数学I演習解答例　第11回　2007年11月27日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[**1**] (a) $\displaystyle\int\int_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y}(x+y)dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 + \frac{3}{2}y^2\right)dy = \frac{3}{20}.$

(b) $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} |x|dxdy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} |x|dx = \int_{-1}^1 (1-y^2)dy = \frac{4}{3}.$

(c) $\displaystyle\int\int_D e^{y/x}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{y/x}dy = \int_0^1 (e-1)xdx = \frac{e-1}{2}.$

[**2**] (a) 直線 $y=x$, $y=2x$, $x=1$ で囲まれる三角形の上での積分だから、積分の順序を交換すると

$$\int_0^1 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^{1} f(x,y)dx.$$

(b) 直線 $y=0$, $y=1-x$ と円弧 $\{x^2+y^2=1, x\le 0, y\ge 0\}$ で囲まれる領域の上での積分だから、積分の順序を交換すると

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

[**3**] $a\in\mathbb{R}$ に対して $aD \equiv \{(ax,ay)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\in D\}$ と定める。
$V = \{(x,y)\in(1-z/h)D, 0\le z\le h\}$ と書けるから、求める体積は

$$\begin{aligned}\int\int\int_V 1dxdydz &= \int_0^h dz \int\int_{(1-z/h)D} 1dxdy \\ &= \int_0^h \left|(1-\frac{z}{h})D\right| dz = \int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 |D|dz = \frac{|D|h}{3}.\end{aligned}$$

・[1] では今の場合、自由に積分の順序交換ができるケースになっているので、それぞれ求めやすい順番で計算しています。

・[3] では V が体積確定である事を前提に第一の等式で Fubini の定理を用いましたが、ここをもう少し詳しく見てみます。まず第１段として、D が長方形の場合に題意の四角錐 V の体積が $|D|h/3$ となる事に注意します。次に第２段として一般の面積確定な D について考えると、$|\partial D|=0$ ゆえ、任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\mathbb{R}^2$ 上の有限個の長方形 $\{L_i\}_{i=1}^n$ で、$\partial D\subset\cup_{i=1}^n L_i$ かつ $\sum_{i=1}^n |L_i|<\varepsilon$ をみたすようなものが存在します。このとき各 i に対し

て $\{(x,y)\in L_i, z=0\}$ を底面、$(0,0,h)$ を頂点とする四角錐を R_i とおくと、各 R_i の体積の総和は高々$\varepsilon h/3$ で、$\partial V\subset(\cup_{i=1}^n R_i)\cup\{(x,y)\in D: z=0\}$ にも注意すれば ∂V の体積は 0 となり、V は体積確定です。

　また、$|aD|=a^2|D|$ となる事を証明なしで用いていますが、これは定義 (長方形で近似する) に戻って確かめられます。

(解答例作成：三角)