第 6 回数理解析 I 演習 (2010 年 11 月 19 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[32] 次の積分を求めよ:

$$\int_{|z|=2} \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) dz$$

[33] $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) e^z$$

が $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で原始関数 $F(z)$(すなわち $F' = f$ を満たす正則関数) をもつような定数 a の値およびそのときの $F(z)$ を求めよ.

[34] r を $1, 2$ 以外の正実数とする。積分

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2 - 3z + 2}$$

を求めよ。

[35] f を領域 D 上の正則関数とする。D 上で $\mathrm{Re} f(z) > 0$ を満たせば D 内の任意の閉曲線に対して

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

であることを示せ。

[36] $f(z)$ を $|z| < 1$ で正則かつ有界とするとき、任意の $|\zeta| < 1$ に対して

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{|z|<1} \frac{f(z)}{(1 - \zeta \overline{z})^2} dxdy \quad (z = x + iy)$$

が成り立つことを示せ。（ヒント：極座標を用いてコーシーの積分表示に帰着する）

演習問題は`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/`からダウンロードできます. 講義メモも載せています.