U) \subset L^\infty(U)$も稠密ではない．

証明. 任意の$f \in L^p(U)$と$\kappa > 0$をとる．任意の$\eta > 0$に対し

$$U_\eta = \left\{x \in U;\ \mathrm{dist}(x, U^c) > \eta,\ |x| < \eta^{-1}\right\}, \quad f_\eta = \chi_{U_\eta} f$$

とおく．ここで，

$$\mathrm{dist}(x, U^c) = \inf\{\mathrm{dist}(x, y);\ y \in U^c\}$$

とした．このとき，Lebesgue収束定理より

$$\lim_{\eta \to +0} \int_U |f - f_\eta|^p \, \mathrm{d}x = 0$$

であることに注意すると，十分に小さい$\eta > 0$に対し

$$\|f - f_\eta\|_p < \kappa$$

が成り立つ．一方，零拡張により$f_\eta \in L^p(\mathbb{R}^d)$とみなして定理 1.13を適用すると，十分小さい$\epsilon > 0$に対し

$$\delta_\epsilon * f_\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \mathrm{supp}(\delta_\epsilon * f_\eta) \subset U, \quad \|f_\eta - \delta_\epsilon * f_\eta\|_p < \kappa$$

が成り立つ．この$\delta_\epsilon * f_\eta$をUに制限すれば，

$$\delta_\epsilon * f_\eta \in C_0^\infty(U), \quad \|f - \delta_\epsilon * f_\eta\|_p < 2\kappa$$

が従う． □

○ **変分法の基本補題**

定義. 任意の開集合$U \subset \mathbb{R}^d$と$p \in [1, \infty]$に対し，U上の**局所L^p空間**を

$$L^p_{\mathrm{loc}}(U) = \left\{f \colon U \to \overline{\mathbb{C}};\ \forall K \Subset U\ f|_K \in L^p(K)\right\}$$

で定める．ここで，$K \Subset U$はKのU内での閉包がコンパクト（**相対コンパクト**）であることを意味し，$f|_K$はfのKへの制限である．

問. 包含関係$L^p(U) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(U) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(U)$を示せ．

注意. $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$は，局所的にはL^1の特異性を許容し，かつ，Uの境界近く（と無限遠方）での増大度に制限を課さないため，かなり「広い」関数空間である．なお，$L^p_{\mathrm{loc}}(U)$はノルム空間ではないが，ある**セミノルムの族**により**Fréchet空間**となり，距離と位相を入れることができる．

系 1.15 (変分法の基本補題). $U \subset \mathbb{R}^d$を空でない開集合とし，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$とする．もし任意の$\phi \in C_0^\infty(U)$に対し

$$\int_U f\phi \,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つなら，U上ほとんど至るところ$f = 0$である．

証明. 仮定から，任意の$\chi \in C_0^\infty(U)$に対し零拡張により$\chi f \in L^1(\mathbb{R}^d)$とみなすことができ，さらに任意の$\epsilon > 0$と$x \in \mathbb{R}^d$に対し

$$(\delta_\epsilon * (\chi f))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\epsilon(x-y)\chi(y)f(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

が成り立つ．すると，定理 1.13の3より$L^1(\mathbb{R}^d)$の位相において

$$\chi f = \lim_{\epsilon \to +0} \delta_\epsilon * (\chi f) = 0$$

となる．これと$\chi \in C_0^\infty(U)$が任意であったことから，主張が従う． □

第２章 緩増加超関数とFourier変換

§ 2.1 多重指数

本講では以下常に，$d \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$とする．

定義. 0以上の整数数全体の集合を

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

で表す．$\mathbb{N}_0^d$の元を**多重指数**と呼び，任意の$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$に対し，その**長さ**および**階乗**をそれぞれ

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \quad \alpha! = (\alpha_1!) \cdot \cdots \cdot (\alpha_d!)$$

で定義する．また，任意の$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$に対し，それぞれ

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_d \pm \beta_d) \in \mathbb{Z}^d$$

と定義し，順序関係$\alpha \le \beta$を

$$\alpha_j \le \beta_j \quad \text{for all } j = 1, \ldots, d,$$

により定義する．

定義（続き）. さらに，任意の$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$に対し**二項係数**を

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \quad \text{if } 0 \le \beta \le \alpha, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = 0 \quad \text{otherwise}$$

で定める．任意の$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$と$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$に対し，

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}, \quad \partial_j = \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

と書き，さらに記号

$$D_j = -\mathrm{i}\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$$

を導入する．このとき特に，$D^\alpha = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$であることに注意する．

問（二項定理）. 任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ および $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^d} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta$$

が成り立つことを示せ.

問（Leibniz則）. 任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ および $u, v \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^d} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} u)(\partial^\beta v)$$

が成り立つことを示せ.

問（Taylorの公式）. $k \in \mathbb{N}$ とする．任意の $u \in C^k(\mathbb{R}^d)$ および $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\begin{aligned} u(x+y) &= \sum_{|\alpha|<k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha u)(x) \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=k} \frac{k y^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} (\partial^\alpha u)(x+ty)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

§ 2.2 緩増加超関数

定義. $\mathbb{R}^d$ 上の**Schwartz空間**を

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty \right\}$$

により定義する．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元を**急減少関数**または**Schwartz関数**と呼ぶ．また，任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と $k \in \mathbb{N}_0$ に対し

$$|u|_k = |u|_{k,\mathcal{S}} = \sup\left\{ \langle x \rangle^l |\partial^\alpha u(x)|;\ l + |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{R}^d \right\} < \infty$$

と定め，これを $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の**セミノルム**または**半ノルム**と呼ぶ.

問. $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を示せ．さらに $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R})$ を示せ.

問. $\langle x \rangle^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ となるためには，$s > d$ が必要十分であることを示せ.

命題 2.1. 任意の $p \in [1, \infty]$ と $s \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_s^p(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ．さらに，ある $C > 0$ と $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して，任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\|u\|_{L_s^p} \le C |u|_k$$

が成り立つ.

注意. 主張の不等式は埋め込み写像 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_s^p(\mathbb{R}^d)$ の連続性を意味する.

証明. 任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_s^p} &= \left\| \langle x \rangle^{-(d+1)/p} \cdot \langle x \rangle^{s+(d+1)/p} u \right\|_{L^p} \\ &= \left\| \langle x \rangle^{-(d+1)/p} \right\|_{L^p} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \langle x \rangle^{s+(d+1)/p} u(x) \right| \\ &\le C |u|_k \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$C = \|\langle x \rangle^{-(d+1)/p}\|_{L^p}$，$k \ge s + (d+1)/p$ ととった．よって主張は示された. □

定義. 1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の**線形汎関数**とは，線形写像 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ のことである．任意の線形汎関数 $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ と $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$T(\phi) = T\phi = \langle T, \phi \rangle$$

などと表す.

2. $\mathbb{R}^d$ 上の**緩増加超関数**とは，線形汎関数 $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ で，ある $C > 0$ と $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して，任意の**テスト関数** $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$|\langle T, \phi \rangle| \le C|\phi|_k \qquad (\diamondsuit)$$

を満たすもののことである．$\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数全体の集合を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ で表す.

注意. 1. 条件 $(\diamondsuit)$ は $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ の連続性を意味する.

2. 「緩増加」の条件を外したものは，**Schwartz 超関数**と呼ばれる.

命題 2.2. $p \in [1, \infty]$，$s \in \mathbb{R}$ かつ $u \in L^p_s(\mathbb{R}^d)$ とする．$\iota(u)\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ を，任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\langle \iota(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

で定めると，$\iota(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ である．さらに，写像

$$\iota\colon L^p_s(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad u \mapsto \iota(u)$$

は単射である.

注意. ι が単射であることから，以降は $u \in L^p_s(\mathbb{R}^d)$ とその像 $\iota(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ を同一視して単に

$$u = \iota(u)$$

と書き，さらにこの同一視を通じて

$$L^p_s(\mathbb{R}^d) = \iota(L^p_s(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

とみなす．これにより，遠方で多項式程度の増大を持つ広いクラスの関数が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に含まれることになる．また，以降は一般の緩増加超関数も通常の関数のように $u, v, \ldots$ などの記号で表すことにする.

証明. $u \in L^p_s(\mathbb{R}^d)$ とする．任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し，Hölder の不等式より，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)\phi(x)|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p_s}\|\phi\|_{L^q_{-s}} < \infty; \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

である．よって $\langle \iota(u), \phi \rangle$ は有限値であり，$\iota(u)$ は確かに $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数を定める.

次に連続性を確かめる．上の不等式と命題 2.1 により，ある $C > 0$ と $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して，任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$|\langle \iota(u), \phi \rangle| \le \|u\|_{L^p_s}\|\phi\|_{L^q_{-s}} \le C\|u\|_{L^p_s}|\phi|_k$$

が成り立つ．これは $\iota(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ を意味する.

最後に ι の単射性を示す．もし $u, v \in L^p_s(\mathbb{R}^d)$ かつ $\iota(u) = \iota(v)$ なら，任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^d} (u(x) - v(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ．すると変分法の基本補題より，$\mathbb{R}^d$ 上ほとんど至るところ $u = v$ である．したがって ι は単射である. $\square$

○ **Diracのデルタ関数**

命題 2.3. 任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$に対して
$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$
と定めると，$\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$である（これを**Diracのデルタ関数**と呼ぶ）.

証明. 証明は易しいので省略し，以下で問とする. □

問. 1. 上で定まる線形汎関数δが$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$に属することを確かめよ.

2. 任意の$p \in [1, \infty]$と$s \in \mathbb{R}$に対し，$\delta \notin L^p_s(\mathbb{R}^d)$を確かめよ．より正確には，埋め込み
$$\iota \colon L^p_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$
の像にδが属さないことを確かめよ．このことから特に，通常の関数では書けない緩増加超関数も存在する.

○ **Cauchyの主値**

$\mathbb{R}$上の関数x^{-1}は原点で強い特異性を持つため，$L^p_s(\mathbb{R})$に属さず，そのままでは$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$に埋め込めない．以下のように，適当な正則化が必要となる.

命題 2.4. 任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$に対して
$$\left\langle \mathrm{p.v.}\, x^{-1}, \phi \right\rangle = \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
と定めると，$\mathrm{p.v.}\, x^{-1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$である.

注意. 広義Riemann積分よりもさらに特殊な極限の取り方をしていることに注意する．このような積分を一般に**Cauchyの主値**と呼ぶ.

証明. 任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$をとる．積分を
$$\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\epsilon \leq |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
のように分解する．上の右辺第1項について，x^{-1}が奇関数であることと微分積分学の基本定理より，
$$\begin{aligned}\int_{\epsilon \leq |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\epsilon \leq |x| < 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\epsilon \leq |x| < 1} \left(\int_0^1 \phi'(tx)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{0 \leq t \leq 1,\, \epsilon \leq |x| < 1} \phi'(tx)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\end{aligned}$$

と変形できる．すると，Lebesgue収束定理より
$$\left\langle \mathrm{p.v.}\, x^{-1}, \phi \right\rangle = \int_{0 \leq t \leq 1,\, 0 \leq |x| < 1} \phi'(tx)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
を得る．この表示より，$\mathrm{p.v.}\, x^{-1}$は$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上の線形汎関数を定めることが分かり，さらにある$C > 0$が存在して，任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$に対し
$$\left| \left\langle \mathrm{p.v.}\, x^{-1}, \phi \right\rangle \right| \leq C |\phi|_1$$
を満たすことも分かる．よって，主張は示された. □

○ **Sokhotski–Plemeljの定理**

定理 2.5. 任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$に対し，それぞれ

$$\left\langle (x \pm \mathrm{i}0)^{-1}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x \pm \mathrm{i}\epsilon} \, \mathrm{d}x$$

と定めると，$(x \pm \mathrm{i}0)^{-1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$である．さらに，等式

$$(x \pm \mathrm{i}0)^{-1} = \mathrm{p.v.}\, x^{-1} \mp \mathrm{i}\pi\delta$$

がそれぞれ成立する．

注意. 1. 上の等式は**Sokhotski–Plemeljの定理**と呼ばれることもある．

2. $(x \pm \mathrm{i}0)^{-1}$も原点以外ではx^{-1}と一致しており，x^{-1}の$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$への埋め込みとみなせるが，$\mathrm{p.v.}\, x^{-1}$とは正則化の仕方が異なっている．

証明. 任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$をとる．直接計算により，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x \pm \mathrm{i}\epsilon} \, \mathrm{d}x &= \int_{|x|<1} \frac{x\phi(x)}{x^2 + \epsilon^2} \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x \pm \mathrm{i}\epsilon} \, \mathrm{d}x \mp \mathrm{i}\epsilon \int_{|x|<1} \frac{\phi(x)}{x^2 + \epsilon^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{0 \leq t \leq 1,\, 0 \leq |x| < 1} \frac{x^2 \phi'(tx)}{x^2 + \epsilon^2} \, \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x \pm \mathrm{i}\epsilon} \, \mathrm{d}x \mp \mathrm{i} \int_{|y| < 1/\epsilon} \frac{\phi(\epsilon y)}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

と変形できる．ここで$\epsilon \to +0$とすると，Lebesgue収束定理と命題 2.4の証明における表示式より，

$$\begin{aligned}
\left\langle (x \pm \mathrm{i}0)^{-1}, \phi \right\rangle &= \int_{0 \leq t \leq 1,\, 0 \leq |x| < 1} \phi'(tx) \, \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x} \, \mathrm{d}x \mp \mathrm{i}\pi\phi(0) \\
&= \left\langle \mathrm{p.v.}\, x^{-1}, \phi \right\rangle \mp \mathrm{i}\pi \langle \delta, \phi \rangle
\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$(x \pm \mathrm{i}0)^{-1} = \mathrm{p.v.}\, x^{-1} \mp \mathrm{i}\pi\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

を得る． □

§ 2.3 超関数微分と掛け算作用素

命題 2.6. 任意の$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$と$\alpha \in \mathbb{N}_0^d$に対し，$\partial^\alpha u \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$を

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$$

で定義すると，$\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$である．

定義. 上の$\partial^\alpha u$をuの**超関数微分**あるいは**弱微分**などと呼ぶ．

注意. 任意の緩増加超関数は，超関数の意味で何回でも微分可能である．

証明. $\partial^\alpha u\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$の線形性はすぐに分かる．今，$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$であることから，ある$C>0$と$k\in\mathbb{N}_0$が存在して，任意の$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対して

$$|\langle u,\phi\rangle|\le C|\phi|_k$$

が成り立つ．このことに注意すると，任意の$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$|\langle\partial^\alpha u,\phi\rangle| = |\langle u,\partial^\alpha\phi\rangle|\le C|\partial^\alpha\phi|_k\le C|\phi|_{k+|\alpha|}$$

となる．よって，確かに$\partial^\alpha u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$である． □

定義. $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$が**緩増加関数**であるとは，任意の$\alpha\in\mathbb{N}_0^d$に対しある$C>0$と$s\in\mathbb{R}$が存在して，任意の$x\in\mathbb{R}^d$に対し

$$|\partial^\alpha f(x)|\le C\langle x\rangle^s$$

が成り立つことである．

命題 2.7. $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$を緩増加関数とし，また$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$とする．このとき，$M_f u\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$を

$$\langle M_f u,\phi\rangle=\langle u,f\phi\rangle\quad\text{for }\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\qquad(\spadesuit)$$

で定義すると，$M_f u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$である．

定義. 上の$M_f\colon\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$を$f$による**掛け算作用素**と呼ぶ．単に$M_f u=fu$と書くこともある．

注意. $M_f u$は通常の関数と関数の積の拡張となっている．なお，超関数と超関数の積は無条件では定義できない．

証明. *Step 1.* まず，任意の$k\in\mathbb{N}_0$に対しある$C_1>0$と$l\in\mathbb{N}_0$が存在して，任意の$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$|f\phi|_k\le C_1|\phi|_l\qquad(\heartsuit)$$

が成り立つことを示す．任意の$m+|\alpha|\le k$に対し，Leibniz則により

$$\langle x\rangle^m\partial^\alpha(f\phi)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\langle x\rangle^m(\partial^{\alpha-\beta}f)(\partial^\beta\phi)$$

である．仮定より，ある$C_2>0$と$s\in\mathbb{R}$が存在して，任意の$\beta\le\alpha$に対し

$$|\partial^{\alpha-\beta}f|\le C_2\langle x\rangle^s$$

が成り立つ．よって任意の$l\ge k+s\ge m+|\beta|+s$を固定すると

$$\begin{aligned}\Bigl|\langle x\rangle^m\partial^\alpha(f\phi)(x)\Bigr| &\le C_2\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\langle x\rangle^{m+s}|\partial^\beta\phi(x)|\\ &\le C_3\sup_{n+|\gamma|\le l,x\in\mathbb{R}^d}\langle x\rangle^n|\partial^\gamma\phi(x)|=C_3|\phi|_l\end{aligned}$$

とできる．ここで$C_3>0$は$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$によらない定数である．よって，$(\heartsuit)$が示された．

Step 2. Step 1の結果により，特に$f\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$であり，$(\spadesuit)$の右辺は意味を持つ．すると$M_f u\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$の線形性は明らかなので，あとは連続性を示せばよい．緩増加超関数の定義より，ある$C_4>0$と$k\in\mathbb{N}_0$が存在して，任意の$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$|\langle M_f u,\phi\rangle|=|\langle u,f\phi\rangle|\le C_4|f\phi|_k$$

が成り立つ．これを$(\heartsuit)$を合わせると，ある$C_5>0$と$l\in\mathbb{N}_0$が存在して，任意の$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$|\langle M_f u,\phi\rangle|\le C_5|\phi|_l$$

が成り立つことがわかる．よって定理の主張が示された． □

問. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ を緩増加関数とする．また，$\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ とする．

1. 超関数微分 $\partial^\alpha f$ が通常の微分 $\partial^\alpha f$ と一致することを確かめよ．より明確には，命題 2.2 の埋め込み ι を用いて，
$$\partial^\alpha \iota(f) = \iota(\partial^\alpha f)$$
が成り立つことを示せ．
2. 任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し，Leibniz 則
$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^d} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta u)$$
が成り立つことを示せ．

例. Heaviside 関数 $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を
$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0, \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$
で定義すると，等式
$$Y' = \delta$$
が成り立つ．実際，任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，超関数微分の定義により
$$\langle Y', \phi \rangle = -\langle Y, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle$$
である．

問. $\mathbb{R}$ 上のデルタ関数の n 階微分 $\delta^{(n)}$ はどのような超関数か計算せよ．

問. 関数 $G_d \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$d = 1, 2, 3$，を
$$G_1(x) = \frac{1}{2}|x|, \quad G_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|, \quad G_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$
により定める．このとき，
$$\Delta G_d = \delta; \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_d^2,$$
であることを示せ．一般にこのような G_d を，微分作用素 Δ の**基本解**あるいは **Green 関数**と呼ぶ．

§ 2.4 急減少関数の Fourier 変換

定義. $u, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の **Fourier 変換**，**逆 Fourier 変換**をそれぞれ
$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$(\mathcal{F}^* f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
で定義する．ただし，任意の $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ に対し
$$x\xi = x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d$$
と書いた．

注意. 文献によって係数や指数が異なるので，注意が必要である．

問. 任意の$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$と$y \in \mathbb{R}^d$に対し，

$$(\tau_y u)(x) = u(x-y), \quad (\sigma u)(x) = u(-x)$$

と定義する．このとき，

$$\mathcal{F}(\tau_y u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}(\mathcal{F}u), \quad \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\eta}u) = \tau_\eta(\mathcal{F}u), \quad \sigma(\mathcal{F}u) = \mathcal{F}(\sigma u)$$

が成り立つことを示せ．

定理 2.8. 任意の$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対して，$\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$である．また，任意の$\alpha \in \mathbb{N}_0^d$に対し

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha u) = \xi^\alpha(\mathcal{F}u), \quad \mathcal{F}(x^\alpha u) = (-D_\xi)^\alpha(\mathcal{F}u)$$

が成り立つ．さらに，任意の$k \in \mathbb{N}_0$に対しある$C > 0$と$l \in \mathbb{N}_0$が存在して，任意の$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$|\mathcal{F}u|_k \le C|u|_l$$

が成り立つ．

注意． 1．上の不等式は，$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$の連続性を意味する．

2．$\mathcal{F}^*$についても同様であるが，主張は省略する．ここでは

$$\mathcal{F}^*(D_\xi^\alpha f) = (-x)^\alpha(\mathcal{F}^*f), \quad \mathcal{F}^*(\xi^\alpha f) = D_x^\alpha(\mathcal{F}^*f)$$

であることにのみ注意する．

証明．任意の$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し，Fourier変換の定義と部分積分により

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(D_x^\alpha u)(\xi) &= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} D_x^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \bigl((-D_x)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\bigr) u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \xi^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \xi^\alpha(\mathcal{F}u)(\xi)
\end{aligned}$$

である．同様に，Fourier変換の定義とLebesgue収束定理により

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x^\alpha u)(\xi) &= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} x^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \bigl((-D_\xi)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\bigr) u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-D_\xi)^\alpha(\mathcal{F}u)(\xi)
\end{aligned}$$

を得る．これらの等式を用いると，任意の$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$と$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$に対し

$$\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}u(\xi)\right| &= \left|\mathcal{F}(D_x^\alpha x^\beta u)(\xi)\right| \\
&\le (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial_x^\alpha x^\beta u(x)\right| \mathrm{d}x \\
&\le (2\pi)^{-d/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^{-d-1}\,\mathrm{d}x\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^{d+1} |\partial_x^\alpha x^\beta u(x)|
\end{aligned}$$

と評価できる．したがって，$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に依らないある$C_{\alpha\beta} > 0$が存在して，

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}u(\xi)\right| \le C_{\alpha\beta}|u|_{|\alpha|+|\beta|+d+1}$$

が成り立つことが分かる．よって$\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$であり，さらに主張の不等式も従う． □

定理 2.9 (Fourier 反転公式). 任意の $u, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，それぞれ

$$u = \mathcal{F}^*\mathcal{F}u, \quad f = \mathcal{F}\mathcal{F}^*f$$

が成り立つ．

注意. このことから，$\mathcal{F}, \mathcal{F}^* \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ として，

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$$

である．さらに，$\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の**位相線形同型**（すなわち，連続かつ線形で，さらに逆が存在して，逆も連続かつ線形）であることが分かる．

補題 2.10. 各 $\epsilon > 0$ に対し，$\delta_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を

$$\delta_\epsilon(x) = (2\pi\epsilon)^{-d/2}\mathrm{e}^{-x^2/(2\epsilon)} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^d$$

で定める．このとき，

1. 以下の等式が成立する：

$$\mathcal{F}\delta_\epsilon = \mathcal{F}^*\delta_\epsilon = \epsilon^{-d/2}\delta_{1/\epsilon}, \quad \text{特に} \quad \mathcal{F}^*\mathcal{F}\delta_\epsilon = \mathcal{F}\mathcal{F}^*\delta_\epsilon = \delta_\epsilon.$$

2. 任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と $k \in \mathbb{N}_0$ に対し以下が成り立つ：

$$\delta_\epsilon * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad |u - \delta_\epsilon * u|_k \to 0 \quad \text{as } \epsilon \to +0.$$

注意. 主張２は

$$\lim_{\epsilon \to +0}(\delta_\epsilon * u) = u \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

を意味する．

証明. *1.* Fubini–Tonelli の定理により $d = 1$ の場合に帰着される．さらに変数変換により，

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\xi^2/2},$$

あるいは

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}\xi)^2/2}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{1/2}$$

を示せば十分である．Cauchy の積分定理によりまたさらに $\xi = 0$ の場合に帰着され，Gauss 積分の計算を計算すればよい．詳細は省略する．

2. Lebesgue 収束定理を用いて証明することができる．詳細は**問**として省略する．定理 1.13 の証明も参照せよ． □

定理 2.9 の証明. ２つの等式は同様に示せるので，前者のみを示す．

Step 1. まず，任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F}(\delta_\epsilon * u) = \delta_\epsilon * u \qquad (\Diamond)$$

を示す．実際，Fubini–Tonelli の定理と補題 2.10 の１により，

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^*\mathcal{F}(\delta_\epsilon * u))(x) &= (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}^*\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\delta_\epsilon(y-z)u(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y \\
&= \mathcal{F}^*\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}(\mathcal{F}\delta_\epsilon)(\xi)u(z)\,\mathrm{d}z \\
&= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}(\mathcal{F}\delta_\epsilon)(\xi)u(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\delta_\epsilon(x-z)u(z)\,\mathrm{d}z \\
&= (\delta_\epsilon * u)(x)
\end{aligned}$$

を得る．よって $(\Diamond)$ は示された．

Step 2. あとは，各点の意味で

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F}u = \lim_{\epsilon\to+0} \mathcal{F}^*\mathcal{F}(\delta_\epsilon * u), \quad u = \lim_{\epsilon\to+0}(\delta_\epsilon * u) \qquad (\clubsuit)$$

を示せば十分である．($\clubsuit$)の後者は補題 2.10の2から直ちに従う．($\clubsuit$)の前者については，定理 2.8により，任意の$k\in\mathbb{N}_0$に対しある$C>0$と$l\in\mathbb{N}_0$が存在して

$$|\mathcal{F}^*\mathcal{F}u - \mathcal{F}^*\mathcal{F}(\delta_\epsilon * u)|_k = |\mathcal{F}^*\mathcal{F}(u-\delta_\epsilon * u)|_k \le C|u-\delta_\epsilon * u|_l$$

が成り立つことに注意する．ここで再び補題 2.10の2を用いて，$\epsilon\to+0$とすれば，($\clubsuit$)の前者が従うことが分かる． □

注意. 極限等式($\clubsuit$)は，実際にはより強く，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$の位相で成立する

定理 2.11（Persevalの定理）. 任意の$u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$(\mathcal{F}u,\mathcal{F}v)=(u,v)$$

が成り立つ．ここで，$(\cdot,\cdot)$はL^2内積である．

証明. Fourier反転公式により，任意の$u,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$(\mathcal{F}u,f)=(u,\mathcal{F}^*f) \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つことを示せばよい．しかしこれは，L^2内積とFourier変換，逆Fourierの定義およびFubini–Tonelliの定理からすぐに従う． □

注意. ($\spadesuit$)は，$\mathcal{F}^*$が$\mathcal{F}$の**形式的共役**であることを意味する．後にL^2の意味でも共役となる様に拡張される．

問. Persevalの定理は，以下のPlancherelの定理と同等であることを示せ：任意の$u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し$\|\mathcal{F}u\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}$が成り立つ．

§ 2.5 緩増加超関数のFourier変換

Plancherelの定理とFourier反転公式より，任意の$u,f,\phi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$\langle\mathcal{F}u,\phi\rangle=\langle u,\mathcal{F}\phi\rangle, \quad \langle\mathcal{F}^*f,\psi\rangle=\langle f,\mathcal{F}^*\psi\rangle$$

が成り立つ．これを用いてFourier変換，逆Fourier変換を拡張する．

定義. $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$の**Fourier変換**$\mathcal{F}u\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$を

$$\langle\mathcal{F}u,\phi\rangle=\langle u,\mathcal{F}\phi\rangle \quad \text{for } \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

で定義する．また，$f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$の**逆Fourier変換**$\mathcal{F}^*f\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$を

$$\langle\mathcal{F}^*f,\phi\rangle=\langle f,\mathcal{F}^*\phi\rangle \quad \text{for } \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

で定義する．

定理 2.12. 1. 任意の$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$に対し$\mathcal{F}u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$である．

2. 上で定義された$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$上のFourier変換$\mathcal{F}$は，初めに$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上で定義されたものの拡張である.（よって，記号上区別しない.）

3. 任意の$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$と$\alpha\in\mathbb{N}_0^d$に対し

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha u)=\xi^\alpha(\mathcal{F}u), \quad \mathcal{F}(x^\alpha u)=(-D_\xi)^\alpha(\mathcal{F}u)$$

が成り立つ．

4.（**Fourier反転公式**）任意の$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$に対し

$$u=\mathcal{F}^*\mathcal{F}u$$

が成り立つ．

注意. $\mathcal{F}^*$についても同様の主張が成立するが，省略する．

証明. *1.* 定理 2.8より明らかである.

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上のFourier変換を，暫定的にそれぞれ$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}'}$で表すことにする．すると，任意の$u, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し，Fourier変換の定義，Plancherelの定理とFourier反転公式により

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{S}'}u, \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\phi \rangle = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{S}}u, \phi \rangle$$

が成り立つ．これは$\mathcal{F}_{\mathcal{S}'}u = \mathcal{F}_{\mathcal{S}}u$を意味する．

3. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$とする．定理 2.8より，任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し

$$\langle \mathcal{F}(D_x^\alpha u), \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D_x^\alpha \mathcal{F}\phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}(\xi^\alpha \phi) \rangle = \langle \xi^\alpha (\mathcal{F}u), \phi \rangle$$

が成り立つ．よって第1の等式が従う．第2の等式も同様である．

4. 定理 2.9を用いて，3と同様に議論すればよい．詳細は省略する． □

問. 以下の緩増加超関数のFourier変換を計算せよ．

1. 定数関数1およびデルタ関数δ
2. 定義関数$\chi_{[-1,1]}$（次節で述べるように，L^1関数として計算しても良い）
3. $u(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$（ただし$a > 0$とする；$L^1$関数として計算しても良い）
4. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$, $\cos ax$, $\sin ax$（ただし$a > 0$とする）
5. x^n（ただし，$n \in \mathbb{N}$とする）

○ L^1**関数のFourier変換**

定理 2.13. 任意の$u \in L^1(\mathbb{R}^d)$に対し，

$$(\mathcal{F}_{L^1}u)(\xi) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}u(x)\,\mathrm{d}x$$

と定める．このとき，$\mathcal{F}_{L^1}u \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$であり，さらに

$$\|\mathcal{F}_{L^1}u\|_{L^\infty} \le (2\pi)^{-d/2}\|u\|_{L^1} \qquad (\heartsuit)$$

および

$$\lim_{|\xi|\to\infty}(\mathcal{F}_{L^1}u)(\xi) = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

が成り立つ．

注意. 1. $(\heartsuit)$より，$\mathcal{F}_{L^1}\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$は有界である．

2. $(\diamondsuit)$は**Riemann–Lebesgueの補題**とも呼ばれる．

証明. 任意の$x, \xi \in \mathbb{R}^d$に対し

$$\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}u(x)\right| \le |u(x)|$$

が成り立つので，Lebesgue収束定理を用いれば，

$$\mathcal{F}_{L^1}u \in C(\mathbb{R}^d)$$

が示せる．また，任意の$\xi \in \mathbb{R}^d$に対し

$$\left|(\mathcal{F}_{L^1}u)(\xi)\right| \le (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}|u(x)|\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-d/2}\|u\|_{L^1}$$

なので，

$$\mathcal{F}_{L^1}u \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \|\mathcal{F}_{L^1}u\|_{L^\infty} \le (2\pi)^{-d/2}\|u\|_{L^1}$$

も従う．

さて，$(\diamondsuit)$ を示そう．$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ の稠密性より，任意の $\epsilon > 0$ に対し $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を

$$\|u - v\|_{L^1} < \epsilon$$

ととることができる．このような v を固定すると，$\mathcal{F}_{L^1} v = \mathcal{F} v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ であるから，ある $R > 0$ が存在して，任意の $|\xi| > R$ に対して

$$\left|(\mathcal{F}_{L^1} v)(\xi)\right| < \epsilon$$

が成り立つ．よって，任意の $|\xi| > R$ に対して

$$\left|(\mathcal{F}_{L^1} u)(\xi)\right| \leq \left|(\mathcal{F}_{L^1}(u - v))(\xi)\right| + \left|(\mathcal{F}_{L^1} v)(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-d/2}\epsilon + \epsilon$$

である．$(\diamondsuit)$ が示された． □

$u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対しては，緩増加超関数としても $\mathcal{F} u$ が定義されていたので，二通りの Fourier 変換が存在することになるが，実は両者は一致する．

定理 2.14. 任意の $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$\mathcal{F} u = \mathcal{F}_{L^1} u \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

である．よって特に，$u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のときには，$\mathcal{F} u$ に対しても定理 2.13 の主張が成立する．

証明. $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ は稠密なので，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の点列 $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ を

$$\|u - u_j\|_{L^1} \to 0 \quad \text{as } j \to \infty \qquad (\clubsuit)$$

ととれる．このとき，定理 2.13 より，

$$\left\|\mathcal{F}_{L^1} u - \mathcal{F}_{L^1} u_j\right\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-d/2}\|u - u_j\|_{L^1} \to 0 \quad \text{as } j \to \infty \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つことに注意する．

さて，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上では $\mathcal{F}_{L^1}$ と $\mathcal{F}$ が一致していたことから，任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\langle \mathcal{F}_{L^1} u_j, \phi \rangle = \langle \mathcal{F} u_j, \phi \rangle = \langle u_j, \mathcal{F}\phi \rangle$$

が成り立つ．ここで，$j \to \infty$ とすると，$(\clubsuit)$，$(\spadesuit)$ および $\mathcal{F}$ の定義を用いて，

$$\langle \mathcal{F}_{L^1} u, \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle \mathcal{F} u, \phi \rangle$$

を示すことができる．これは

$$\mathcal{F}_{L^1} u = \mathcal{F} u$$

を意味する． □

注意. 定理 2.14 により，定義域を除いて $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}_{L^1}$ を区別する必要はなくなったので，以降，$\mathcal{F}_{L^1}$ を単に $\mathcal{F}$ で表すことにする．

○ L^2 関数の Fourier 変換

定義. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，S, T, U を $\mathcal{H}$ 上の有界作用素とする．

1. S が T の**共役作用素**であるとは，任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し

$$(Tu, v) = (u, Sv)$$

   が成り立つことである．このとき，$S = T^*$ と表す．

2. U が $\mathcal{H}$ 上の**ユニタリ作用素**であるとは，

$$U^*U = UU^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

   が成り立つことである．

注意. 任意の有界作用素に対し，その共役作用素が一意的に存在することが知られている．証明は難しくはないが，ここでは省略する．

定理 2.15. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上で定義された$\mathcal{F},\mathcal{F}^*$は，それぞれ$L^2(\mathbb{R}^d)$上のユニタリ作用素$\mathcal{F}_{L^2},(\mathcal{F}^*)_{L^2}$に一意的に拡張され，さらに

$$(\mathcal{F}_{L^2})^* = (\mathcal{F}^*)_{L^2}$$

が成り立つ.（よって，単に$\mathcal{F}^*_{L^2} = (\mathcal{F}_{L^2})^* = (\mathcal{F}^*)_{L^2}$と書いてよいだろう.）

証明. *Step 1.* まず$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上で定義された$\mathcal{F}$が，$L^2(\mathbb{R}^d)$上の有界作用素に一意的に拡張されることを示す．任意の$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$に対し，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上の点列$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$で

$$\|u - u_j\|_{L^2} \to 0 \quad \text{as } j \to \infty$$

を満たすものをとる．特に，$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$は$L^2(\mathbb{R}^d)$上のCauchy列であることに注意する．すると，定理 2.11より

$$\|\mathcal{F}u_j - \mathcal{F}u_k\|_{L^2} = \|u_j - u_k\|_{L^2}$$

なので，$(\mathcal{F}u_j)_{j\in\mathbb{N}}$も$L^2(\mathbb{R}^d)$上のCauchy列であり，$L^2(\mathbb{R}^d)$で収束する．そこで，

$$\mathcal{F}_{L^2}u = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}u_j \in L^2(\mathbb{R}^d) \qquad (\heartsuit)$$

と定めると，これはwell-definedである．実際，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上の点列$(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$で

$$\|u - v_j\|_{L^2} \to 0 \quad \text{as } j \to \infty$$

を満たすものをとる．再び定理 2.11により

$$\|\mathcal{F}u_j - \mathcal{F}v_k\|_{L^2} = \|u_j - v_k\|_{L^2}$$

が成り立つので，ここで$j,k \to \infty$とすると，

$$\Big\|\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}u_j - \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}v_k\Big\|_{L^2} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}u_j = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}v_k$$

が従う．

このような$\mathcal{F}_{L^2}$が，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上で定義された$\mathcal{F}$の拡張であることは定義から明らかである．また，定理 2.11によれば

$$\|\mathcal{F}_{L^2}u\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty} \|\mathcal{F}u_j\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

なので，$\mathcal{F}_{L^2}$は確かに$L^2(\mathbb{R}^d)$上で有界である．任意の有界拡張は，連続性により$(\heartsuit)$を満たさなければならず，一意性も明らかである．

Step 2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上で定義された$\mathcal{F}^*$が$L^2(\mathbb{R}^d)$上の有界作用素に一意的に拡張されることは，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上のFourier反転公式と定理 2.11を合わせれば，Step 1と同様に示すことができる．これは易しいので詳細は省略する．

Step 3. 残りの主張を示す．任意の$u,f \in L^2(\mathbb{R}^d)$をとる．このとき，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上の点列$(u_j)_{j\in\mathbb{N}},(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$を

$$\|u - u_j\|_{L^2},\ \|f - f_j\|_{L^2} \to 0 \quad \text{as } j \to \infty$$

を満たすようにとれば，

$$(\mathcal{F}_{L^2}u, f) = \lim_{j\to\infty} (\mathcal{F}u_j, f_j) = \lim_{j\to\infty} (u_j, \mathcal{F}^*f_j) = (u, (\mathcal{F}^*)_{L^2}f)$$

が成り立つので，確かに$(\mathcal{F}^*)_{L^2}$はF_{L^2}の共役作用素である．また，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上のFourier反転公式より

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{L^2})^*\mathcal{F}_{L^2}u &= (\mathcal{F}^*)_{L^2}\mathcal{F}_{L^2}u = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}^*\mathcal{F}u_j = \lim_{j\to\infty} u_j = u, \\
\mathcal{F}_{L^2}(\mathcal{F}_{L^2})^*f &= \mathcal{F}_{L^2}(\mathcal{F}^*)_{L^2}f = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}\mathcal{F}^*f_j = \lim_{j\to\infty} f_j = f
\end{aligned}$$

なので，$\mathcal{F}_{L^2}$はユニタリである．よって，$(\mathcal{F}^*)_{L^2} = (\mathcal{F}_{L^2})^*$もユニタリである． $\square$

系 2.16. 定理 2.15の$\mathcal{F}_{L^2}, \mathcal{F}^*_{L^2}$に対して，$L^2(\mathbb{R}^d)$上でPersevalの定理（Plancherelの定理）およびFourier反転公式が成立する．

証明. 定理 2.15の証明内ですでに示されている． □

定理 2.17. 任意の$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$に対し，

$$\mathcal{F}u = \mathcal{F}_{L^2}u \in L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

である.（よって以降，$\mathcal{F}_{L^2}$を単に$\mathcal{F}$で表すことにする.）

証明. 定理 2.14の証明と同じ方針で示せるので，証明を省略する．L^1, L^∞ノルムではなくL^2ノルムを用いる点と，定理 2.14の証明の(♠)に対応する結果を導く際に定理 2.13ではなく系 2.16を用いる点に注意しておく． □

定理 2.18. 任意の$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$と$r \geq 0$に対して

$$\chi_{\{|x| \leq r\}}u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

であり，さらに$L^2(\mathbb{R}^d)$の位相に関して

$$\mathcal{F}u = \lim_{r \to \infty} \mathcal{F}\Big(\chi_{\{|x| \leq r\}}u\Big) = \lim_{r \to \infty} (2\pi)^{-d/2} \int_{|x| \leq r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x$$

が成立する．

注意. $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$とする．$L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$なので，積分

$$(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x$$

は一般には意味を持たない．定理 2.18は，$\mathcal{F}u$が，$L^2(\mathbb{R}^d)$の位相に関して，ある種の広義積分で表示できることを主張している．$L^2(\mathbb{R}^d)$での収束を**二乗平均収束**と呼び，l.i.m.（「limit in mean」の意）で表すことがある．

証明. $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$とする．Hölderの不等式により，任意の$r \geq 0$に対し

$$\chi_{\{|x| \leq r\}}u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つことが分かる．さらにLebesgue収束定理により，$L^2(\mathbb{R}^d)$の位相で

$$\chi_{\{|x| \leq r\}}u \to u \quad \text{as } r \to \infty$$

が成り立つことが分かる．よって，定理 2.17，2.15および2.14により，$L^2(\mathbb{R}^d)$の位相に関して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u &= \lim_{r \to \infty} \mathcal{F}_{L^2}\Big(\chi_{\{|x| \leq r\}}u\Big) = \lim_{r \to \infty} \mathcal{F}\Big(\chi_{\{|x| \leq r\}}u\Big) \\ &= \lim_{r \to \infty} \mathcal{F}_{L^1}\Big(\chi_{\{|x| \leq r\}}u\Big) \\ &= \lim_{r \to \infty} (2\pi)^{-d/2} \int_{|x| \leq r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

を得る． □

§ 2.6 たたみ込み

定理 2.19. 任意の$u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対し，

$$u * v = v * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

であり，さらに以下が成り立つ．

1. 任意の$k \in \mathbb{N}_0$に対し，ある$C > 0$と$l, m \in \mathbb{N}_0$が存在して
$$|u * v|_k \leq C|u|_l|v|_m.$$
2. 任意の$\alpha \in \mathbb{N}_0^d$に対し，
$$\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v).$$

3. 任意の $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

4. 次の等式が成立する：

$$\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^{d/2}(\mathcal{F}u)(\mathcal{F}v).$$

証明. Lebesgue収束定理およびFubini–Tonelliの定理を用いて証明できる．詳細は**問**として省略する． □

○ **急減少関数と緩増加超関数のたたみ込み**

定義. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ と $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．**たたみ込み** $u * v \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle u * v, \phi \rangle = \langle u, (\sigma v) * \phi \rangle \quad \text{for } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

で定義する．ここで，$(\sigma v)(x) = v(-x)$ とした．

注意. 1. 定理 2.19によれば，任意の $u, v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\langle u * v, w \rangle = \langle u, (\sigma v) * w \rangle$$

が成り立つことが分かる．上の定義はこの関係を拡張したものである．

2. 上の $u * v$ は $v * u$ で表されることもある．

定理 2.20. 任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ と $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

であり，さらに以下が成り立つ．

1. 任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ に対し，

$$\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v).$$

2. さらに任意の $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

3. 次の等式が成立する：

$$\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^{d/2}(\mathcal{F}u)(\mathcal{F}v).$$

証明. 定理 2.19とたたみ込みの定義からすぐに従う．詳細は**問**として省略する． □

第3章 トーラス上の超関数とFourier級数展開

§ 3.1 トーラス上の超関数

定義. $\mathbb{R}$において，任意の$x \in \mathbb{R}$と$x + 2\pi \in \mathbb{R}$を同一視して得られる空間を，**1次元トーラス**と呼び，$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$などで表す.

注意. $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$と考えても良いし，または$\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$や$\mathbb{T} = (0, 2\pi]$などとして，端点を繋いだものと考えても良い.

定義. $\mathbb{T}^d$上のC^∞関数全体の空間を

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}^d) = C^\infty(\mathbb{T}^d) \cong \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \forall j = 1, \ldots, d\ u(\cdot + 2\pi e_j) = u\right\}$$

で表す．さらに任意の$u \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$と$k \in \mathbb{N}_0$に対して

$$|u|_k = \max\left\{|\partial^\alpha u(x)|;\ |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{T}^d\right\}$$

と定める．これを$\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$上の**セミノルム**または**半ノルム**と呼ぶ.

定義. $\mathbb{T}^d$上の**超関数**とは，線形汎関数$T\colon \mathcal{D}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}$で，ある$C > 0$と$k \in \mathbb{N}_0$が存在して，任意の$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$に対し

$$|\langle T, \phi\rangle| \le C|\phi|_k$$

を満たすもののことである．$\mathbb{T}^d$上の超関数全体の集合を$\mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$で表す.

問. 命題 2.2と同様にして，任意の$p \in [1, \infty]$に対し埋め込み

$$L^p(\mathbb{T}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$$

を構成せよ.

注意. 上の埋め込みの下，任意の$1 \le p < q \le \infty$に対して

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}^d) \subset L^q(\mathbb{T}^d) \subset L^p(\mathbb{T}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．またさらに，**超関数微分**や$C^\infty(\mathbb{T}^d)$の元による**掛け算作用素**も$\mathbb{R}^d$上の場合と同様に定義される．詳細は省略する.

§ 3.2 形式的Fourier級数展開

定義. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$に対し，その**Fourier係数**$\mathcal{F}u\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$を

$$(\mathcal{F}u)(n) = (2\pi)^{-d/2}\langle u, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\rangle \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}^d$$

で定義する．また，uの（**形式的**）**Fourier級数展開**を

$$u \sim (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}u)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

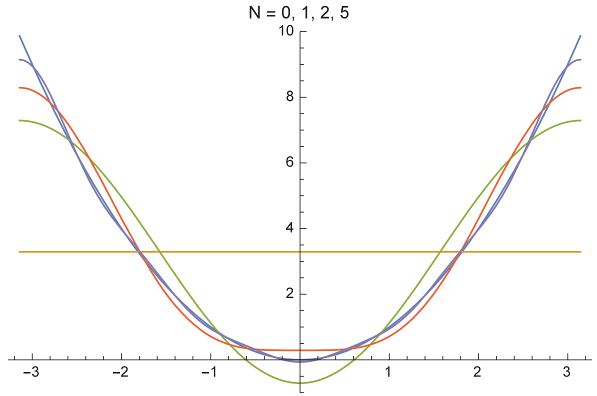
で表し，何らかの意味で右辺が収束してuに一致するとき，uは**Fourier級数展開可能**であるという.

注意. $u \in L^1(\mathbb{T}^d)$のFourier係数は

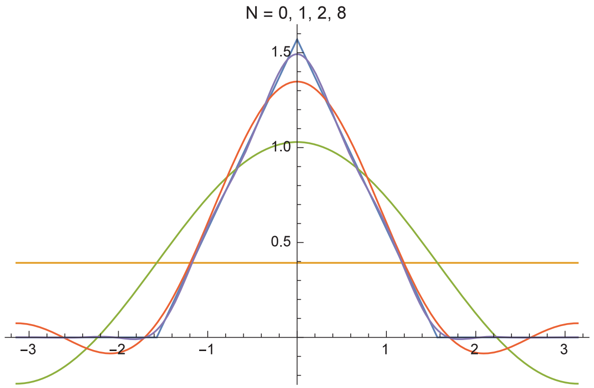
$$(\mathcal{F}u)(n) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}u(x)\,\mathrm{d}x$$

で与えられる．これは埋め込み$L^1(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$の定義からすぐに従う.

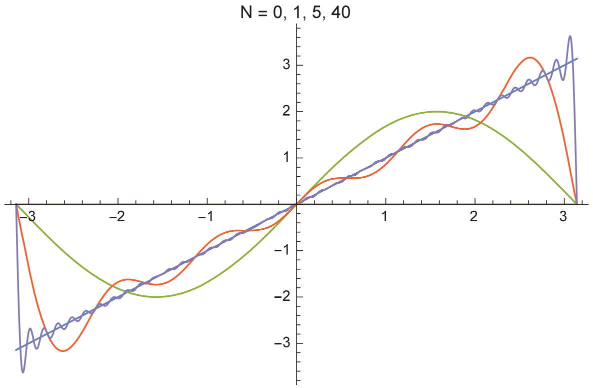
例. $x^2 \sim \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx$



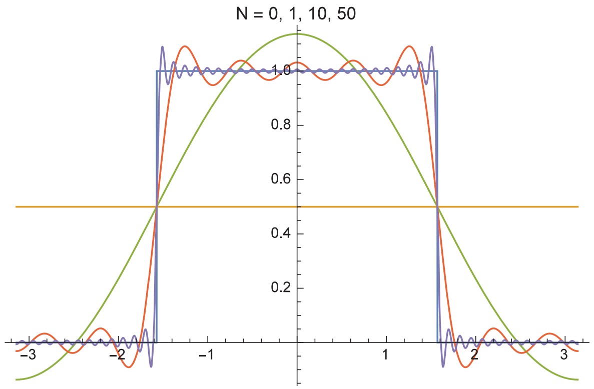
例. $\max\left\{\dfrac{\pi}{2}-|x|,0\right\} \sim \dfrac{\pi}{8}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin^2(k\pi/4)}{k^2\pi}\cos kx$



例. $x \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$



例. $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x) \sim \dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin(k\pi/2)}{k\pi}\cos kx$



注意. 以上の例によれば，関数が滑らかでない点の近傍ではFourier級数の収束が悪く，特に（第1種）不連続点の近傍では一定の「跳ね上げ（下げ）」が生じている．一般に，部分和の項数をいくら増やしてもこの跳ねは残り続け，その大きさは，上下にそれぞれ，元の関数値の差の約9%ずつであることが知られている．これを**Gibbs現象**と呼ぶ．なお，部分和による項の切り落としを穏やかに修正することで，Gibbs現象を緩和させることもできる．後述のCesàro総和法（またはFejér核）も参照せよ．

問. 任意の $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ と $k \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ に対し

$$(\mathcal{F}e^{ikx}u)(n) = (\mathcal{F}u)(n-k), \quad (\mathcal{F}D^{\alpha}u)(n) = n^{\alpha}(\mathcal{F}u)(n)$$

が成り立つことを示せ．

補題 3.1. 1. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ とする．このとき，ある $k \in \mathbb{N}$ と $C > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$|(\mathcal{F}u)(n)| \le C\langle n\rangle^k; \quad \langle n\rangle = (1+n^2)^{1/2},$$

が成り立つ.（このような列を**緩増加列**と呼ぶ.）

2. $u \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$ とする．このとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対しある $C > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$|(\mathcal{F}u)(n)| \le C\langle n\rangle^{-k}$$

が成り立つ.（このような列を**急減少列**と呼ぶ.）

3. (**Riemann–Lebesgue の補題**) $u \in L^1(\mathbb{T}^d)$ とする．このとき，

$$\lim_{|n|\to\infty} (\mathcal{F}u)(n) = 0$$

が成り立つ.

証明. *1.* $\mathbb{T}^d$ 上の超関数の定義より，ある $k \in \mathbb{N}_0$ と $C > 0$ が存在して，任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$ に対し

$$|\langle u,\phi\rangle| \le C \max\Big\{|\partial^\alpha\phi(x)|;\ |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{T}^d\Big\}$$

が成り立つ．ここで $\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$ ととれば，主張が従う.

2. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \langle n\rangle^{-2N}\langle D\rangle^{2N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$$

が成り立つことに注意する．これを Fourier 係数の定義式に代入して，部分積分を繰り返すと，

$$\begin{aligned}|(\mathcal{F}u)(n)| &= (2\pi)^{-d/2}\left|\int_{\mathbb{T}^d}\Big(\langle n\rangle^{-2N}\langle D\rangle^{2N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\Big)u(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= (2\pi)^{-d/2}\langle n\rangle^{-2N}\left|\int_{\mathbb{T}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\langle D\rangle^{2N}u(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le C_N\langle n\rangle^{-2N}\end{aligned}$$

となる．よって主張の不等式が従う.

3. 任意の $\epsilon > 0$ をとる．$C^\infty(\mathbb{T}^d) \subset L^1(\mathbb{T}^d)$ が稠密であることから，ある $v \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ が存在して

$$|(\mathcal{F}(u-v))(n)| \le (2\pi)^{-d/2}\|u-v\|_{L^1} < \epsilon$$

が成り立つ．一方で主張2で示したことから，十分大きな $M > 0$ をとれば任意の $|n| \ge M$ に対して

$$|(\mathcal{F}v)(n)| < \epsilon$$

が成り立つ．したがって，任意の $|n| \ge M$ に対し

$$|(\mathcal{F}u)(n)| \le |(\mathcal{F}(u-v))(n)| + |(\mathcal{F}v)(n)| < 2\epsilon$$

であり，主張の極限が得られる. □

§ 3.3 たたみ込み

定義. 関数 $u,v\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$，$f,g\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ に対し，それぞれ

$$(u*v)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y, \quad (f*g)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(n-k)g(k)$$

が適当な意味を持つとき，これらを**たたみ込み**または**合成積**と呼ぶ.

注意. 1. $(2\pi)^{-d}$ 等の係数をつける流儀もある.

2. 本講では時間の都合上，$\mathbb{T}^d$ 上や $\mathbb{Z}^d$ 上のたたみ込みについては形式的な定義を確認するのみで，詳細な性質には立ち入らない．$\mathbb{R}^d$ 上のたたみ込みと同様の性質が，これらについても容易に確かめられる．またさらに，超関数や緩増加列への拡張も可能である.

§ 3.4 Fourier級数の古典的収束

後述するように，Fourier級数の収束は，理論上はL^2ノルム（より一般にはSobolevノルム）で測るのが最も簡便であるが，まずは各点収束や一様収束ついての基本的な事実を紹介することから始める．なおこれらは応用面でも重要な興味の対象となっている．

本節（と次節の前半）では$d=1$の場合を考える．また，任意の$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$に対し，**第$n$番目のFourier部分和**を

$$s_n(u) = s_n(u;x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-n}^{n} (\mathcal{F}u)(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

で定義し，Fourier級数の和の順序を特定のものに限定する．

○ Dirichlet核

定義. 任意の$n \in \mathbb{N}_0$に対し，**第n番目のDirichlet核**$D_n \in C^\infty(\mathbb{T})$を

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

で定義する.（**問.** 2つ目の等号を示せ.）

定理 3.2. 任意の$u \in L^1(\mathbb{T})$と$n \in \mathbb{N}_0$に対し，

$$s_n(u) = (2\pi)^{-1} D_n * u$$

が成り立つ.

証明. Fourier係数とDirichlet核の定義より明らかである. □

○ Fourier級数の各点収束

定理 3.3. 関数$u \in L^1(\mathbb{T})$が，点$a \in \mathbb{T}$において以下の**Dirichlet–Dini条件**を満たしているとする．すなわち，ある$\lambda \in \mathbb{C}$が存在して

$$\int_0^\pi \frac{1}{t}\Big|u(a+t) + u(a-t) - 2\lambda\Big|\,\mathrm{d}t < \infty$$

が成り立つとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} s_n(u;a) = \lambda$$

が成り立つ.

証明. 任意の$n \in \mathbb{N}_0$に対し，定義より，

$$D_n(-t) = D_n(t), \quad (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned} s_n(u;a) - \lambda &= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{0} D_n(t)u(a-t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + (2\pi)^{-1}\int_0^\pi D_n(t)u(a-t)\,\mathrm{d}t - \lambda \\ &= (2\pi)^{-1}\int_0^\pi D_n(t)\big(u(a+t)+u(a-t)-2\lambda\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

と書ける．さらにD_nの第2の表示式を代入し，$t=2\tau$と変数変換すれば，

$$s_n(u;a) - \lambda = \int_0^{2\pi} f(\tau)\sin((2n+1)\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

が得られる．ただしここで，

$$f(\tau) = \pi^{-1}\chi_{[0,\pi/2]}(\tau)\frac{u(a+2\tau)+u(a-2\tau)-2\lambda}{\sin\tau}$$

とおいた．仮定より$f \in L^1([0,2\pi])$が分かるので，Riemann–Lebesgueの補題から，主張が従う． □

系 3.4. $u \in L^1(\mathbb{T})$ かつ $a \in \mathbb{T}$ とし，極限

$$\lim_{t \to +0} u(a \pm t) =: u(a \pm 0)$$

がそれぞれ存在するとする．さらにある $C > 0$, $\delta \in (0,1)$ および $\alpha > 1$ が存在して，任意の $t \in (0, \delta)$ に対し

$$\left| u(a \pm t) - u(a \pm 0) \right| \le C(\log(1/t))^{-\alpha}$$

がそれぞれ成り立つとする．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} s_n(u; a) = \frac{1}{2}\Big(u(a+0) + u(a-0)\Big)$$

が成り立つ．

証明. 定理 3.3 より，$\lambda = (u(a+0) + u(a-0))/2$ に対して Dirichlet–Dini 条件を確かめればよいが，それは仮定からすぐに従う． □

注意. 特に $u = \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, $a = 0$ とし，$D_n(-x) = D_n(x)$ に注意すれば

$$\lim_{n \to \infty} \Big\langle (2\pi)^{-1} D_n, \phi \Big\rangle = \phi(0),$$

すなわち

$$\lim_{n \to \infty} (2\pi)^{-1} D_n = \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{T})$$

が分かる．しかしながら，D_n は原点以外では大きく正負に振動しながら δ に近づくため，この収束は遅く，例えば，

$$\int_{\mathbb{T}} |D_n(x)| \, \mathrm{d}x \sim \frac{2}{\pi} \log n \quad \text{as } n \to \infty$$

を確かめることができる．このことは Gibbs 現象の原因となっている．後述の Fejér 核では総和法を工夫することで，より良い核を構成する．

◦ Fourier 級数の一様収束

定義. 関数 $\omega \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ は単調非減少かつ

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = \omega(0) = 0$$

を満たすとする．このとき，関数 $u \in C(\mathbb{T})$ が**連続度** ω を持つとは，任意の $x, y \in \mathbb{T}$ に対し

$$|u(x) - u(y)| \le \omega(|x - y|)$$

を満たすことである．

定理 3.5（Dini–Lipschitz の定理）. $u \in C(\mathbb{T})$ は連続度 ω として

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) \log \delta = 0$$

を満たすものを持つとする．このとき，$\mathbb{T}$ 上で一様収束の意味で

$$\lim_{n \to \infty} s_n(u) = u$$

が成り立つ．

注意. 仮定が系 3.4 より弱く見えるが，関数空間が異なるので比較できない．

証明. *Step 1.* 定理 3.3 の証明と同様にして

$$s_n(u; x) - u(x) = 2 \int_0^{\pi} f(x, t) \sin((n + 1/2)t) \, \mathrm{d}t$$

と書ける．ただしここでは，

$$f(x, t) = \frac{u(x+t) + u(x-t) - 2u(x)}{4\pi \sin(t/2)}$$

とおいた．さらに，大きなnに対し$\delta = 2\pi/(2n+1)$とおいて，変数変換を用いると

$$\begin{aligned} s_n(u;x)-u(x) &= \int_0^{\pi} f(x,t)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad -\int_{-\delta}^{\pi-\delta} f(x,t+\delta)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\delta}^{\pi-\delta}\Big(f(x,t)-f(x,t+\delta)\Big)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\pi-\delta}^{\pi} f(x,t)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^{\delta} f(x,t)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{-\delta}^{\delta} f(x,t+\delta)\sin((n+1/2)(t+\delta))\,\mathrm{d}t \\ &=: I_1+I_2+I_3+I_4 \end{aligned}$$

となる．

Step 2. ここではI_2, I_3, I_4を評価する．まず，I_3については，被積分関数を

$$\Big|f(x,t)\sin((n+1/2)t)\Big| \le C_1(n+1/2)\omega(t)$$

のように評価すれば，ωの単調性とδの定義から

$$|I_3| \le C_1\delta(n+1/2)\omega(\delta) \le C_2\omega(\pi/n)$$

が分かる．I_4も同様に，

$$|I_4| \le C_3\delta(n+1/2)\omega(2\delta) \le C_3\omega(2\pi/n)$$

と評価できる．I_2については，被積分関数を

$$\Big|f(x,t)\sin((n+1/2)t)\Big| \le C_4\omega(\pi)$$

と評価することで，

$$|I_2| \le C_4\delta\omega(\pi) \le C_5\omega(\pi)/n$$

を得る．

Step 3. さて，I_1を評価しよう．まず直接評価により，

$$\begin{aligned} |I_1| &\le \int_{\delta}^{\pi-\delta} |f(x,t)-f(x,t+\delta)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_{\delta}^{\pi-\delta} \left|\frac{v(x,t)}{\sin(t/2)} - \frac{v(x,t)}{\sin((t+\delta/2)}\right|\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\delta}^{\pi-\delta}\left|\frac{v(x,t)-v(x,t+\delta)}{\sin((t+\delta)/2)}\right|\,\mathrm{d}t \\ &\le C_6\delta\int_{\delta}^{\pi-\delta}\frac{\omega(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + C_6\omega(\delta)\int_{\delta}^{\pi-\delta}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &=: J_1+J_2 \end{aligned}$$

と書ける．ただし，

$$v(x,t) = \frac{u(x+t)+u(x-t)-2u(x)}{4\pi}$$

とおいた．J_1は，積分区間を分けることで，

$$\begin{aligned} J_1 &\le C_6\delta\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}}\frac{\omega(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + C_6\delta\int_{\sqrt{\delta}}^{\pi-\delta}\frac{\omega(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\le C_6\omega(\sqrt{\delta}) + C_6\omega(\pi)\sqrt{\delta} \le C_6\omega\Big(\sqrt{\pi/n}\Big) + C_6\omega(\pi)\sqrt{\pi/n} \end{aligned}$$

と評価できる．一方，J_2は

$$J_2 \le C\omega(\delta)|\log\delta| \le C\omega(\pi/n)\log n$$

と評価できる．以上を合わせて，$n\to\infty$とすれば，求める結論を得る． □

定義. $\alpha \in (0,1]$ とする．関数 $u\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ が **α 次 Hölder 連続**であるとは，ある $C \geq 0$ が存在して，任意の $x, y \in \mathbb{T}$ に対し

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \tag{$\diamondsuit$}$$

が成り立つことである．$\mathbb{T}$ 上の α 次 Hölder 連続関数全体の空間を $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ で表す．また，任意の $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ に対し，

$$|u|_{C^{0,\alpha}} = \inf\Big\{C \geq 0;\ \text{任意の } x, y \in \mathbb{T} \text{ に対し } (\diamondsuit) \text{ が成り立つ}\Big\}$$

とおく．

注意. 任意の $x, y \in \mathbb{T}$ に対し $(\diamondsuit)$ が成り立つことは，u が連続度

$$\omega(\delta) = C\delta^{\alpha}$$

を持つこと，と言い換えられる．

系 3.6. 任意の $\alpha \in (0,1]$ に対し，ある $C > 0$ が存在して，任意の $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$，$n \geq 2$ および $x \in \mathbb{T}$ に対し

$$|u(x) - s_n(u;x)| \leq C|u|_{C^{0,\alpha}} n^{-\alpha} \log n \tag{$\clubsuit$}$$

が成り立つ．特にこのとき，一様収束の意味で

$$\lim_{n\to\infty} s_n(u) = u$$

が成り立つ．

証明. 定理 3.5 の証明において，具体的に $\omega(\delta) = |u|_{C^{0,\alpha}}\delta^{\alpha}$ とおけば，$(\clubsuit)$ が従う．ただし J_1 の評価についてのみ注意が必要で，定理 3.5 の証明と同様に積分区間を分けると $(\clubsuit)$ より悪い評価になってしまう．これは，より簡単に，積分区間を分けずに評価すれば解決する．詳細は省略する．後半の主張は $(\clubsuit)$ から明らかである． □

§ 3.5 Fejér 核

本節では総和法を工夫することで，Fourier 級数の古典的収束を改善する．

○ Cesàro 総和法

定義. 数列 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ に対し，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k, \quad \text{ただし } s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j,$$

が収束するとき，$(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ は **Cesàro 総和可能**であると言い，その極限値を $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ の **Cesàro 和**と呼ぶ．

注意. Cesàro 和とは,「重み付き部分和」の極限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) a_j$$

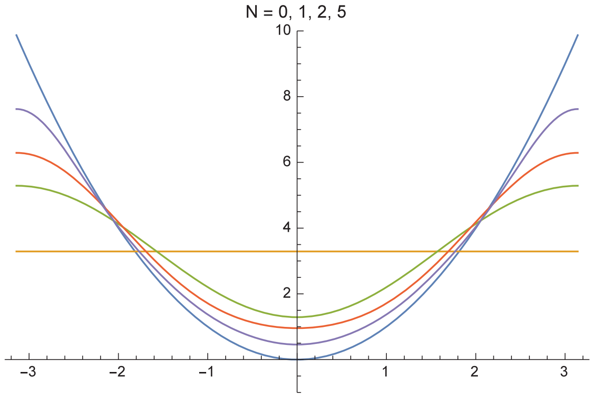
に他ならない．通常の部分和のように添え字の大きな項を一つ一つ個別に拾うのではなく，重みを付けて穏やかに取り込むため，和の収束の改善が期待される．実際，$(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が振動する場合にその効果を発揮する．

問. 数列 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ の通常の和が収束するなら，$(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ は Cesàro 総和可能であり，Cesàro 和の値は通常の和の値に一致することを示せ．

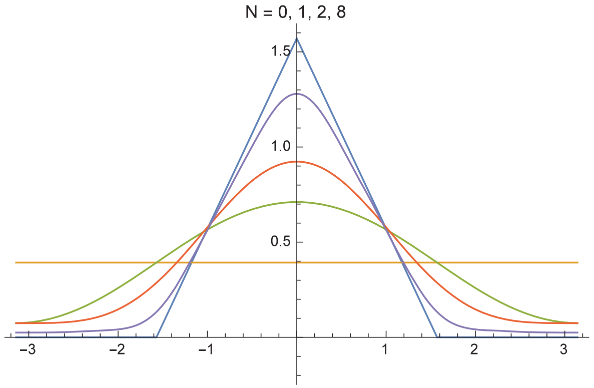
問. 数列 $((-1)^j)_{j\in\mathbb{N}}$ は Cesàro 総和可能であることを示し，その Cesàro 和の値を計算せよ．

問. 数列 $((-1)^j/j)_{j\in\mathbb{N}}$ に対し，通常の和の収束の早さと，Cesàro 和の収束の早さを比較せよ．

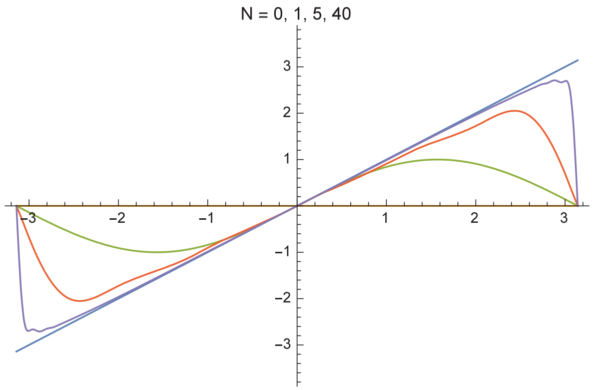
例. $x^2 \approx \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx \right)$



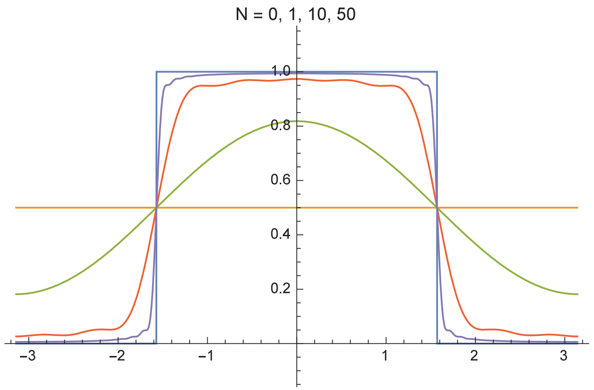
例. $\max\left\{ \dfrac{\pi}{2} - |x|, 0 \right\} \approx \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4\sin^2(k\pi/4)}{k^2\pi} \cos kx \right)$



例. $x \approx \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \right)$



例. $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x) \approx \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin(k\pi/2)}{k\pi} \cos kx \right)$



注意. 1. Cesàro総和法（Fejér核）によりGibbs現象が緩和されている.

2. 一方で，収束の速度は遅くなる．これは，重み付き和をとる際の重み関数（**窓関数**と呼ばれる）により，Fourier係数の取り込みが遅くなることに起因しており，避けられない.

3. また，不連続点の周りでGibbs現象の名残がまだ残っている．これは窓関数が折れ線の形をしていて，ある意味で滑らかではないことが原因と考えられる．滑らかな窓関数を用いればさらに緩和できるだろう．ただしこれは窓関数の簡素さを犠牲にすることになる.

4. 応用上は，上記のようなトレードオフの関係に注意しながら，目的に応じて窓関数の取り方を工夫するのが望ましい.

○ **1次元トーラス上のFejér核**

定義. 任意の$n \in \mathbb{N}$に対し，**第n番目のFejér核**$F_n \in C^\infty(\mathbb{T})$を

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

で定義する.（**問.** 2つ目の等号を示せ.）

定理 3.7. 任意の$u \in C(\mathbb{T})$に対し，一様収束の意味で

$$\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}F_n * u = u$$

が成り立つ.

証明. *Step 1.* まず,

$$(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{T}}|F_n(x)|\,dx = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{T}}F_n(x)\,dx = 1$$

を示す．実際，F_nの第2の表示式より$F_n \geq 0$なので，第1の等号が成立する．また，F_nの第1の表示式と

$$(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{T}}D_k(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-1}\sum_{j=-k}^{k}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\,dx = 1$$

に注意すれば，第2の等号も明らかである.

Step 2. 任意の$\delta \in (0,\pi)$に対しある$C_1 > 0$が存在して，任意の$n \in \mathbb{N}$と$x \in \mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)$に対し

$$|F_n(x)| \leq C_1 n^{-1}$$

であることを示す．しかしこれは，F_nの第2の表示式において，分母が$x \in \mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)$について一様に正であることからすぐに従う.

Step 3. さて，定理の主張を示そう．Step 1の結果より，$x \in \mathbb{T}$に対して

$$\left|u(x) - (2\pi)^{-1}(F_n * u)(x)\right| = (2\pi)^{-1}\left|\int_{\mathbb{T}}F_n(x-y)(u(x)-u(y))\,dy\right|$$

と書ける．ここで，uが一様連続なことに注意すると，任意の$\epsilon > 0$に対しある$\delta > 0$が存在して，任意の$|x-y| < \delta$に対し

$$|u(x) - u(y)| < \epsilon$$

が成り立つ．このδを用いて積分区間を分割すると，Step 1とStep 2の結果より,

$$\begin{aligned}&\left|u(x) - (2\pi)^{-1}(F_n * u)(x)\right| \\ &\leq (2\pi)^{-1}\left|\int_{|x-y|<\delta}F_n(x-y)(u(x)-u(y))\,dy\right| \\ &\quad + (2\pi)^{-1}\left|\int_{|x-y|\geq\delta}F_n(x-y)(u(x)-u(y))\,dy\right| \leq \epsilon + C_2 n^{-1}\end{aligned}$$

を得る．よって，主張が示された. □

○ **一般次元トーラス上のFejér核**

定義. 任意の$n \in \mathbb{N}^d$に対し，**第n番目のFejér核**$F_n \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$を

$$F_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \left[\frac{1}{n_j} \left(\frac{\sin(n_j x_j/2)}{\sin(x_j/2)} \right)^2 \right]$$

で定義する．

定理 3.8. 任意の$u \in C(\mathbb{T}^d)$に対し，一様収束の意味で

$$\lim_{n_1,\ldots,n_d \to \infty} (2\pi)^{-d} F_n * u = u$$

が成り立つ．

証明. 定理 3.7と同様に示すことができる．詳細は**問**として省略する． □

§ 3.6 抽象論からの準備1：直交性と正射影

○ **直交性**

定義. XをHilbert空間とする．部分集合$L, M \subset X$が**直交**するとは

$$\forall x \in L \quad \forall y \in M \quad (x, y) = 0$$

が成り立つことであり，このとき$L \perp M$と書く．特に1点集合$L = \{x\}$に対しては，$x \perp M$とも書く．また，$L \subset X$の**直交補空間**とは，部分集合

$$L^\perp = \{x \in X;\ x \perp L\}$$

のことである．

問. XをHilbert空間とし，$L \subset X$とする．$L^\perp$はXの閉部分空間であることを示せ．

○ **正射影**

定理 3.9 (正射影定理). XをHilbert空間とし，$L \subset X$を閉部分空間とする．このとき，

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in L \quad \exists! z \in L^\perp \quad \text{s.t.} \quad x = y + z$$

が成り立つ．

定義. yをxのLへの**正射影**と呼び，xからyへの対応を**正射影作用素**と呼ぶ．

証明. *Step 1*. まずは分解の一意性を示す．ある$x \in X$に対し，

$$x = y + z = y' + z', \quad y, y' \in L, \quad z, z' \in L^\perp$$

と書けたとする．このとき$y - y' = z' - z \in L \cap L^\perp$であるから，

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = 0, \quad \|z - z'\|^2 = (z - z', z - z') = 0$$

である．よって$y = y', z = z'$となり，分解の一意性が分かる．

Step 2. 次に分解の存在を示す．$x \in X$とする．このとき，

$$\delta = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

とおき，$y_j \in L$で$\|x - y_j\| \to \delta$となるものをとると，$(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$はCauchy列である．実際，中線定理より

$$\begin{aligned} &\|(x - y_j) + (x - y_k)\|^2 + \|(x - y_j) - (x - y_k)\|^2 \\ &= 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 \end{aligned}$$

であり，$\dfrac{1}{2}(y_j + y_k) \in L$に注意すると，$j, k \to \infty$のとき

$$\begin{aligned} \|y_j - y_k\|^2 &= 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_j + y_k)\right\|^2 \\ &\le 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\delta^2 \to 0 \end{aligned}$$

となる．よって，確かに$(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$はCauchy列であり，極限$y \in X$を持つ．

今，Lは閉なので，$y \in L$である．あとは$z = x - y$とおいて，$z \perp L$を示せばよい．任意の$\eta \in L$と$t \in \mathbb{R}$に対して

$$\begin{aligned}\delta^2 &\le \|z - t(z,\eta)\eta\|^2 \\ &= \|z\|^2 - t\overline{(z,\eta)}(z,\eta) - t(z,\eta)(\eta,z) + t^2|(z,\eta)|^2\|\eta\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2t|(z,\eta)|^2 + t^2|(z,\eta)|^2\|\eta\|^2 \\ &= \delta^2 - 2t|(z,\eta)|^2 + t^2|(z,\eta)|^2\|\eta\|^2\end{aligned}$$

なので，

$$0 \le -2t|(z,\eta)|^2 + t^2|(z,\eta)|^2\|\eta\|^2$$

であるが，もし$(z,\eta) \neq 0$とすると，上の不等式は任意の$t \in \mathbb{R}$に対しては成立しないので矛盾である．よって$(z,\eta) = 0$であり，$z \perp L$を得る． □

○ **直和**

定義. XをHilbert空間とする．部分空間$L, M \subset X$で$L \perp M$となるものに対して，

$$L \oplus M := \{y + z \in X;\ y \in L,\ z \in M\}$$

をLとMの**直和**と呼ぶ．

注意. 1. 上の記号の下で，任意の$x \in L \oplus M$に対し，直和分解表示

$$x = y + z, \quad y \in L,\ z \in M$$

は一意的である．

2. 正射影定理とは，任意の閉部分空間$L \subset X$に対して

$$X = L \oplus L^\perp$$

が成り立つこと，とも表現できる．

○ **部分集合が張る部分空間**

定義. XをHilbert空間とする．部分集合$L \subset X$が**張る（生成する）部分空間**とは，

$$\mathrm{span}\, L := \left\{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n;\ c_j \in \mathbb{C},\ x_j \in L,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

のことである．

注意. 1. 任意個の有限和は許されているが，無限和は許されていない．

2. $\mathrm{span}\, L$は，Lを含むXの部分空間のうちで最小のものである．

命題 3.10. XをHilbert空間とする．任意の部分集合$L \subset X$に対し，

$$(L^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span}\, L}$$

が成り立つ．特に$L \subset X$が閉部分空間であれば，$(L^\perp)^\perp = L$が成り立つ．

証明. $L^\perp = \left(\overline{\mathrm{span}\, L}\right)^\perp$であることは容易に確かめられるので（**問**とする），結局，$L \subset X$が閉部分空間の場合に$(L^\perp)^\perp = L$を示せば十分である．このとき，定義より

$$L \subset (L^\perp)^\perp$$

は容易にわかる．一方，$x \in (L^\perp)^\perp$とすると，正射影定理より，ある$y \in L$と$z \in L^\perp$が存在して$x = y + z$と書ける．しかし

$$z = x - y \in L^\perp \cap (L^\perp)^\perp$$

なので，$z = 0$であり，$x = y \in L$を得る．よって$(L^\perp)^\perp \subset L$である． □

§ 3.7 抽象論からの準備２：完全正規直交系

○ 正規直交系（ONS）

定義. XをHilbert空間とする．高々可算な部分集合$\{e_j\}_{j\in I}\subset X$が，任意の$j,k\in I$に対して

$$(e_j,e_k)=\delta_{jk}$$

を満たしているとき，$\{e_j\}_{j\in I}$をXの**正規直交系**（または**ONS**）と呼ぶ.

命題 3.11（Besselの不等式）. XをHilbert空間とし，$\{e_j\}_{j\in I}\subset X$を正規直交系とする．このとき，任意の$x\in X$に対して

$$\sum_{j\in I}|(x,e_j)|^2\le\|x\|^2$$

が成り立つ.

証明. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$をIの有限部分集合からなる単調非減少**取り尽し列**, すなわち

$$I_1\subset\cdots\subset I_n\subset\cdots\subset I,\qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=I$$

とする．このとき，任意の$n\in\mathbb{N}$に対して

$$\begin{aligned}0&\le\left(x-\sum_{j\in I_n}(x,e_j)e_j,\,x-\sum_{k\in I_n}(x,e_k)e_k\right)\\&=\|x\|^2-\sum_{k\in I_n}\overline{(x,e_k)}(x,e_k)\\&\quad-\sum_{j\in I_n}(x,e_j)(e_j,x)+\sum_{j,k\in I_n}(x,e_j)\overline{(x,e_k)}\delta_{jk}\\&=\|x\|^2-\sum_{j\in I_n}|(x,e_j)|^2\end{aligned}$$

なので，$\sum_{j\in I_n}|(x,e_j)|^2\le\|x\|^2$となる．あとは$n\to\infty$とすればよい． □

○ 完全正規直交系（CONS）

定理 3.12. XをHilbert空間とし，$\{e_j\}_{j\in I}\subset X$を正規直交系とする．以下は互いに同値である：

1. $\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}$は$X$で稠密である；
2. 任意の$x\in X$に対して，$x=\sum_{j\in I}(x,e_j)e_j$（**抽象的Fourier級数展開**）；
3. 任意の$x,y\in X$に対して，$(x,y)=\sum_{j\in I}(x,e_j)\overline{(y,e_j)}$；
4. 任意の$x\in X$に対して，$\|x\|^2=\sum_{j\in I}|(x,e_j)|^2$（**Parsevalの等式**）；
5. 任意の$j\in I$に対して，$(x,e_j)=0$なら$x=0$.

証明. 以下，$L=\overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}}$とおく.

1 ⇒ 2. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$をIの有限部分集合からなる単調非減少取り尽し列とする．任意の$x\in X$と$n\in\mathbb{N}$に対し，

$$x_n=\sum_{j\in I_n}(x,e_j)e_j\in\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}$$

とおくと，命題 3.11より，$n>m\to\infty$のとき

$$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\sum_{j\in I_n\setminus I_m}(x,e_j)e_j\right\|^2=\sum_{j\in I_n\setminus I_m}|(x,e_j)|^2\to 0$$

なので，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$はCauchy列である．その極限を$\xi\in L$とおくと，任意の$k\in I$に対し

$$(x-\xi,e_k)=(x,e_k)-\sum_{j\in I}(x,e_j)(e_j,e_k)=0$$

であるから，$x-\xi \in L^{\perp}=\{0\}$ である．よって 2. が従う．

2 ⇒ 3. 内積の連続性より，

$$(x,y)=\sum_{j,k\in I}(x,e_j)\overline{(y,e_k)}(e_j,e_k)=\sum_{j\in I}(x,e_j)\overline{(y,e_j)}$$

となる．

3. ⇒ 4. $x=y$ ととれば明らかである．

4. ⇒ 5. 明らかである．

5. ⇒ 1. $x\in L^{\perp}$ とすると，5. より $x=0$ である．すると正射影定理より $X=L\oplus\{0\}=L$ となって，1. が従う． □

注意. 抽象的 Fourier 級数展開は和の順序によらないことに注意せよ．

定義. 定理 3.12 の条件が成り立つとき，正規直交系 $\{e_j\}_{j\in I}$ は**完全**であると言う．完全正規直交系は **CONS** と呼ばれることもある．

注意. 完全正規直交系を**正規直交基底**（または **ONB**）と呼ぶこともあるが，**代数基底**と混同しないように注意する必要がある．

系 3.13. Hilbert 空間 X は完全正規直交系 $\{e_j\}_{j\in I}\subset X$ を持つとする．このとき，写像

$$X\to \ell^2(I),\quad x\mapsto ((x,e_j))_{j\in I}$$

は内積を保つ線形全単射である．特に，X と $\ell^2(I)$ は Hilbert 空間として同型である．

証明. **問**として省略する． □

§ 3.8 L^2 関数の Fourier 級数展開

定理 3.14. $L^2(\mathbb{T}^d)$ において，関数の族

$$\left\{(2\pi)^{-d/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$$

は完全正規直交系をなす．

系 3.15. $u\in L^2(\mathbb{T}^d)$ とする．このとき，$\mathcal{F}u\in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ である．さらに u は $L^2(\mathbb{T}^d)$ の位相において Fourier 級数展開可能である．すなわち，u の Fourier 級数は $L^2(\mathbb{T}^d)$ の位相で収束し，

$$u=(2\pi)^{-d/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{F}u)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

が成り立つ．

定理 3.14 の証明. 与えられた関数の族が正規直交系であることは積分計算からすぐに分かるので，完全性を示す．任意の $u\in L^2(\mathbb{T}^d)$ をとる．任意の $\epsilon>0$ に対し，$C(\mathbb{T}^d)\subset L^2(\mathbb{T}^d)$ の稠密性より，ある $v\in C(\mathbb{T}^d)$ が存在して

$$\|u-v\|_{L^2}<\epsilon$$

が成り立つ．一方，定理 3.8 より，ある $w\in \mathrm{span}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx};\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ が存在して

$$\|v-w\|_{L^\infty}<(2\pi)^{-d/2}\epsilon$$

が成り立つ．これらによって

$$\|u-w\|_{L^2}<2\epsilon$$

であり，定理 3.12 の条件 1 が成立することが分かる． □

系 3.15 の証明. 定理 3.14 と定理 3.12 から明らかである． □

問. $L^2(\mathbb{T})$ において，関数の族

$$\left\{(2\pi)^{-1/2},\ \pi^{-1/2}\sin nx,\ \pi^{-1/2}\cos nx;\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

は完全正規直交系をなすことを示せ．ただし，定理 3.14 を既知としてもよい．また，任意の $u\in L^2(\mathbb{T})$ に対し，Fourier級数展開

$$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

の Fourier係数 a_n, b_n を，u を用いて積分表示せよ．

注意. 応用においては，物理的設定から u が実数値のみに限定されていることも多い．その場合，上の完全正規直交系を用いれば Fourier係数が実数のみとなり，その意味で扱いやすい．一方，理論上においては，指数関数を用いた方が記述が統一的になり，見通しが良い．

§ 3.9 超関数の Fourier級数展開

○ C^∞ 関数の Fourier級数展開

定理 3.16. $u\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$ とする．このとき，u の Fourier級数は任意階の項別微分が $\mathbb{T}^d$ 上で一様絶対収束し，さらに

$$u=(2\pi)^{-d/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{F}u)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{♣}$$

が成立する．この意味で，u は $\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$ の位相で Fourier級数展開可能である．

証明. 補題 3.1 より $\mathcal{F}u$ は急減少列であり，u の Fourier級数はその任意階の項別微分が $\mathbb{T}^d$ 上で一様絶対収束する．一方，$\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)\subset L^2(\mathbb{T}^d)$ と系 3.15 により，(♣) はすでに $L^2(\mathbb{T}^d)$ で成立している．よって主張が従う． □

○ 超関数の Fourier級数展開

定理 3.17. $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ とする．このとき，任意の $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$ に対し

$$\langle u,\phi\rangle=(2\pi)^{-d/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle(\mathcal{F}u)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\phi\rangle$$

が成り立ち，さらに右辺の級数は絶対収束する．この意味で，u は $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ の位相で Fourier級数展開可能である．

注意. 主張のような「汎関数の各点収束」を**汎弱収束**と呼び，それに付随する位相を**汎弱位相**と呼ぶ．超関数の空間には複数の位相が存在するが，標準的な位相として汎弱位相を考えることが多く，その意味で主張の等式は単に

$$u=(2\pi)^{-d/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{F}u)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\quad\text{in }\mathcal{D}'(\mathbb{T})$$

と書かれる．なお，汎弱収束，汎弱位相はそれぞれ単に**弱収束**，**弱位相**と呼ばれることもある．

証明. $(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合からなる単調非減少取り尽し列とする．定理 3.16，u の連続性および $\mathcal{F}u$ の定義より

$$\begin{aligned}\langle u,\phi\rangle&=\lim_{N\to\infty}\left\langle u,(2\pi)^{-d/2}\sum_{n\in I_N}(\mathcal{F}\phi)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\rangle\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n\in I_N}(\mathcal{F}\phi)(n)(\mathcal{F}u)(-n)\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{-n\in I_N}(\mathcal{F}\phi)(-n)(\mathcal{F}u)(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{F}\phi)(-n)(\mathcal{F}u)(n)\end{aligned}$$

が分かる．すると，定理 3.16 および補題 3.1 により，最後の級数は確かに絶対収束しており，さらに $\mathcal{F}\phi$ の定義より

$$\langle u,\phi\rangle=(2\pi)^{-d/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle(\mathcal{F}u)(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\phi\rangle$$

を得る． □

§ 3.10 トピック：Fourier正弦・余弦級数

定理 3.18. $L^2([0,\pi])$ において，関数族

$$\left\{(2/\pi)^{1/2}\sin nx;\ n\in\mathbb{N}\right\},\quad \left\{\pi^{-1/2},\ (2/\pi)^{1/2}\cos nx;\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

はそれぞれ完全正規直交系をなす．

証明. どちらも同様に示せるので，前者のみを考える．正規直交系であることは具体的な積分計算から分かるので，完全性を示せば十分である．任意の $u\in L^2([0,\pi])$ をとる．このとき，

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u(x) & \text{for } x\in(0,\pi],\\ 0 & \text{for } x=0,\\ -u(-x) & \text{for } x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

と定めると，$\tilde{u}\in L^2(\mathbb{T})$ である．$\tilde{u}$ は奇関数なので，任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$(\mathcal{F}\tilde{u})(n)=-(\mathcal{F}\tilde{u})(-n)$$

となることに注意すると，そのFourier級数展開は，$L^2(\mathbb{T})$ の位相において

$$\tilde{u}=\mathrm{i}(2/\pi)^{1/2}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{F}\tilde{u})(n)\sin nx$$

と書くことができる．これから $L^2([0,\pi])$ の位相において

$$u=\mathrm{i}(2/\pi)^{1/2}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{F}\tilde{u})(n)\sin nx$$

であることが従い，確かに定理 3.12の条件が満たされている． □

系 3.19. $u\in L^2([0,\pi])$ とする．このとき，$L^2([0,\pi])$ の位相において

$$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\cos nx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

が成立する．同様に，$L^2([0,\pi])$ の位相において

$$u=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n\sin nx,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

も成立する．

証明. 定理 3.18と定理 3.12からすぐに従う． □

注意.「$\mathbb{T}$ 上の奇関数，偶関数はそれぞれ正弦関数，余弦関数のみでFourier級数展開できる」という見方をしても良いし，実際，そのように説明されることが多いようである．ここでは次の初期値・境界値問題への応用を念頭に，半区間 $[0,\pi]$ で考えている．

問. 関数空間

$$\mathcal{D}_D([0,\pi])=\left\{u\in C^\infty([0,\pi]);\ \forall k\in\mathbb{N}_0\ u^{(2k)}(0)=u^{(2k)}(\pi)=0\right\}$$

を考える．任意の $u\in\mathcal{D}_D([0,\pi])$ に対し，そのFourier正弦係数は急減少列であることを示せ．また一方，Fourier余弦係数は必ずしもそうではないことを示せ．

問. 前問とは逆に，Fourier余弦係数は必ず急減少列となるが，Fourier正弦係数は必ずしもそうではない様な関数空間の例を与えよ．

問. 次のパラドックスを解消せよ.「任意の有界区間は適当なスケールで写り合えることから，$[-\pi,\pi]$ 上の任意の関数は正弦関数のみで展開できる．すると余弦関数すらも正弦関数で展開できるため，$L^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系

$$\left\{(2\pi)^{-1/2},\ \pi^{-1/2}\sin nx,\ \pi^{-1/2}\cos nx;\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

には，展開には不要な余計な関数が無数に含まれている.」

○ **有界区間上の熱方程式の初期値・境界値問題**

Fourier 自身による，変数分離法を用いた熱方程式の解法を，これまでの結果を用いて再確認する．$[0,\pi]$ 上の**熱方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\quad \text{for } (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi)$$

を，初期条件

$$u(0,x)=f(x)\quad \text{for } x\in[0,\pi],$$

および **Dirichlet 境界条件**

$$u(t,0)=u(t,\pi)=0\quad \text{for } t\in(0,\infty)$$

の下で考える．

ひとまず初期条件は無視して，変数分離解を仮定すると，解の族

$$u_n(t,x)=\mathrm{e}^{-n^2t}\sin nx,\qquad n\in\mathbb{N},$$

が得られる．すると，もし初期状態が

$$f(x)=a_1\sin x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots$$

のように展開できるのであれば，方程式の線形性から

$$u(t,x)=a_1\mathrm{e}^{-t}\sin x+\cdots+a_n\mathrm{e}^{-n^2t}\sin nx+\cdots \qquad (\heartsuit)$$

が解となるに違いない．これが変数分離法の基本的な流れであった．

表示式 $(\heartsuit)$ は，各 $t>0$ において，係数に指数減衰因子を持つため，f を比較的広い空間（例えば，$L^2([0,\pi])$ 等）から選んでも収束しており，$u\in C^\infty((0,\infty)\times[0,\pi])$ を与える．この u が方程式と境界条件を満たしていることもすぐにわかる．初期条件は，適当な位相における極限で解釈する．なお，f 自身は境界条件を満たさなくても良いことに注意せよ．

以上の議論でキーとなるポイントは，次の３つである．

1. $\sin nx$ を初期値とする方程式が簡単に解けること．ここで効いているのは，$\sin nx$ に対しては ∂_x^2 の作用が単なる定数倍 $-n^2$ に置き換えられること，すなわち，$\sin nx$ が ∂_x^2 の固有関数であることである．
2. 関数族 $\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ が状態空間を生成すること．これは完全性に他ならない．なお（正規）直交性は，f の展開係数 a_n を計算する際に利用される．
3. 方程式が線形であること．

１と２は，∂_x^2 をユニタリ作用素で対角化する操作に相当する．

注意. デルタ関数の族 $\{\delta(\cdot-y)\}_{y\in[0,\pi]}$ も，ある意味で，状態空間を生成するが，これらを初期値とする $[0,\pi]$ 上の熱方程式の解は，初等関数では書けない.（ちなみに，$\mathbb{R}$ 上では Gauss 関数（熱核）で書け，1–3 が満たされる.）

問. $[0,\pi]$ 上の熱方程式の初期値・境界値問題

$$\begin{aligned}&\partial_t u(t,x)=\partial_x^2 u(t,x)\quad \text{for } (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi)\\ &u(0,x)=f(x)\quad \text{for } x\in[0,\pi],\\ &u'(t,0)=u'(t,\pi)=0\quad \text{for } t\in(0,\infty)\quad \text{（}\textbf{Neumann 境界条件}\text{）}\end{aligned}$$

に対し，Fourier 余弦級数展開を用いた形式解を与えよ．

問. $[0,\pi]$ 上の波動方程式の初期値・境界値問題

$$\begin{aligned}&\partial_t^2 u(t,x)=\partial_x^2 u(t,x)\quad \text{for } (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi)\\ &u(0,x)=f(x)\quad \text{for } x\in[0,\pi],\\ &\partial_t u(0,x)=g(x)\quad \text{for } x\in[0,\pi],\\ &u(t,0)=u(t,\pi)=0\quad \text{for } t\in(0,\infty)\end{aligned}$$

に対し，Fourier 正弦級数展開を用いた形式解を与えよ．

§ 3.11 トピック：球面上の完全正規直交系

○ 球面調和関数

単位球面

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

の上で，**Laplace–Beltrami 作用素**

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

を考える．ここで，球面座標系 (θ, ϕ) は

$$x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\theta$$

で与えられるものとする．

定義. 整数 $l, m \in \mathbb{Z}$ で $|m| \le l$ を満たすものに対し，**球面調和関数**を

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}$$

で定義する．ここで，P_l^m は**Legendre の同伴関数**である．

定理 3.20. 1. $-\Delta_{\mathbb{S}^2}Y_l^m = l(l+1)Y_l^m$ が成り立つ．

2. $\{Y_l^m\}_{l,m}$ は関数空間

$$L^2(\mathbb{S}^2) = \left\{u\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C};\ \int_{\mathbb{S}^2}|u(\theta, \phi)|^2\,\mathrm{d}S(\theta, \phi)\right\}$$

の完全正規直交系である．

証明. 省略する． □

注意. これは $-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ の「対角化可能性」を意味する．

系 3.21. 任意の $u \in L^2(\mathbb{S}^2)$ と $|m| \le l$ に対し，

$$(\mathcal{F}u)(l, m) = (u, Y_l^m)_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \int_{\mathbb{S}^2}u(\theta, \phi)\overline{Y_l^m(\theta, \phi)}\,\mathrm{d}S(\theta, \phi)$$

と定めると，$L^2(\mathbb{S}^2)$ の位相において

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\mathcal{F}u)(l, m)Y_l^m$$

が成り立つ．

証明. 定理 3.20 と定理 3.12 からすぐに従う． □

問. 1. $u \in \mathcal{D}(\mathbb{S}^2) := C^\infty(\mathbb{S}^2)$ の球面調和関数展開が $\mathcal{D}(\mathbb{S}^2)$ の位相で収束することを示せ．

2. $\mathbb{S}^2$ 上の超関数空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^2)$ を適当に定義し，$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^2)$ の（弱位相に関する）球面調和関数展開を正当化せよ．

○ 球面上の波動方程式への応用

$\mathbb{S}^2$ 上の**波動方程式**の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{\mathbb{S}^2}u, \quad u(0, \cdot) = v, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = w \qquad (\spadesuit)$$

を考える．（なお，現実の球面上の波動現象を記述するモデル方程式として，これが適切であるかはここでは問わないことにする．）

定理 3.22. 任意の $v, w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ に対し

$$u(t, \cdot) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\mathcal{F}v)(l, m)\left(\cos t\sqrt{l(l+1)}\right)Y_l^m + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\mathcal{F}w)(l, m)\frac{\sin t\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{l(l+1)}}Y_l^m$$

と定めると，$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2)$ であり，さらにこれは $(\spadesuit)$ の解である．

証明. 時間の都合上，省略する．なお，形式的に確かめることは容易であり，その正当化もそれほど難しいわけではない． □

注意． 1．与えられた解の表示公式は，

$$u(t,\cdot) = \left(\cos t\sqrt{-\Delta_{\mathbb{S}^2}}\right) v + \frac{\sin t\sqrt{-\Delta_{\mathbb{S}^2}}}{\sqrt{-\Delta_{\mathbb{S}^2}}} w$$

と表記されることもある．

2. 定理の主張は，$u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^2)$ の場合へ拡張することができるが，波動方程式には熱方程式のような**正則化**の効果はない．

3. 同様に，$\mathbb{S}^2$ 上の熱方程式を議論することもできる．

第4章 Sobolev空間

§ 4.1 Euclid空間上のSobolev空間

定義. 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し，s**次Sobolev空間**を

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d);\ \mathcal{F}u \in L^2_s(\mathbb{R}^d)\right\}$$

で定義する．ここで $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ は s 次重み付き L^2 空間である．$H^s(\mathbb{R}^d)$ は，内積

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s} (\mathcal{F}u)(\xi) \overline{(\mathcal{F}v)(\xi)}\, \mathrm{d}\xi$$

を持つHilbert空間である．

注意． 1．$L^2_s(\mathbb{R}^d)$ は，内積

$$(u,v)_{L^2_s} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^{2s} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x.$$

を持つHilbert空間であり，これは s 次重み付き L^2 ノルムと両立する．

2. 後述するように，$H^s(\mathbb{R}^d)$ は s 階までの超関数微分がすべて $L^2(\mathbb{R}^d)$ に属するような（超）関数の空間と考えることができる．ここで，s は非整数や負でもよいことに注意せよ．

3. 任意の $s < t$ に対し，明らかに

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset H^t(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

である．

問. デルタ関数 δ は，任意の $s < -d/2$ に対し，$H^s(\mathbb{R}^d)$ に属することを示せ．さらに，Friedrichsの軟化子 δ_ϵ は，任意の $s < -d/2$ に対し，$H^s(\mathbb{R}^d)$ の位相において

$$\lim_{\epsilon\to+0} \delta_\epsilon = \delta$$

を満たすことを示せ．

定義. $s \in \mathbb{R}$ とする．作用素 $\langle D\rangle^s \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ を，各 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$\langle D\rangle^s u = \mathcal{F}^* \langle \xi\rangle^s \mathcal{F} u$$

で定める．

命題 4.1. $s, t \in \mathbb{R}$ とする．$\langle D\rangle^s$ は，ユニタリ作用素

$$H^{t+s}(\mathbb{R}^d) \to H^t(\mathbb{R}^d)$$

を定める．

証明. 主張は，Fourier変換を通じて，対応する重み付き L^2 空間の性質に帰着される．すると証明は易しい．詳細は省略する． □

命題 4.2. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ かつ $s \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$u \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)$ となるための必要十分条件は

$$u, D_1 u, \ldots, D_d u \in H^s(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つことである．特に，任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対し，

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d);\ \text{任意の}\,|\alpha| \le k\,\text{に対し}\,D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d) \Big\}$$

と書ける．ここで D^α は超関数微分の意味で考えるものとする．

証明. 前半の主張は，$\langle \xi\rangle^{s+1}\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と

$$\langle \xi\rangle^s \mathcal{F}u, \xi_1 \langle \xi\rangle^s \mathcal{F}u, \ldots, \xi_d \langle \xi\rangle^s \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

が同値であることに注意すれば，明らかである．後半の主張は，前半と帰納法からすぐに従う． □

命題 4.3. 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ は稠密である．

証明. Fourier変換を通じて，主張は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2_s(\mathbb{R}^d)$ の稠密性に帰着される．しかしこれは易しいので，**問**として省略する．(系 1.14の証明も参照せよ.) □

定理 4.4 (**Sobolev埋め込み定理**)**.** $s \in \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}_0$ は $s > k + d/2$ を満たすとする．このとき，

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ u \in C^k(\mathbb{R}^d);\ \text{任意の}\,|\alpha| \le k\,\text{に対し}\,\partial^\alpha u\,\text{は有界} \Big\}$$

が成り立つ．さらに，ある $C > 0$ が存在して，任意の $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\|u\|_{C^k_{\mathrm{b}}} := \sup\Big\{ |\partial^\alpha u(x)|;\ |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{R}^d \Big\} \le C\|u\|_{H^s}$$

が成り立つ．(したがって，埋め込み $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ は有界である.)

証明. まず，$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，任意の $|\alpha| \le k$ と $x \in \mathbb{R}^d$ に対し，Fourier反転公式とCauchy–Schwarzの不等式により

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(x)| &= (2\pi)^{-d/2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \xi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right| \\ &\le (2\pi)^{-d/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2|\alpha|} \langle \xi\rangle^{-2s}\, \mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \|u\|_{H^s} \\ &= C\|u\|_{H^s}\end{aligned}$$

が成り立つ．これは，任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\|u\|_{C^k_{\mathrm{b}}} \le C\|u\|_{H^s} \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つことを意味する．

さて，次に$u \in H^s(\mathbb{R}^d)$とする．命題 4.3より，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上の点列$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$で

$$u_j \to u \quad \text{in } H^s(\mathbb{R}^d)$$

を満たすものがとれる．ところが，$j,k\to\infty$のとき，(♠)より

$$\|u_j - u_k\|_{C^k_{\mathrm{b}}} \le C\|u_j - u_k\|_{H^s} \to 0$$

なので，$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$は$C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$上のCauchy列でもある．したがって，ある$v \in C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$が存在して

$$u_j \to v \quad \text{in } C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つ．すると，任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対して，

$$\langle u,\phi\rangle = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}^*\phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle \mathcal{F}u_j, \mathcal{F}^*\phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle u_j,\phi\rangle = \langle v,\phi\rangle$$

が成り立つため，$u = v \in C^k(\mathbb{R}^d)$が従う．主張の不等式は，上の$u_j$に対し(♠)を適用し，$j\to\infty$とすればよい． □

§ 4.2 抽象論からの準備：Rieszの表現定理

定義. Hilbert空間Xから$\mathbb{C}$への有界線形汎関数全体の集合を，Xの**共役空間**と呼び，X^*で表す．すなわち，

$$X^* = \{f\colon X\to\mathbb{C};\ f\text{は線形かつ有界}\}$$

とする．また，任意の$f \in X^*$に対し，

$$\|f\| = \|f\|_{X^*} = \inf\Big\{M \ge 0;\ \forall x\in X\ |f(x)| \le M\|x\|\Big\}$$

と定める．

命題 4.5. 任意の$f\in X^*$に対し，

$$\|f\| = \sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

が成り立つ．さらに$\|\cdot\|$はX^*上のノルムである．

証明. まず，任意の$x\in X$に対し

$$|f(x)| \le \|f\|\|x\|$$

が成り立つことから，

$$\sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|f\|$$

が従う．また，任意の$x\ne 0$に対して

$$|f(x)| = \frac{|f(x)|}{\|x\|}\|x\| \le \left(\sup_{y\ne 0}\frac{|f(y)|}{\|y\|}\right)\|x\|$$

であることから，

$$\|f\| \le \sup_{y\ne 0}\frac{|f(y)|}{\|y\|}$$

となる．よって第1の等号が示された．一方，任意の$x\ne 0$に対して

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \le \sup_{\|y\|=1}|f(y)|$$

であることから，

$$\sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \sup_{\|y\|=1}|f(y)|$$

である．最後に，任意の$\|x\|=1$に対して

$$|f(x)| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \sup_{y\ne 0}\frac{|f(y)|}{\|y\|}$$

であることから，

$$\sup_{\|x\|=1}|f(x)| \le \sup_{x\ne 0}\frac{|f(y)|}{\|y\|}$$

を得る．第2の等号も示された．ノルムであることの確認は**問**とする． □

定理 4.6. $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ はBanach空間である．

証明．$(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を X^* 上のCauchy列とする．すると，定義より

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\geq 0 \text{ s.t. } \forall j,k\geq N\ \forall x\in X \quad |f_j(x)-f_k(x)|\leq\epsilon\|x\| \quad (\clubsuit)$$

が成り立つ．特に，各 $x\in X$ に対し $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ 上のCauchy列であり，収束する．そこで汎関数 $f\colon X\to\mathbb{C}$ を

$$f(x)=\lim_{j\to\infty}f_j(x) \quad \text{for } x\in X,$$

で定めると，明らかに f は線形である．また，($\clubsuit$) と三角不等式から

$$|f(x)|\leq\lim_{j\to\infty}|f_j(x)-f_k(x)|+|f_k(x)|\leq(\epsilon+\|f_k\|)\|x\|$$

となるので，f は有界である．さらに，($\clubsuit$) で $j\to\infty$ とすると

$$\forall\epsilon>0\ \exists N\geq 0 \text{ s.t. } \forall k\geq N\ \forall x\in X \quad \|f-f_k\|\leq\epsilon$$

となるので，$f_k\to f$ in X^* を得る．よって X^* はBanach空間である．□

例. X をHilbert空間とし，任意の $y\in X$ をとる．このとき，

$$f_y(x)=(x,y) \quad \text{for } x\in X$$

と定めると，$f_y\in X^*$ である．次のRieszの表現定理は X^* の元がすべてこの形で尽くされることを意味する．

定理 4.7 (Rieszの表現定理). X をHilbert空間とする．任意の $f\in X^*$ に対し，$y\in X$ が一意的に存在して

$$f=(\,\cdot\,,y)$$

が成り立つ．さらにこのとき，

$$\|f\|_{X^*}=\|y\|_X$$

が成り立つ．

注意. Rieszの表現定理による対応 $X^*\to X$，$f\mapsto y$ はノルムを保つ共役線形同型であり，しばしばこれを通じて $X^*\cong X$ と同一視する．

証明．*Step 1.* まず任意の $f\in X^*$ に対し，主張の $y\in X$ を構成する．$f=0$ なら $y=0$ ととれるので，$f\neq 0$ としてよい．このとき

$$N=\{x\in X;\ f(x)=0\}$$

は X の閉部分空間であり，仮定より $N\neq X$ である．したがって，ある $z\in N^\perp\setminus\{0\}$ をとることができる．任意の $x\in X$ に対して，f の線形性より，

$$f(f(z)x-f(x)z)=0$$

なので $f(z)x-f(x)z\in N$ であり，$z\in N^\perp\setminus\{0\}$ に注意すると

$$(f(z)x-f(x)z,z)=0$$

が成り立つ．よって，任意の $x\in X$ に対して

$$f(x)=\left(x,\overline{f(z)}z/\|z\|^2\right)$$

であり，$y=\overline{f(z)}z/\|z\|^2$ ととればよいことが分かる．

Step 2. 次に一意性を示す．もし $y,y'\in X$ に対して $f=(\,\cdot\,,y)=(\,\cdot\,,y')$ なら，任意の $x\in X$ に対して

$$(x,y-y')=0$$

が成り立つ．ここで $x=y-y'$ ととれば，$y=y'$ が従う．

Step 3. 最後に等長性を示す．まず，Cauchy–Schwarzの不等式より

$$|f(x)|=|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$$

なので，$\|f\|\leq\|y\|$ である．一方，$x=y$ と取ると

$$\|y\|^2=|f(y)|\leq\|f\|\|y\|$$

なので，$\|y\|\leq\|f\|$ である．したがって，$\|f\|=\|y\|$ を得る．□

§ 4.3 Sobolev空間の双対性

定理 4.8. $s \in \mathbb{R}$とする．任意の$f \in (H^s(\mathbb{R}^d))^*$に対しある$v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$が一意的に存在して，任意の$u \in H^s(\mathbb{R}^d)$に対し

$$f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}u)(\xi)\overline{(\mathcal{F}v)(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

が成り立つ．特にこの対応により，ノルムを保つ共役線形同型

$$(H^s(\mathbb{R}^d))^* \cong H^{-s}(\mathbb{R}^d) \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つ．

注意. Rieszの表現定理から従う共役線形同型

$$(H^s(\mathbb{R}^d))^* \cong H^s(\mathbb{R}^d) \qquad (\heartsuit)$$

と双対の取り方が異なることに注意せよ．より明示的には，同型$(\spadesuit)$には0次Sobolev内積が，同型$(\heartsuit)$にはs次Sobolev内積が用いられている．

証明. *Step 1.* はじめに，任意の$f \in (H^s(\mathbb{R}^d))^*$に対し，条件を満たす$v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$を構成する．Rieszの表現定理よりある$w \in H^s(\mathbb{R}^d)$が存在して，任意の$u \in H^s(\mathbb{R}^d)$に対し

$$f(u) = (u, w)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s}(\mathcal{F}u)(\xi)\overline{(\mathcal{F}w)(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

が成り立つ．よって

$$v = \mathcal{F}^*(\langle\xi\rangle^{2s}(\mathcal{F}w)) = \langle D\rangle^{2s} w \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$$

とおけば，主張を満たすvが得られる．

Step 2. 次に一意性を示す．もし$v' \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$も同じ条件を満たすとすると，任意の$u \in H^s(\mathbb{R}^d)$に対し

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}u)(\xi)\overline{(\mathcal{F}(v-v'))(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 0$$

が成り立つ．すると変分法の基本補題より$\mathcal{F}(v-v') = 0$であり，$v = v'$が従う．

Step 3. 最後に共役線形同型$(\spadesuit)$を示す．fからvへの対応はその定め方から共役線形である．さらにRieszの表現定理とvの定め方から

$$\|f\|_{(H^s)^*} = \|w\|_{H^s} = \|v\|_{H^{-s}}$$

である．したがって，fからvへの対応はノルムを保ち，特に単射である．さらに，任意の$v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$に対し，

$$f_v(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}u)(\xi)\overline{(\mathcal{F}v)(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{for } u \in H^s(\mathbb{R}^d)$$

と定めると，明らかに$f_v \in (H^s(\mathbb{R}^d))^*$である．よって，$f$から$v$への対応は全射である．以上により主張が従う．$\square$

§ 4.4 緩増加超関数の構造

定義. 次数$(s,t) \in \mathbb{R}^2$の重み付きSobolev空間を

$$\begin{aligned} H^s_t(\mathbb{R}^d) &= \langle x\rangle^{-t}\langle D\rangle^{-s} L^2(\mathbb{R}^d) \\ &= \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d);\ \langle D\rangle^s\langle x\rangle^t u \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\} \end{aligned}$$

で定義する．

定理 4.9. 等号

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{s,t\in\mathbb{R}} H^s_t(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つ．

定義. $v \in C(\mathbb{R}^d)$ が**緩増加連続関数**であるとは，ある $C > 0$ と $m \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$|v(x)| \le C\langle x\rangle^m$$

が成り立つことである．

注意. 緩増加連続関数は，以前定義した緩増加関数より広いクラスである．

系 4.10. 任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し，ある有限個の緩増加連続関数 $v_\alpha \in C(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$u = \sum_\alpha D^\alpha v_\alpha$$

が成り立つ．

注意. 通常，**緩増加超関数の構造（定理）**と言った場合は系 4.10 を指す．

定理 4.9 の証明. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \supset \bigcup_{s,t\in\mathbb{R}} H^s_t(\mathbb{R}^d)$ は自明なので，逆の包含関係を示す．任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ をとる．緩増加超関数の定義よりある $C_1 > 0$ と $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して，任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$|\langle u, \phi\rangle| \le C_1|\phi|_{k,\mathcal{S}} = C_1 \sup\Big\{|\langle x\rangle^l \partial^\alpha\phi(x)|;\ l + |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{R}^d\Big\}$$

が成り立つ．ここで，Sobolev 埋め込み定理より十分大きな $s > 0$ に対し

$$|\phi|_{k,\mathcal{S}} \le C_2 \sup\Big\{|\partial^\alpha\langle x\rangle^k\phi|;\ |\beta| \le k,\ x \in \mathbb{R}^d\Big\} \le C_3\|\langle x\rangle^k\phi\|_{H^s}$$

であることに注意すると，任意の $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\Big|\Big\langle \langle x\rangle^{-k}u, \psi\Big\rangle\Big| \le C_4\|\psi\|_{H^s}$$

が従う．よって $\langle x\rangle^{-k}u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ であり，ある $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を用いて

$$u = \langle x\rangle^k\langle D\rangle^s v$$

と書くことができる．これにより主張は示された． □

系 4.10 の証明. 任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ をとる．定理 4.9 よりある $s, t \in \mathbb{R}$ と $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$u = \langle x\rangle^{-t}\langle D\rangle^{-s}v = \langle x\rangle^{-t}\langle D\rangle^{2n}\langle D\rangle^{-2n-s}v$$

と書ける．ここで $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると，Sobolev 埋め込み定理より

$$\langle D\rangle^{-2n-s}v \in C^0_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つ．あとは Leibniz 則を用いて $\langle x\rangle^{-t}$ と $\langle D\rangle^{2n}$ を交換するなど，重み $\langle x\rangle$ をすべて $\langle D\rangle^{-2n-s}v$ の側に押し付ければ，主張の表示が従う． □

§ 4.5 トーラス上の Sobolev 空間

○ Sobolev 空間の定義

定義. $s \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{Z}^d$ 上の s **次重み付き** ℓ^2 **空間**を

$$\ell^2_s(\mathbb{Z}^d) = \Big\{u\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C};\ \langle n\rangle^s u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)\Big\}$$

で定める．さらに，$\mathbb{T}^d$ 上の s **次 Sobolev 空間**を

$$H^s(\mathbb{T}^d) = \Big\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d);\ \mathcal{F}u \in \ell^2_s(\mathbb{Z}^d)\Big\}$$

で定める．

問. $\ell^2_s(\mathbb{Z}^d)$ および $H^s(\mathbb{T}^d)$ は，それぞれ適当な内積に関して Hilbert 空間となる．このことを確かめよ．

上で定義された $H^s(\mathbb{T}^d)$ に対しても $H^s(\mathbb{R}^d)$ と同様の性質が成り立つ．やや冗長ではあるが，以下厭わずに列挙する．ただし証明は適宜省略する．

○ **基本性質**

命題 4.11. 任意の $s < t$ に対し，

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}^d) = \bigcap_{r\in\mathbb{R}} H^r(\mathbb{T}^d) \subset H^t(\mathbb{T}^d) \subset H^s(\mathbb{T}^d) \subset \bigcup_{r\in\mathbb{R}} H^r(\mathbb{T}^d) = \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

証明．これらの関数空間はFourier空間では重み付き ℓ^2 空間で書け，包含関係は自明である．両端の等号についても，補題 3.1 からすぐに従う（詳細は**問**とする）． □

注意. 定理 4.9 に相当する主張がすでにこの段階で得られている．

定義. $s \in \mathbb{R}$ とする．作用素 $\langle D\rangle^s\colon \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ を，各 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ に対し，

$$\langle D\rangle^s u = \mathcal{F}^*\langle n\rangle^s \mathcal{F}u$$

で定める．

命題 4.12. $s, t \in \mathbb{R}$ とする．$\langle D\rangle^s$ は，ユニタリ作用素

$$H^{t+s}(\mathbb{T}^d) \to H^t(\mathbb{T}^d)$$

を定める．

証明．主張は，Fourier空間で考えれば，対応する重み付き ℓ^2 空間の性質に帰着される．すると証明は易しい．詳細は省略する． □

命題 4.13. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$ かつ $s \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$u \in H^{s+1}(\mathbb{T}^d)$ となるための必要十分条件は

$$u, D_1u, \ldots, D_du \in H^s(\mathbb{T}^d)$$

が成り立つことである．特に，任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対し，

$$H^k(\mathbb{T}^d) = \left\{u \in L^2(\mathbb{T}^d);\ \text{任意の}\ |\alpha| \le k\ \text{に対し}\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{T}^d)\right\}$$

と書ける．ここで D^α は超関数微分の意味で考えるものとする．

証明．補題 3.1を用いれば命題 4.2と同様に示される．詳細は**問**として省略する． □

命題 4.14. 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{D}(\mathbb{T}^d) \subset H^s(\mathbb{T}^d)$ は稠密である．

証明．命題 4.3と同様である．詳細は**問**として省略する． □

○ **Sobolev埋め込み定理**

定理 4.15 (Sobolev埋め込み定理). $s \in \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}_0$ は $s > k + d/2$ を満たすとする．このとき，

$$H^s(\mathbb{T}^d) \subset C^k(\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．さらに，ある $C > 0$ が存在して，任意の $u \in H^s(\mathbb{T}^d)$ に対し

$$\|u\|_{C^k} := \sup\left\{|\partial^\alpha u(x)|;\ |\alpha| \le k,\ x \in \mathbb{T}^d\right\} \le C\|u\|_{H^s}$$

が成り立つ.（したがって，埋め込み $H^s(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{T}^d)$ は有界である.）

証明．定理 4.4と同様である．詳細は**問**として省略する． □

○ **双対性**

定理 4.16. $s \in \mathbb{R}$とする．任意の$f \in (H^s(\mathbb{T}^d))^*$に対しある$v \in H^{-s}(\mathbb{T}^d)$が一意的に存在して，任意の$u \in H^s(\mathbb{T}^d)$に対し

$$f(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}u)(n)\overline{(\mathcal{F}v)(n)}$$

が成り立つ．特にこの対応により，ノルムを保つ共役線形同型

$$(H^s(\mathbb{T}^d))^* \cong H^{-s}(\mathbb{T}^d) \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つ．

証明．定理 4.8と同様である．詳細は**問**として省略する． □

○ **構造定理**

系 4.17. 任意の$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$に対しある有限個の$v_\alpha \in C(\mathbb{T}^d)$が存在して

$$u = \sum_\alpha D^\alpha v_\alpha$$

が成り立つ．

証明．**問**として詳細は省略する．（系 4.10と同様に示される．） □

○ **局所構造の特徴づけ**

定理 4.18. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$かつ$s \in \mathbb{R}$とする．このとき，$u \in H^s(\mathbb{T}^d)$であるための必要十分条件は，任意の平坦な座標近傍$U \subset \mathbb{T}^d$と任意の$\chi \in C_0^\infty(U)$に対し，$\chi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$が成り立つことである．

注意． 1. $\chi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$は，同一視$U \subset \mathbb{R}^d$を通じて，零拡張の意味で考える．すなわち，任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$に対して

$$_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}\langle \chi u, \phi\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = {}_{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)}\langle u, \chi\phi\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)}$$

と定めることで，$\chi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$とみなしている．

2. 上の主張は2つの関数クラス$H^s(\mathbb{T}^d)$と$H^s(\mathbb{R}^d)$の**局所構造**（あるいは各点周りでの特異性の強さ）が同一であることを意味しており，局所的には定理 4.15や系 4.17よりも精密な結果である．

証明．*Step 1.* まず必要性を示す．$u \in H^s(\mathbb{T}^d)$とする．任意の平坦な座標近傍$U \subset \mathbb{T}^d$と$\chi \in C_0^\infty(U)$を取る．定理 3.17により，

$$\chi u = (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}u)(n)\chi e^{inx} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$$

と書けるが，右辺の級数は$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$の意味でも収束している．よって，Fourier変換を考えることができ，

$$(\mathcal{F}\chi u)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}u)(n)(\mathcal{F}\chi)(\xi - n)$$

となる．$\mathcal{F}\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$なので，ある$C_1, C_2 > 0$が存在して，$\xi \in \mathbb{R}^d$に関して一様に

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi - n\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\chi)(\xi - n)| \le C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi - n\rangle^{-d-1} \le C_2$$

と評価される．そこでCauchy–Schwarz不等式を用いると

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^{2s}|(\mathcal{F}\chi u)(\xi)|^2 &\le (2\pi)^{-d}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle n\rangle^s(\mathcal{F}u)(n)\langle\xi-n\rangle^{|s|}(\mathcal{F}\chi)(\xi-n)\right|^2\\ &\le C_2\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle n\rangle^{2s}|(\mathcal{F}u)(n)|^2\langle\xi-n\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\chi)(\xi-n)|\end{aligned}$$

であり，よってTonelliの定理から

$$\|\chi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \le C_2\|u\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)}\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\chi)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi<\infty$$

を得る．

Step 2. 次に十分性を示す．逆に，$\chi u\in H^s(\mathbb{R}^d)$を仮定する．任意の平坦な座標近傍$U\subset\mathbb{T}^d$と$\chi\in C_0^\infty(U)$をとる．1の分割により$\chi u\in H^s(\mathbb{T}^d)$を示せばよい．$\eta\in C_0^\infty(U)$を

$$\eta=1 \quad \text{on} \quad \operatorname{supp}\chi$$

のようにとると，

$$(\mathcal{F}\chi u)(n)=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{F}\chi u)(\xi)(\mathcal{F}\eta)(n-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

と書ける．

前半と同様に，$\mathcal{F}\eta\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$なので，Cauchy–Schwarz不等式を用いて

$$\begin{aligned}&\langle n\rangle^{2s}|(\mathcal{F}\chi u)(n)|^2\\ &\le (2\pi)^{-d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^s(\mathcal{F}\chi u)(\xi)\langle n-\xi\rangle^{|s|}(\mathcal{F}\eta)(n-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|^2\\ &\le (2\pi)^{-d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s}|(\mathcal{F}\chi u)(\xi)|^2\langle n-\xi\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\eta)(n-\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right)\\ &\quad\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^d}\langle n-\xi\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\eta)(n-\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right)\\ &\le C_3\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s}|(\mathcal{F}\chi u)(\xi)|^2\langle n-\xi\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\eta)(n-\xi)|\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

と評価される．すると，前半と同様に，Tonelliの定理から

$$\|\chi u\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)}\le C_3\|\chi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle n-\xi\rangle^{|s|}|(\mathcal{F}\eta)(n-\xi)|<\infty$$

が従う． □