第 7 回複素解析学 II 演習 (2011 年 5 月 31 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R9] 複素領域 Ω 上の連続関数 $u(z)$ が平均値の性質「$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$ for all $[\Delta(z_0, r)] \subset \Omega$」を満たせば，$u$ は調和関数であることを示せ.

[R10] (調和関数の鏡像の原理) Ω を実軸に対して対称な領域とする．$\Omega_\pm = \{z \in \Omega : \pm\mathrm{Im}\, z > 0\}$ とおく．u を $\{z \in \Omega : \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ 上で定義された実数値連続関数で，Ω_+ 上で調和，$\Omega \cap \mathbb{R}$ 上で 0 になる関数とする．u は Ω 上の調和関数に拡張できることを示せ．(ヒント：Ω_- 上では $-u(\overline{z})$ とおく.)

以下は教室発表用の問題です.

[38] 次の各領域における Green 関数を求めよ：
$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$,
$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Re} z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

[39] Ω を実解析的な境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする．Ω の Green 関数 $g(z, w)$ は z の関数として $\partial\Omega$ の近傍の調和関数に拡張できることを示せ．(ヒント [R10])

[40] $f(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で正則で，$\mathrm{Re}\, f(z) \geq 0$ とする．このとき次のことが成り立つことを示せ.

(i) 定数 $c \geq 0$ があって $\mathrm{Re}\, f(z) \geq cx \quad (z = x + iy)$.

(ii) $0 < \alpha < \pi/2$ を満たす任意の α に対して，$|\arg z| \leq \alpha$ で一様に $f(z)/z \to c$.

[41] **（Hadamard の 3 円定理）**$0 < r_1 < r_2$ とする．$r_1 \leq |z| \leq r_2$ 上の正則関数 f に対し，$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ $(r_1 \leq r \leq r_2)$ とおく．このとき，実数 α に対して $|z^\alpha f(z)|$ が劣調和関数であることを用いて，$\log M(r)$ が $\log r$ の下に凸な関数であること，即ち $r_1 \leq r \leq r_2$ に対して

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2)$$
$$\left(\Longleftrightarrow M(r) \leq M(r_1)^{\log(r_2/r)/\log(r_2/r_1)} M(r_2)^{\log(r/r_1)/\log(r_2/r_1)}\right)$$

が成立することを示せ.

[42] $f(z)$ は $r < |z| < 1$ で正則，非零，$r \leq |z| \leq 1$ で連続で $|f(e^{i\theta})| = M > 0$, $|f(re^{i\theta})| = m$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とする．$f(z)$ を決定し，M, m, r の間の関係を求めよ.

[43] D を有界でない複素領域，$f(z)$ は D で正則かつ有界とする．任意の $\zeta \in \partial D \subset \mathbb{C}$ において $\overline{\lim}_{z\to\zeta}|f(z)| \leq M$ ならば，D 内で $|f(z)| \leq M$ であることを証明せよ.