

数学I演習 第1回 2007年4月24日配布

担当 平地健吾, TA 三角 淳

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/> からダウンロードできます。講義メモも載せています。

例題1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$

例題2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \neq 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$

以下の問題をできる範囲で解き、来週の火曜日13時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること。教科書、ノートの参照可。まわりの人と相談してもよい。解答にはA3またはA4版の用紙を用いて、氏名と学籍番号と出題日を一枚目に明記し、複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めること。

問1 実数の連続性の公理として「単調増加かつ有界な数列は収束する」を採用する。この公理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ を導け。

問2 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する必要十分条件は

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$$

であることを示せ。

問3 $a_n \leq x_n \leq b_n$ であって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

であることを証明せよ。

問4 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = \alpha$ であることを示せ。

問5 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1}{n}$ を求めよ。