12 I 人口成長の数理モデル

1. マルサスモデル

人口成長がどのような法則性をもつかという問題に対する最も基礎的な解答は幾何学的ないし指数関数的に増加する人口モデルとして表現される。いま資源の制約のない不変な居住環境において孤立して生きている一つの均質な人口集団を考える。集団のサイズは十分におおきくて、連続量として表現してさしつかえないと仮定しよう。時刻tにおける人口数を$P(t)$として、出生率と死亡率をそれぞれβ、μとすれば、人口成長は以下の方程式で支配される：

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) \tag{1}$$

ここで$\lambda = \beta - \mu$は連続時間における**人口成長率** (rate of increase) に他ならない。これより$P(t) = P(0)e^{\lambda t}$を得るが、このような指数関数的増加法則に従う人口を**マルサス型人口** (Malthusian population)、また成長率λを**マルサス径数** (Maltusian parameter) と呼んでいる。(1) は連続時間モデルであるが、時間を離散的にとれば

$$P(t+1) = (1+r)P(t) \tag{2}$$

という差分方程式モデルを得る。ここでrが単位期間における人口成長率（幾何学的成長率）になり、t時刻での人口は$P(t) = (1+r)^t P(0)$となる。これらのモデルの名称は人口の幾何学的成長という概念が**マルサス** (T. R. Malthus) の有名な「人口論」(初版、1798) によって広く受容されるようになったことに因んでいるが、既に17世紀には認識されていた法則性であってマルサスの創見によるものではない [21]。

人口の増加を世代単位でみて、世代の重複がなくて世代間の人口比が一定であると仮定するならば幾何級数的増加法則は自明であるが、人間人口のように世代が重複している場合にそれが幾何学的成長をおこなうかどうかは実は全く自明なことではない。この点は後の安定人口理論の出現によって初めて明らかにされたのであるが、その基本的アイディアは既に１３世紀の**レオナルド・ピサノ（フィボナッチ）** (Leonardo Pisano/Fibonacci) による有名な算術書「リベル・アバッキ」(Liber Abaci, 1202) に示された兎の増殖モデル（フィボナッチ数列）において見ることができる。１８世紀には**オイラー** (L. Euler) が**ジュースミルヒ** (J. P. Süssmilch) への書簡のなかで人間人口の増加を差分方程式によって記述して、一定の出生、死亡秩序のもとにある年齢構造を持った人口が漸近的には幾何学的成長をおこなうことを指摘した。また幾何級数的に増加しつつある人口における様々な人口学的指標値の関係を述べて、それらが不完全な人口データの推定に利用できることを示した [5] [28]。しかしながらこの業績は２０世紀に安定人口理論が出現するまで見過ごされ、影響力を持たなかった。

2. ロジスティックモデル

単純なマルサスモデルは、限られた時間に関する人口増加を記述する場合以外は非現実的である。現実には外的な環境の変動や資源の制約、人口それ自体が人口の生存条件を変化させる要因になること等を考慮すれば、成長率が不変に保たれることはない。マルサスの人口論以前より人口の無制限な成長は不可能であって増加率はやがて鈍化するという考え方は存在していた。１９世紀にはいると**ケトレー** (A. Quetelet) が人口は終局的には定常的になるべきことを論じていたが、１９世紀半ばに至って、上限のある人口成長を初めて数理モデルとして定式化したのは**フェアフルスト** (P. F. Verhulst) である [31]。フェアフルストのモデルは**ロジスティックモデル (logistic model)** と呼ばれ、以下のような非線形方程式で表される：

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) P(t) \tag{3}$$

このモデルにおいては人口サイズ$P(t)$は$t \to \infty$において一定値$K > 0$に単調に漸近する。この量Kを当該の環境の**環境収容力**ないし**環境容量** (carrying capacity) とよぶ。このモデルは人口密度が高くなると人口規模は人口成長に負の効果を与える（**ロジスティック効果**）であろうという考え方に依拠している。フェ

アフルストの業績は長らく埋もれていたが、1920 年代になってパール (R. Pearl) とリード (L. J. Reed)[22] によって再発見され、広く利用されるようになった。特に密度依存成長というアイディアは、個体群生態学における基本的な原理ともなっている。またロジスティック方程式は差分化すると、パラメータの値によって周期解や**カオス**的な解が出現することが発見され、その予想外に豊かな解の構造が 1970 年代以降再び注目されるようになった。一方、低い人口密度においては人口規模は生殖のチャンスを増加させるから、人口規模は人口成長に対して正の効果を与えると考えられるが、これは**アリー効果** (Allee effect) と呼ばれる。

3. 安定人口モデル

20 世紀初頭には年齢構造のある人間人口の数理モデルは**ボルトキヴィッチ** (L. V. Bortkiewicz) や**ロトカ** (A. J. Lotka) などによって再び研究されるようになり、シャープとロトカ [27] によって初めて再生過程として明確に定式化された。このモデルは以下のような線形積分方程式（再生方程式）で表される：

$$B(t) = G(t) + \int_0^t \beta(a)\ell(a)B(t-a)da \tag{4}$$

ここでは一方の性のみを考えていて、$B(t)$ は単位時間あたりの出生数であり、$\ell(a)$ は a 歳までの生存率、$\beta(a)$ は a 歳における年齢別出生率である。$G(t)$ は時刻 $t=0$ において生存していた初期人口が生む単位時間あたりの出生数である。これを**安定人口モデル** (stable population model) と呼ぶ。このモデルによってオイラーが既に気がついていたように、年齢構造のある人口は一定不変の出生、死亡の条件のもとでは漸近的にマルサス的成長をおこなうことが証明された [6] [11] [16] [23]。

ロトカとは独立に**マッケンドリック** (A. G. McKendrick) [19] は医学への数理モデルの適用の試みのなかで人口の年齢分布関数が満たすべき以下のような一階の偏微分方程式を提出していた：

$$\frac{\partial p(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial p(t,a)}{\partial a} = -\mu(t,a)p(t,a) \tag{5}$$

ここで $p(t,a)$ は時刻 t における a 歳の人口密度であり、$\mu(t,a)$ は時刻 t における a 歳の**死亡力** (force of mortality) である。(5) を**マッケンドリック方程式** (McKendrick equation) と呼ぶ。この方程式は長らく忘れさられていたが、1950 年代に至ってフォン・フェルスター (H. Von Foerster) により細胞増殖のモデルとして再発見されて理論生物学における利用が広まったためにフォン・フェルスター方程式と呼ばれることもある。時刻 t における年齢別出生率を $\beta(t,a)$ として、この方程式に境界条件

$$p(t,0) = \int_0^\infty \beta(t,a)p(t,a)da \tag{6}$$

を付加したシステム (5)-(6) は封鎖人口の年齢分布を決定する全く一般的な方程式系になる。特に出生率、死亡率が時間に依存しない場合は $p(t,0) = B(t)$ とおけばロトカの積分方程式 (4) の微分方程式による同値な表現になっていることがわかる。すなわち連続時間の安定人口モデルは偏微分方程式の初期値・境界値問題として考察することができる。この事実は 1980 年代に至って、年齢構造のある人口モデルを無限次元力学系の観点から研究しようとする動機付けとなった [32]。

次節で述べるように安定人口モデルは人口学の分野において実用的にも非常な有効性を示してきたが、両性の相互作用や資源・環境制約によるフィードバック効果、人口の不均質性等を考慮していない点で限定的なものであった。1970 年代後半に入ると、ロジャース (A. Rogers) [24] やショーン (R. Schoen) [26] は居住地域や婚姻状態によって分割された人口（多状態人口: multistate population) に対して適用できるようにロトカの理論を拡張した。この多状態モデルでは、それまでの年齢、性という構造以外にも様々な人口学的、社会学的、経済学的な内部構造をもつ異質的な人口集団が各状態間を遷移しつつ成長していく過程を記述できることとなり、社会現象の分析ツールとしての人口学的方法の射程は著しく拡大された。

1970 年代に世界的な人口爆発が懸念されるようになると、人口成長を人為的に制御して適度人口へ導こうという試みが数学的問題として定式化されるようになった。宋健 (Song Jian) 等の中国の研究者は安定

人口モデルの制御問題を考察した。こうした研究は中国における一人っ子政策などの人口政策に理論的支持を与えたが、その理論が専ら期間出生力指標を制御変数として想定していたために実行可能性には疑問があり、出生力実現におけるタイミング要因を無視しているとして西欧の人口学者からは批判を浴びることにもなった。しかし一般に年齢構造をもつ人口の制御問題は疫学や生態学における重要な課題である [1] [29]。

4. レスリー行列モデル

第二次世界大戦中にベルナルデリ (H. Bernardelli), ルイス (E. G. Lewis), **レスリー** (P. H. Leslie) [18] はそれぞれ独立に離散的な年齢・時間間隔をもつ行列人口モデルを考案した。時刻$t = 0, 1, 2, ...$における年齢階級jにおける人口数を$p_j(t), j = 0, 1, 2, ...$として人口ベクトルを$p(t) := (p_0(t), ..., p_\omega(t))^T$とおく。ただし$\omega$は最高年齢階級であり、ベクトルは縦ベクトルであるとする。**レスリー行列** (Leslie matrix) Aは以下のように定義される：

$$A := \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & \dots & m_\omega \\ s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

ここで$m_j \geq 0$は時刻tと$t + 1$の間で年齢階級jの単位人口から生まれた新生児のうち、$t + 1$において生残している数であり、$s_j > 0$は年齢階級$j - 1$の人が単位時間を生残して年齢階級jとなる確率である。このとき**レスリー行列モデル** (Leslie matrix model) は以下のように表される：

$$p(t + 1) = Ap(t) \tag{8}$$

$p(0)$を与えられた初期人口ベクトルとすれば、t時間後の年齢別人口は$p(t) = A^t p(0)$として得られる。もし少なくとも連続する二つの年齢階級においてm_jが正であれば、レスリー行列には唯一つの正の固有値λ_0が存在してその代数的重複度は1であり、それ以外の任意の固有値λに対して$|\lambda| < \lambda_0$となる。その場合以下が成り立つ：

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_0^{-t} A^t p(0) = \frac{< v_0, p(0) >}{< v_0, u_0 >} u_0, \tag{9}$$

ここでv_0, u_0はAの正固有値λ_0に対応する左右の正値固有ベクトルであり、$<, >$はベクトルの内積を示す。すなわち人口ベクトルは時間と共に漸近的にu_0に比例し、その幾何学的成長率（マルサス径数）は$\lambda_0 - 1$となる。u_0 は**安定年齢分布** (stable age distribution)、v_0は**繁殖価** (reproductive value) に他ならない。従ってこの場合には離散時間の安定人口モデルが得られたことになる。現実の人口データはすべて離散量であるから、レスリー行列モデルは年齢別人口の時間発展を実際に計算していくための原理を与えている点で重要であり、今日では生物人口モデルの基本的ツールとして非常によく研究されてきている。多状態人口に対するレスリー行列は**一般化レスリー行列** (generalized Leslie matrix) とよばれ、適当な条件のもとでやはり (9) と同様の結果が成り立つことが示される [2] [3] [12]。

5. ロトカーヴォルテラの捕食者ー被食者モデル

上記のモデルは単一の人口の増加モデルであったが、1920年代にロトカと**ヴォルテラ** (V. Volterra) はそれぞれ独立に、２種の生物人口の相互作用を初めて数学的なモデルとして定式化した [25]。いま$P_1(t)$, $P_2(t)$を時刻tでの２種の生物の個体数とする。このとき**ロトカーヴォルテラの競争方程式** (Lotka-Volterra competition equation) は以下のような連立常微分方程式で表される：

$$\begin{cases} P_1'(t) = (\epsilon_1 - \lambda_1 P_1(t) - \mu_{12} P_2(t)) P_1(t) \\ P_2'(t) = (\epsilon_2 - \lambda_2 P_2(t) - \mu_{21} P_1(t)) P_2(t) \end{cases} \tag{10}$$

ここでϵ_jは自然増加率、λ_jは種内競争係数、μ_{ij}は競争相手jの存在による種iの増殖率の低下を表す種間競争係数である。特に$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 < 0$, $\mu_{12} > 0$, $\mu_{21} < 0$の場合はP_1が被食者、P_2が捕食者とな

る**被食者ー捕食者モデル** (prey-predator model) となる：

$$\begin{cases} P_1'(t) = (a - bP_2(t))P_1(t) \\ P_2'(t) = (-c + dP_1(t))P_2(t) \end{cases} \tag{11}$$

ここで a, b, c, d はすべて正のパラメータである。このときは各人口は平衡状態 $(P_1, P_2) = (c/d, a/b)$ にあるかまたはその周囲で周期的に振動する。ロトカーヴォルテラのモデルは人口集団間の相互作用の基本的モデルとして理論生物学ばかりでなく、経済学や社会学に至るまで大きな影響を与えた [30]。

6. 非線形年齢構造化人口モデル

1974 年に現れたガーティンとマッカミィ (Gurtin and MacCamy) [9] による非線形モデルの研究は数学者、数理生物学者に大きなインパクトを与えた。ガーティンとマッカミィのモデルは全人口サイズの人口動態率へのフィードバック効果を考慮したもので、以下のように表される：

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) p(t,a) + \mu(a, P(t))p(t,a) = 0 \\ p(t,0) = \int_0^\infty \beta(\sigma, P(t))p(t,\sigma)d\sigma \\ p(0,a) = p_0(a), \\ P(t) = \int_0^\infty p(t,\sigma)d\sigma \end{cases} \tag{12}$$

ここで $P(t)$ は全人口サイズで、出生率 β や死亡率 μ は全人口 $P(t)$ によってコントロールされている。これらが P の減少関数であると仮定すれば、ロジスティック効果を取り入れたことになる。ガーティンとマッカミイはこの問題の適切性を示すとともに、定常解の局所安定性の条件を与えた。またウェブ (G. F. Webb) [32] は、より一般的な非線形人口モデルに対して非線形半群による解を構成してその性質を詳しく調べるという関数解析的な手法を確立した。こうした非線形問題の研究をきっかけに年齢構造、空間構造や様々な生理的な内部構造をもつ人口集団の一般的なダイナミクス (structured population dynamics) が応用数学の分野において組織的に研究されるようになった [20]。

人口学における実体的な研究から提起された代表的な非線形モデルとして**イースタリンモデル** (Eastalin model) が重要である。このモデルは以下のような非線形積分方程式で表される：

$$B(t) = \int_0^\infty \beta(a, B(t-a))\ell(a)B(t-a)da. \tag{13}$$

ここで $\beta(a, B(t-a))$ は t 時刻に a 歳の人口の出生率であり、コーホートサイズ $B(t-a)$ に依存している。より大きなコーホートに属する人口の出生率はより小さくなると仮定すれば、$\beta(a,x)$ は x の減少関数である。この仮定は世代間の相対的経済状態が出生力の主要な決定因であるとする**イースタリン仮説** (Easterlin hypothesis) をコーホートの相対的規模と出生力の関係として定式化したものに他ならない。大きなコーホートを形成する世代内においては一定の資源をめぐるより厳しい競争が相対的な所得低下をもたらし、それが低い出生力を導くであろうからである。このタイプのモデルはパラメータの値によって解の分岐が起きて、リミットサイクル（持続的な周期解）が出現することが示されるから人口の長期波動の可能な説明として興味深い [4] [7]。

7. 両性人口モデル

人間人口の再生産は、実際にはなんらかの形態のペア形成を通じておこなわれる。両性のペア形成という本質的に非線形な相互作用を考慮にいれた人口成長モデルを構築する試みには長い歴史があるが、非常に困難な問題である。年齢構造を考えない結婚モデルは 1940 年代の末にケンドール (D. G. Kendall)[14] によって提起された。いま $P_m(t)$ を未婚男性人口、$P_f(t)$ を未婚女性人口、$P_c(t)$ をカップル数とすれば、

$$\begin{cases} P_m'(t) = (\beta_m + \sigma)P_c(t) - \mu_m P_m(t) - \Psi(P_m, P_f) \\ P_f'(t) = (\beta_f + \sigma)P_c(t) - \mu_f P_f(t) - \Psi(P_m, P_f) \\ P_c'(t) = -(\mu_m + \mu_f + \sigma) + \Psi(P_m, P_f) \end{cases} \tag{14}$$

ここでμ_m, μ_fは男女の死亡率、β_m, β_fは結婚出生率、σは離婚率である。$\Psi(x,y)$は**結婚関数** (marriage function)であり、未婚の男女人口から生まれる単位時間当たりのカップル数を与える。結婚関数としてどのような関数が現実的に妥当するかについて定説はないが、少なくとも以下のような性質（結婚関数の公理）をみたす非線形関数であると考えられている [15]：

$$\begin{cases} [a] \quad (u,v) \geq 0 \text{ であれば} \Psi(u,v) \geq 0, \\ [b] \quad \Psi(u,0) = \Psi(0,v) = 0, \\ [c] \quad (u,v) \leq (u',v') \text{ であれば} \Psi(u,v) \leq \Psi(u',v'), \\ [d] \quad k > 0 \text{ であれば} \Psi(ku,kv) = k\Psi(u,v), \end{cases}$$

ここで性質 [d]（一次同次性）は男女の出会いの頻度は人口規模がある程度大きくなれば飽和するであろうという考えを反映したものであり、人口規模によっては妥当しないかもしれない。一次同次の結婚関数をもつ上記の結婚モデルの解の挙動は、長期的にはマルサス的に成長するか、滅亡するかのいずれかである [10]。上記のような一夫一婦的な結婚 (monogamous marriage) による人口再生産に関して、年齢構造をもったモデルを初めて提出したのはフレデリクソン (A. G. Fredrickson) [8] である。フレデリクソンのモデルはさらに結婚持続時間をパラメータに導入することでより現実性のあるモデルに拡張されるが、一次同次性を仮定すれば指数関数的成長が可能であることが示される [13]。しかしそれ以外の性質はほとんど未解明であって、両性モデルに基づく人口再生産理論は将来の課題である。

参考文献

[1] S. Anita (2000), *Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics*, Kluwer, Dordrecht.

[2] H. Caswell (2001), *Matrix Population Models*, 2nd Edition, Sinauer, Sunderland.

[3] J. M. Cushing (1998), *An Introduction to Structured Population Dynamics*, SIAM, Philadelphia.

[4] C. Y. Cyrus Chu (1998), *Population Dynamics: A New Economic Approach*, Oxford UP, Oxford.

[5] L. Euler (1760), Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humaine, *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres* 16, 144-164. [A general investigation into the mortality and multiplication of the human species, Translated by N. and B. Keyfitz, *Theoretical Population Biology* 1: 307-314]

[6] W. Feller (1941), On the integral equation of renewal theory, *Ann. Math. Stat.* 12: 243-267.

[7] J. C. Frauenthal and K. E. Swick (1983), Limit cycle oscillations of the human population, *Demography* 20(3): 285-298.

[8] A. G. Fredrickson (1971), A mathematical theory of age structure in sexual populations: Random mating and monogamous marriage models, *Math. Biosci.* 10: 117-143.

[9] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy (1974), Non-linear age-dependent population dynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 54: 281-300.

[10] K. P. Hadeler, R. Waldstätter and A. Wörz-Busekros (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *J. Math. Biol.* 26, 635-649.

[11] M. Iannelli (1995), *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*, Giardini Editori e Stampatori in Pisa.

[12] 稲葉　寿 (1986), 多地域人口成長の離散時間モデルについて, 「人口問題研究」179: 1-15.

[13] H. Inaba (2000), Persistent age distributions for an age-structured two-sex population model, *Math. Pop. Studies* 7(4): 365-398.

[14] D. G. Kendall (1949), Stochastic processes and population growth, *J. Roy. Stat. Soc.* B 11: 230-264.

[15] N. Keyfitz (1972), The mathematics of sex and marriage, In *6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Biology-Health Section, Part II*, Berkeley, CA: 89-108.

[16] N. Keyfitz (1977), *Introduction to the Mathematics of Populations with revision*, Addison-Wesley: Reading.

[17] N. Keyfitz (1985), *Applied Mathematical Demography*, Second Edition, Springer-Verlag: Berlin.

[18] P. H. Leslie (1945), On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* 33: 183-212.

[19] A. G. McKendrick (1926), Application of mathematics to medical problems, *Proc. Edinburgh. Math. Soc.* 44: 98-130.

[20] J. A. J. Metz and O. Diekmann (1986), *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, Lecture Notes in Biomathematics 68, Springer-Verlag: Berlin.

[21] 森田　優三 (1944),「人口増加の分析」, 日本評論社, 東京.

[22] R. Pearl and L. J. Reed (1920), The rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 6: 275-288.

[23] J. H. Pollard (1973), *Mathematical Models for the Growth of Human Populations*, Cambridge University Press: Cambridge.

[24] A. Rogers (1975), *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley: New York.

[25] F. M. Scudo and J. R. Ziegler (eds.) (1978), *The Golden Age of Theoretical Ecology: 1923-1940*, Lecture Note in Biomathematics 22, Springer, Berlin.

[26] R. Schoen (1988), *Modeling Multigroup Populations*, Plenum Press, New York and London.

[27] F. R. Sharpe and A. J. Lotka (1911), A problem in age-distribution, *Philosophical Magazine*, Series 6, Vol. 21: 435-438.

[28] D. Smith and N. Keyfitz (1977), *Mathematical Demography: Selected Papers*, Springer-Verlag, Berlin.

[29] J. Song and J. Yu (1988), *Population System Control*, Springer-Verlag, Berlin.

[30] 寺本　英 (1997), 「数理生態学」, 朝倉書店, 東京

[31] P. F. Verhulst (1838), Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique Publiée par A. Quételet* 10: 113-121.

[32] G. F. Webb (1985), *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker: New York and Basel.