

第10回数理解析I演習 (2011年1月14日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[52] 次の関数のカッコ内の点での留数をもとめよ.

$$\begin{aligned} (1) \frac{e^z}{z^3} \quad (z=0) & \qquad (2) \frac{z^4+3}{z^4-1} \quad (z=i) \\ (3) \frac{z^2 \cos^3 z}{z-\pi} \quad (z=\pi) & \qquad (4) \frac{z^8}{z^4+1} \quad (z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

[53] 方程式 $z^4 - 6z + 3 = 0$ は領域 $1 < |z| < 2$ に何個の解をもつか.

[54] 閉円板 $|z| \leq 3$ の近傍で定義された正則関数 $f(z)$ が円周 $|z| = 3$ 上では零点をもたないとする. f が次の3つの条件をみたすとき $f(z)$ の $|z| < 3$ における零点をすべてもとめよ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= 2 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= 2 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz &= -4 \end{aligned}$$

[55] \mathbb{C} 上の正則関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある. 各 f_n の零点はすべて実軸上にあり, f_n はある正則関数 f に \mathbb{C} 上広義一様収束していると仮定する. もし f が定数関数でないならば, f の零点もすべて実軸上にあることを示せ.

[56] 任意の実数 y に対して等式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{ixy} dx = e^{-y^2/2}$$

を示せ. ヒント: $y > 0$ のとき $e^{-z^2/2}$ を長方形 $\{u + iv \mid u \in (-y, 0), v \in (-r, r)\}$ の境界で積分し $r \rightarrow \infty$ での極限を考える.

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/> からダウンロードできます. 講義メモも載せています.