数学I演習　第7回　2007年7月3日配布

担当 平地健吾，TA 三角 淳

演習問題は http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/ からダウンロードできます．講義メモも載せています．

以下の問題をできる範囲で解き，７月１０日１３時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること．

[**1**] [多変数の中間値の定理] $D \subset \mathbb{R}^2$ とする。D の任意の点 p, q に対して連続写像 $\gamma\colon [0,1] \to D$ で $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ をみたすものが存在するとき D は連結であるという。D が連結、$f\colon D \to \mathbb{R}$ が連続であれば $f(D)$ は区間であることを示せ。

[**2**] ２変数の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は平面の各点で全微分可能であるが C^1-関数ではないことを示せ。

[**3**] [行列式の偏微分] f_i, g_i, h_i $(i = 1,2,3)$ を微分可能な１変数関数とする。つぎを求めよ

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix}$$

（答えも行列式で書けます。）

[**4**] [接平面の幾何的な意味づけ] $\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上で定義された全微分可能な関数 $f(x,y)$ にたいし曲面 $S = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U\}$ と S 上の点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通る平面 L:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

を考えれば、L は次の意味で S に接していることを示せ（だから L を接平面とよぶ）：

$P \in S$ から L におろした垂線の足を Q とすれば

$$\lim_{P \to P_0} \frac{|P - Q|}{|P - P_0|} = 0$$