数理科学 II レポート問題 2011 年 6 月 21 日配布

担当 平地健吾

以下の問題をできる範囲で解き提出せよ（嘘を書かないように注意すること；全問回答する必要はない）.

・A4 サイズの用紙を用い、一枚目には学生証番号と氏名を書くこと
・提出場所：アドミニストレーション棟のレポート提出ボックス
・締め切り：期末試験の前日

この問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます.

[1] 以下の微分方程式の一般解を求めよ．変形の途中で分母が 0 になる場合などについても説明すること。

(1) $y' = y + y^2$　　(2) $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$

(3) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$　　(4) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

(5) $y' + 2xy = x$　　(6) $y' + e^x y = 3e^x$

[2] 微分方程式 $y' - 2xy = xe^{-x^2}$ の解 $y(x)$ で，$\lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0$ となるものを求めよ.

[3] (a) $\omega = 2xydx + (x^2 + \cos y)dy$ に対して $dU = \omega$ となる関数 $U(x, y)$ を求めよ。

(b) 微分方程式 $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ の積分因子を求め、解を作れ。

[4] 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' + 3y' + 2y = \cos x.$

(2) $y'' - 2y' - 3y = x^2.$

(3) $y'' + y' + y = x + e^x.$

(4) $y'' - 2y' + y = e^x \cos x.$

[5] $y(0) = 1,\ \lim_{x\to\infty} y(x)e^{-2x} = 0$ という条件のもとで次の微分方程式の解を求めよ.

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

[6] ある，非斉次 2 階定数係数線形常微分方程式の解が 3 個，次のように与えられているとする．このとき，この微分方程式を求め，その一般解を求めよ.

$$y_1 = x^2, y_2 = x^2 + e^{2x}, y_3 = 1 + x^2 + 2e^{2x}.$$

裏面に続く

[**7**] 実数 a をパラメーターとする微分方程式 $xy' = ay$ を考える。

(a) この方程式の $x \neq 0$ での一般解を求めよ。

(b) $S(a) = \{y \in C^1(\mathbf{R}) : xy' = ay\}$ を求めよ。ここで $C^1(\mathbf{R})$ は実数全体で定義された連続微分可能な関数全体をあらわす。(a の値によっては $S(a)$ は空集合になることもある。)

[**8**] 実数上の $\mathbf{R}^2$ 値関数 $y(x) = (f_1(x), f_2(x))$ に関する 1 階連立微分方程式

$$f_1' = f_2, \quad f_2' = -f_1$$

を初期値 $y(0) = (0, 1)$ のもとで考える。

(a) $y_0(x) = (0, 1)$ から始めて、逐次近似によってえられる関数列 $\{y_n(x)\}$ を具体的に求めよ.

(b) 上の関数列の収束先を求め，元の微分方程式を満たしていることを確認せよ（微分可能性についても考察すること）.

注意：$y(x) = (\sin x, \cos x)$ が解であることは知っているが、この問題は三角関数を微分方程式の解として定義できることを再確認することを目標をしている。