第4回複素解析学II演習 (2011年5月10日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の1問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R5] D, D' を多角形の内部として定義される複素領域とする (より一般に Jordan 領域を考えても良い). ∂D 上の正の向きに並んだ3点 z_1, z_2, z_3 と $\partial D'$ 上の正の向きに並んだ3点 w_1, w_2, w_3 にたいして双正則写像 $f\colon D \to D'$ でその境界への拡張が $f(z_j) = w_j$ $(j = 1, 2, 3)$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ.

ただし, z_1, z_2, z_3 が正の向きに並ぶとは z_1 から出発して ∂D を正の向きに一周するとき z_2, z_3 の順に通過するときをいう.

以下は教室発表用の問題です.

[21] 上半空間の自己同型群 $\mathrm{Aut}(H)$ に関するつぎの性質を示せ.

(a) $F \in \mathrm{Aut}(H)$ が実軸上の3点を固定すれば F は恒等写像.

(b) $x_1 < x_2 < x_3$ および $y_1 < y_2 < y_3$ が成り立てば $F(x_j) = y_j$, $j = 1, 2, 3$, を満たす $F \in \mathrm{Aut}(H)$ がただ一つ存在する.

(c) $x_1 < x_2 < x_3$ および $y_3 < y_1 < y_2$ が成り立てば $F(x_j) = y_j$, $j = 1, 2, 3$, を満たす $F \in \mathrm{Aut}(H)$ がただ一つ存在する.

[22] 円環 $r < |z| < 1$ から円環 $s < |z| < 1$ への双正則写像 f が存在するのはどのようなときか? またそのときの f を求めよ.

[23] $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$ に対して上半空間 H 上の正則関数

$$F(z) = \int_0^z \zeta^{-\beta_1}(1-\zeta)^{-\beta_2} d\zeta$$

を定義する.

(a) $1 < \beta_1 + \beta_2 < 2$ のとき $F(H)$ は三角形であることを示し、その3つの角は $\alpha_j\pi = (1-\beta_j)\pi$ であることを示せ.

(b) $\beta_1 + \beta_2 = 1$ のときはどうなるか?

(c) $0 < \beta_1 + \beta_2 < 1$ のときはどうなるか?

(d) 問 (a) において角 $\alpha_j\pi$ の頂点の対辺の長さは

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)$$

であることを示せ. ここで $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数である.

[24]

$$F(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^n)^{2/n}}$$

は単位円板を正多角形のにうつす双正則写像であることを示せ.