第5回複素解析学II演習 (2011年5月17日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の1問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R6] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数とする。

$$F(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt$$

により上半空間 H 上の関数を定義する (積分が収束することを確かめよ)。このとき $U(z)$ は H 上で調和であり、

$$\lim_{y\to+0} F(x+iy) = f(x)$$

が成り立つことを示せ。

以下は教室発表用の問題です.

[25] $\mathcal{F}$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で定義された調和関数の族で $\sup\{|u(z)| : u \in \mathcal{F}, z \in D\} < \infty$ を満たすものとする。$\mathcal{F}$ の任意の関数列は広義一様収束する部分列を含むことを示せ。

[26] $f(z) = z^{-1}\log(1+z)$, $u(z) = \log|1+z|$ とする.

(a) $z = 0$ は f の除去可能特異点であることを示せ.

(b) $\Gamma_\delta = \left\{e^{i\theta}\,;\, -\pi+\delta < \theta < \pi-\delta\right\}$ とおく．$\displaystyle\lim_{\delta\to0}\int_{\Gamma_\delta} f(z)\,dz$ を計算せよ.

また $0 \le r \le 1$ に対して，$u(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta$ を示せ.

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \log\sin\theta\,d\theta$ を計算せよ.

[27] $h(z)$ を $\Delta^* = \Delta\setminus\{0\}$ 上の実数値調和関数とする。

(a) ある定数 A が存在して $h(z) + A\log|z|$ は Δ^* 上の正則関数の実部となることを示せ。

(b) $h(z)$ が有界であれば Δ 上の調和関数に拡張されることを示せ。

[28] 定数 a, b, c に対して $\mathbb{C}$ 上で定義された微分作用素

$$L = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

を考える。任意の C^2 関数 f と任意の回転写像 $\rho_\theta(z) = e^{i\theta}z$ に対して $(Lf)\circ\rho_\theta = L(f\circ\rho_\theta)$ が成り立つとする。このとき L のラプラシアンの定数倍であることを示せ。

[29] 有界連続関数 $f(x)$ にたいして上半空間上の関数

$$F_+(x+iy) = \int_0^{\infty} \frac{y\,f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt$$

を考える。F_+ の $H \ni z \to 0$ での挙動を調べよ。