第 6 回複素解析学 II 演習 (2011 年 5 月 24 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[**R7**] u を単連結領域 Ω 上の実数値調和関数とする．Ω 上の正則関数 f で $u = \mathrm{Re} f$ を満たすものが存在することを示せ．(ヒント：$\partial u/\partial z$ は正則関数)

[**R8**] $|z|^a$, $(a \geq 0)$ および $\log(1+|z|^2)$ は劣調和であることを示せ.

以下は教室発表用の問題です.

[**30**] 関数 $u\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ で $u(|z|)$ が $\Delta \setminus \{0\}$ 上で調和関数になるものを決定せよ.

[**31**] 正則関数 $f(z)$ に対して $\log(1+|f(z)|^2)$ は劣調和であることを示せ.

[**32**] (劣調和関数の局所性) u を複素領域 Ω 上の連続関数とする．任意の $z \in \Omega$ に対しある r が存在して $u|_{\Delta(z,r)}$ が劣調和であれば u は Ω 上で劣調和であることを示せ.

[**33**] C^2 関数 f は

$$\Delta f(z) = \lim_{r\to 0} \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta - f(z)\right)$$

を満たすことを示せ.（ヒント：f の z での 2 次までのテーラー展開を考える.）これを用いて f が劣調和であれば $\Delta f \geq 0$ であることを示せ.

[**34**] C^2 関数 f は

$$r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta = \iint_{\Delta(z,r)} \Delta f(x+iy)dxfy$$

を満たすことを示せ．これを用いて $\Delta f \geq 0$ であれば f は劣調和であることを示せ.

[**35**] $\mathcal{F}$ を領域 Ω における劣調和関数の一つの族とする.

(a) $\mathcal{F}$ を含む Perron 族全体の共通部分 $\overline{\mathcal{F}}$ は Perron 族であることを示せ.

(b) $\mathcal{F}$ が Ω 上で一様有界であれば Ω 上の調和関数 u で任意の $v \in \mathcal{F}$ に対して $v \leq u$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ.

[**36**] $\Omega = \Delta \setminus \{0\}$ の境界上の関数 f を $f|_{\partial\Delta} = 0$, $f(0) = 1$ で定義する．Ω 上の劣調和関数 u で境界上で $u \leq f$ であるものは Ω 上で $u \leq 0$ を満たすことを示せ.

[**37**] (a) $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とするとき，$\partial\Omega$ の各点での barrier を作れ.

(b) $\mathbb{C}$ 内の任意の有界領域に対して，barrier をもつ境界上の点が少なくとも 1 つ存在することを示せ.