数学I演習解答例　第9回　2007年10月30日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[**1**] (1) $\int \frac{x}{1+x+x^2+x^3}dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log|1+x| + C.$

(2) $x = a\sin y$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$ とおいて置換積分すると、
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int dy = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

(3) $\int \frac{\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}dx = -\int \left(\frac{1}{\cos x + x\sin x}\right)' \frac{\cos x}{x}dx$ だから、部分積分により (右辺)$= \frac{\sin x}{\cos x + x\sin x} + C.$

[**2**] $n \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\tan^{n-2}x dx \\ &= \int_0^{\pi/4}(\tan x)'\tan^{n-2}x dx - I_{n-2}. \end{aligned}$$

右辺第一項の積分を J_n とおくと、$J_n = 1-(n-2)\int_0^{\pi/4}(\tan x)'\tan^{n-2}x dx = 1-(n-2)J_n$ だから $J_n = \frac{1}{n-1}$。よって $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$。

また、$I_0 = \pi/4$, $I_1 = \frac{1}{2}\log 2$。これらより、各 m に対して

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m-3} + \cdots + (-1)^{m-1} + (-1)^m\frac{\pi}{4}, \\ I_{2m+1} &= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m-2} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{2} + (-1)^m\frac{1}{2}\log 2. \end{aligned}$$

[**3**]

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx \\ =\ &\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\{f(x)-f(0)\}dx + \int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(0)dx \equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

とおく。$I_2 = 2f(0)\arctan\frac{1}{h} \to \pi f(0)$ $(h \to 0+)$ である。I_1 が 0 に収束する事を示せばよい。

いま f は $[-1,1]$ 上で連続より、正定数 M が存在して $|f(x)| \leq M$ をみたす。また原点における連続性より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta \in (0,1)$ が存在して、$|x| < \delta$ ならば

$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ をみたす。このとき、

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|dx \\
&\le \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{h^2+x^2}2Mdx + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{h^2+x^2}\varepsilon dx + \int_{\delta}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}2Mdx \\
&= 4M(\arctan\frac{1}{h} - \arctan\frac{\delta}{h}) + 2\varepsilon\arctan\frac{\delta}{h} \to \varepsilon\pi. \quad (h \to 0+)
\end{aligned}$$

ε は任意だったから、$\lim_{h\to 0+} I_1 = 0$。

・[1] (2) は積分定数をずらせば $-\arccos\frac{x}{a}$ でも同じです。

・[3] で I_1 の被積分関数は、x を固定するごとに、$h \to 0$ のとき 0 に収束しています。但しこの事から、I_1 が 0 に収束しているかはただちには分かりません。一般に極限と積分の順序交換には注意する必要があります。

(解答例作成：三角)