

数学I演習 第2回 2007年5月8日配布

担当 平地健吾, TA 三角 淳

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/> からダウンロードできます。講義メモも載せています。

例題. a を実数とする. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それからどのような部分列 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ をとつても, $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ は a に収束する部分列を含むとする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ を示せ.

以下の問題をできる範囲で解き, 来週の火曜日 13時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること. 教科書, ノートの参照可. まわりの人と相談してもよい. 解答には A3 または A4 版の用紙を用いて, 氏名と学籍番号と出題日を一枚目に明記し, 複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めること.

問1 次の各命題に対して, 括弧内に与えられた問に答えよ. (1),(2),(3) の解答には \forall, \exists などの論理記号を用いても構わない. 解答の際には, 複数の意味に捉えられる文にせず, かつ自然な表現になるように心がけよ.

(例) 実数 x が $x \geq 0$ を満たす [否定命題を書け] $x < 0$ を満たす.
 $\times x \geq 0$ を満たさない.

(1) $x < 2$ を満たすすべての $x \in \mathbb{R}$ について $x^2 < 4$ [否定命題を書き, 証明せよ]

(2) すべての $y \in \mathbb{R}$ について「ある $x \in \mathbb{R}$ について $x^2 \leq y$ 」.

[否定命題を書き, 証明せよ]

(3) 任意の実数 x に対し, ある実数 y が存在し, $x^2 - y^2 < 2007$ が成り立つ.

[この命題の真偽を確かめ, さらにこれの否定命題を書け.]

(4) レポートを 10 枚以上書けば, 数学の単位がもらえる [否定命題を書け]

問2 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それからどのような部分列 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ をとつても, $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ は収束する部分列を含むとする. このとき $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であることを示せ (すなわち, ある M が存在して任意の n にたいして $|a_n| < M$ が成り立つ).

問3 $f(x), g(x)$ を \mathbb{R} 上で定義された連続関数とする. このとき $h(x) = \max(f(x), g(x))$ も連続関数であることを示せ.

問4 $f(x)$ を \mathbb{R} 上で定義された連続関数とする. 任意の $p, q \in \mathbb{R}$ にたいして

$$2f(p+q) = f(2p) + f(2q)$$

がなりたてば $f(x) = ax + b$ であることを示せ. ここで a, b は実数.