

数学I演習 第3回 2007年5月17日配布

担当 平地健吾, TA 三角 淳

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/> からダウンロードできます。講義メモも載せています。

以下の問題をできる範囲で解き、5月24日13時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること。解答にはA3またはA4版の用紙を用いて、氏名と学籍番号と出題日を一枚目に明記し、複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めること。

[1] f を \mathbb{R} で定義された連続関数とする。

(a) 区間 I の像 $f(I)$ は区間であることを示せ。

(b) f を連続関数とすると $f([a, b])$ は閉区間であることを示せ。

[2] $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ を連続関数で逆関数 $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ が存在するものとする。次を示せ。

(a) f は狭義単調増大または減少である。

(b) f^{-1} は連続である。

[3] \mathbb{R} 上の連続関数 f が $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ を満たすとする。 $a < c$ であれば $f(y) = c$ となる y が存在する。

定義の確認： $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ とは

任意の K に対してある M が存在して $x > M$ ならば $f(x) > K$ が成り立つ

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ とは

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある M が存在して $x < M$ であれば $|f(x) - a| < \varepsilon$ が成り立つ