第 4 回数理解析 I 演習 (2010 年 10 月 29 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[22] $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ と定義するとき $\sin z = 0$ を満たす z を全て求めよ。また $\sin z = 0$ を満たす点では $(\sin z)' \neq 0$ であることを示せ。

[23] $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ において $\mathrm{Log}(re^{i\theta}) = \log r + i\theta,\ \theta \in (-\pi, \pi),$ によって対数関数を定義する。

$$\mathrm{Log}\,\frac{z}{z-1} = \mathrm{Log}\,z - \mathrm{Log}(z-1)$$

を示せ。また $f(z) = \mathrm{Log}\,z - \mathrm{Log}(z-1)$ とおくとき

$$\lim_{\epsilon \to +0} (f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)) \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

を求めよ。

[24] $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},\ \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots,$ に対して z の級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n$$

は超幾何級数と呼ばれる。$F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ の収束半径を求めよ。

[25] $\log\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)$ の Taylor 展開を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ を示せ。

[26] 0 と $1+i$ とを結ぶ線分を γ とするとき，次の積分を計算せよ．

$$\int_\gamma \sin \pi x \, dz \qquad (たたし\ x = \mathrm{Re}\,z)$$

[27] 円周上の線積分 $\displaystyle\int_{|z|=r} x\,dz$ を次の二つの方法で計算せよ．

(i) 円 $|z| = r$ を $re^{i\theta}$ とパラメータ付けする．

(ii) $|z| = r$ 上で

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{r^2}{z}\Big)$$

が成り立つことを用いる．

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます．講義メモも載せています．