第1回数理解析　演習 (2010年10月8日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[1] 次の複素空の実部及び虚部を求めよ.

$$(1)\ (1+2i)^3 \qquad (2)\ \frac{5}{-3+4i} \qquad (3)\ \left(\frac{2+i}{3-2i}\right) \qquad (4)\ (1+i)^n+(1-i)^n$$
$$(5)\ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 \qquad (6)\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

[2] $z, w \in \mathbb{C}$ に対して, 次を示せ.

(1) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$
(2) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$
(3) $|z+w| \leq |z|+|w|$

[3] 次を計算せよ.

$$(1)\ \sqrt{i} \qquad (2)\ \sqrt{-i} \qquad (3)\ \sqrt{1+i} \qquad (4)\ \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} \qquad (5)\ \sqrt[4]{i} \qquad (6)\ \sqrt[4]{-i}$$

[4] V を2次元実ベクトル空間, $J\colon V \to V$ を $J^2=-I$ を満たす線型写像とする. V のある基底にたいして J は行列表示 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を持つことを示せ. (より一般に V が有限次元ベクトル空間の場合は J の表現行列はどのような形にできるか？)

[5] (1) $|z|=1, |b| \neq 1$ のとき $\left|\dfrac{z-b}{1-z\bar{b}}\right| = 1$ であ ることを示せ.

(2) $|b|=1$ とする. 複素数 z が $|z|=1, z \neq b$ を動くとき $\dfrac{z-b}{1-z\bar{b}}$ はある直線上を動くことを示せ.

[6] $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ の3点が正三角形の頂点であるための必要十分条件は ${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2 = a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ であることを示せ.

演習問題は`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます. 講義メモも載せています.